1. Feladat

Egy diszkrét idejű jel időfüggvénye $x[k] = \cos[0.4\pi k + 4]$. Állapítsa meg a jel L periódusszámát!

A szükséges összefüggés:

$$\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{M}{L}$$

Az ismert $\vartheta = 0.4\pi$-t behelyettesítve:

$$\frac{0.4\pi}{2\pi} = \frac{4\cancel{\pi}}{20\cancel{\pi}} = \frac{1}{5} = \frac{M}{L} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = 5}$$

2. Feladat

Egy DI rendszer gerjesztésének fazora a $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ körfrekvencián $\overline{U} = 3e^{j0.2}$. A rendszer átviteli tényezője ugyanezen a körfrekvencián $\overline{H} = 2e^{j1.2}$. Határozza meg a rendszer válaszának időfüggvényét!

A szükséges összefüggések:

$$\overline{Y} = \overline{U} \cdot \overline{H}, \qquad Ae^{j\varphi} = A\cos\left(\vartheta k + \varphi\right)$$

Az ismert értékeket behelyettesítve:

$$\overline{Y} = 3e^{j0.2} \cdot 2e^{j1.2} = 6e^{j(0.2+1.2)} = 6e^{1.4} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y[k] = 6\cos\left(\frac{\pi}{4}k + 1.4\right)}$$

3. Feladat

Egy diszkrét idejű rendszer rendszeregyenlete $y[k] + 5y[k-1] = u[k] - 2u[k-1]$. Adja meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!

$$y[k] + 5y[k-1] = u[k] - 2u[k-1]$$
$$\overline{Y} + 5\overline{Y}e^{-j\vartheta} = \overline{U} - 2\overline{U}e^{-j\vartheta}$$
$$\overline{Y}\left(1 + 5e^{-j\vartheta}\right) = \overline{U}\left(1 - 2e^{-j\vartheta}\right)$$

$$\boxed{\overline{H}\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{1 - 2e^{-j\vartheta}}{1 + 5e^{-j\vartheta}}}$$

4. Feladat

Egy diszkrét idejű jel időfüggvénye $x[k] = 2\cos[0.25\pi k - 1.25]$. Adja meg a jel fazorát (komplex csúcsértékét)!

A szükséges összefüggés:

$$\overline{X} = Ae^{j\varphi} = A\cos(\vartheta k + \varphi)$$

Az ismert értékeket behelyettesítve:

$$\boxed{\overline{X} = 2e^{-j1.25}}$$

(vegyük észre, hogy ϑ-tól teljesen független)

5. Feladat

Egy diszkrét idejű rendszer ugrásválasza $g[k] = \varepsilon[k]2^k$. Adja meg a rendszer $h[k]$ impulzusválaszát!

A szükséges összefüggések:

$$h[k] = g[k] - g[k-1], \qquad \varepsilon[k-1] = \varepsilon[k] + \delta[k]$$

$$\delta[k] = \begin{cases} \infty & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Ezeket alkalmazva:

$$\begin{aligned}
h[k] &= g[k] - g[k-1] \\
h[k] &= \varepsilon[k]2^k - \varepsilon[k-1]2^{k-1} \\
h[k] &= \varepsilon[k]2^k - \varepsilon[k]2^{k-1} + \delta[k]2^{k-1} \\
h[k] &= \varepsilon[k]\left(2^k - 2^{k-1}\right) + \delta[k]2^{k-1} \\
h[k] &= \varepsilon[k]\left(2^{k-1}\right) + \delta[k]2^{0-1} \\
h[k] &= \varepsilon[k]\left(2^k \cdot 2^{-1}\right) + \delta[k]2^{-1} \\
h[k] &= \varepsilon[k]\left(2^k \cdot \frac{1}{2}\right) + \delta[k]\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{h[k] = \frac{1}{2}\varepsilon[k]2^k + \frac{1}{2}\delta[k]}$$

6. Feladat

Egy periodikus DI jel periódushossza $L = 4$. Egy periódusának mintái:

$$x[0] = 1, \qquad x[1] = 2, \qquad x[2] = 2, \qquad x[3] = -1$$

Adja meg a jel nulladik komplex Fourier-együtthatójának értékét, X_0^C-t!

A szükséges összefüggések:

$$X_p^C = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[k]e^{-jp\Theta k}, \qquad \Theta = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Ezeket alkalmazva:

$$p = 0: \; X_0^C = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} x[k]e^{-jp\frac{\pi}{2}k}$$

$$X_0^C = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{x[0]}_{1}\overbrace{e^{-j\cdot 0\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0}}^{e^0=1} + \underbrace{x[1]}_{2}\overbrace{e^{-j\cdot 0\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1}}^{e^0=1} + \underbrace{x[2]}_{2}\overbrace{e^{-j\cdot 0\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2}}^{e^0=1} + \underbrace{x[3]}_{-1}\overbrace{e^{-j\cdot 0\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 3}}^{e^0=1}\Big)$$

$$X_0^C = \frac{1}{4}(1+2+2-1) = \frac{1}{\cancel{4}}\cancel{4} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{X_0^C = 1}$$

7. Feladat

Egy DI jel spektruma $\vartheta = [0, \pi]$ intervallumon $X\left(e^{j\vartheta}\right) = \pi - \vartheta$. Határozza meg a jel sávszélességét, ha $\sigma = 0.1$!

