Zárthelyi dolgozat

A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. Egy urnában 10 piros, 10 fehér és 10 sárga golyó van. Véletlenszerűen kihúzunk visszatevés nélkül öt darabot. Mi a valószínűsége, hogy a húzott golyók között nincs piros? Feltéve, hogy nem húztunk pirosat, mi a valószínűsége, hogy legalább egy sárgát húztunk?

2. Egy terméket három gyárban állítanak elő. Az üzemek eltérő kapacitással működnek, így az elsőben a termékek 30%-át, a másodikban a 20%-át gyártják, a maradék pedig a harmadik üzemben készül. Az első gyárban lévő gyártósoron minden 1000 legyártott termékből 10, míg a második gyárban minden 2000-ből 15 hibás. A harmadik gyártósoron legyártott termékek 98%-a hibátlan. A boltban véletlenszerűen leveszünk egy ilyen terméket a polcról, azonban a megvásárlása után azt tapasztaljuk, hogy hibás. Mi a valószínűsége, hogy a termék az első gyárban készült?

3. Két szabályos dobókockával dobunk, jelölje X a dobott számok összegét, Y pedig a szorzatukat. Döntsük el, hogy függetlenek-e az $\{X \text{ páros}\}$ és az $\{Y \leq 4\}$ események.

4. Jordán Mihály, a 12. A testneveléstanára kosárlabdát tanít a diákoknak, és hogy szórakoztatóbbá tegye az órát, fogadni akar az osztállyal, hogy be tud dobni egymás után 7 büntetőt. A diákok, ismerve Mihály képességeit és ízlését is egyben, belemennek a fogadásba a következő, Mihály számára igen előnyös szabályokkal: Mihály legfeljebb 7-szer, de csak az első kihagyott büntetőig próbálkozhat. Ha már az elsőt elrontja, nem kap semmit (az osztály pedig egész órán játszhat). Ha az első bemegy, 1 darab Túró Rudit nyer, ezután minden bedobott büntetővel duplázza a nyereményét, tehát két bedobott büntetőért 2, háromért 4 Túró Rudi jár, stb. Az első elrontott vagy a hetedik bedobott büntető után a játék véget ér, és Mihály megkapja a már elért nyereményét. Határozzuk meg a Mihály által nyert Túró Rudik számának várható értékét, ha tudjuk, hogy a büntetőket egymástól függetlenül 1/2 valószínűséggel dobja be.

5. Véletlenszerűen választunk egy r_1 és egy r_2 számot a $(0; 1)$ intervallumból, majd rajzolunk a síkon egy origó középpontú, r_1 sugarú kört, illetve egy r_2 sugarú kört, melynek középpontja az $(1; 0)$ pont. Mi a valószínűsége, hogy a két kör metszi egymást?

6. Az X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ \alpha\sqrt{t}, & \text{ha } t \in (0; 4], \\ 1, & \text{ha } t > 4, \end{cases}$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ egy paraméter. Határozzuk meg α értékét és az X várható értékét.

Nevezetes eloszlások táblázata

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$1-p$, p	-	p
binomiális	$B(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	-	np
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1}p$	-	$\frac{1}{p}$
egyenletes	$U(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$