A szükséges összefüggések:

$$\sigma \cdot \left|X\left(e^{j\vartheta}\right)\right|_{\max} = \left|X\left(e^{j\vartheta}\right)\right|, \qquad \left|X\left(e^{j\vartheta}\right)\right|_{\max} = \pi, \qquad \vartheta_{\min} = 0$$

Ezeket alkalmazva:

$$\vartheta_{\max} = ?, \qquad \Delta\vartheta = ?$$

$$0.1 \cdot \pi = \pi - \vartheta_{\max} \quad\Longrightarrow\quad \vartheta_{\max} = \pi - 0.1\pi = 0.9\pi$$

$$\Delta\vartheta = \vartheta_{\max} - \vartheta_{\min} = 0.9\pi - 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\Delta\vartheta = 0.9\pi}$$

8. Feladat

Egy FI jel sávszélessége $\Delta\omega = 2\,\frac{\text{krad}}{\text{s}}$. Határozza meg azt a legkisebb mintavételi körfrekvenciát $\left[\frac{\text{krad}}{\text{s}}\right]$-ban, mellyel a jelet mintavételezve az időfüggvény helyreállítható (rekonstruálható) a mintái alapján!

A **Nyquist-Shannon tétel** alapján egy jel pontosan rekonstruálható a minták sorozatából, ha a mintavételi frekvencia **legalább akkora, mint a maximális frekvencia (itt sávszélesség) kétszerese**, azaz:

$$\omega_\text{s} \geq 2 f_\text{max} = 2\Delta\omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\omega_\text{s} = 4\,\frac{\text{krad}}{\text{s}}}$$

9. Feladat

Egy $L = 4$ periódusidejű jel komplex Fourier-együtthatói az alábbiak:

$$X_0^C = 1, \qquad X_1^C = 2e^{j0.2}, \qquad X_2^C = 0$$

Adja meg a jel mérnöki valós alakjának megfelelő időfüggvényét!

A szükséges összefüggések:

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{M} X_p \cos\left(\Theta p k + \varphi_p\right) + X_{\frac{L}{2}}(-1)^k, \qquad \Theta = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$M = \begin{cases} \dfrac{L}{2} - 1 & \text{ha } L \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{L-1}{2} & \text{ha } L \text{ páratlan} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{4}{2} - 1 = 1$$

$$X_p = \begin{cases} \left|X_0^C\right| & p = 0 \\ 2 \cdot \left|X_p^C\right| & p > 0 \end{cases}$$

Ezeket alkalmazva:

$$X_0 = \left|X_0^C\right| = 1, \qquad X_1 = 2 \cdot \left|X_1^C\right| = 2 \cdot 2 = 4, \qquad X_2 = 0$$

$$x[k] = X_0 + X_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}k + 0.2\right) + \cancel{0 \cdot (-1)^k}$$

$$\boxed{x[k] = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}k + 0.2\right)}$$

10. Feladat

Egy DI rendszer átviteli karakterisztikája

$$H\left(e^{j\vartheta}\right)=\frac{1-e^{-j2\vartheta}}{1+e^{j\vartheta}}$$

Adja meg a rendszer átviteli tényezőjét a $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ körfrekvencián!

Euler-formula: $e^{j\varphi}=\cos\left(\varphi\right)+j\sin\left(\varphi\right)$

Az ismert körfrekvenciát behelyettesítve:

$$H\left(e^{j\vartheta}\right)=\frac{1-e^{-j2\frac{\pi}{2}}}{1+e^{j\frac{\pi}{2}}}=\frac{1-e^{-j\pi}}{1+e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

$$H\left(e^{j\vartheta}\right)=\frac{1-\left(\cos\left(\pi\right)-j\sin\left(\pi\right)\right)}{1+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}=\frac{1-(-1-\cancel{j\cdot 0})}{1+(\cancel{0}+j\cdot 1)}$$

$$H\left(e^{j\vartheta}\right)=\frac{2}{1+j}=\frac{2(1-j)}{(1+j)(1-j)}=\frac{2-2j}{2}=\frac{2}{2}-\frac{\cancel{2}j}{\cancel{2}}=1-j$$

$$\mathrm{Re}(H)=1,\ \ \mathrm{Im}(H)=-1$$

$$A=\sqrt{\mathrm{Re}^2(H)+\mathrm{Im}^2(H)}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(H)}{\mathrm{Re}(H)}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right)=\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\overline{H}=\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}$$

11. Feladat

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer ugrásválasza $g[k]=5\cdot 0.8^k\varepsilon[k]$. Adja meg a rendszer válaszát az $u[k]=2\varepsilon[k+3]$ gerjesztésre!

DI LTI rendszer esetén:

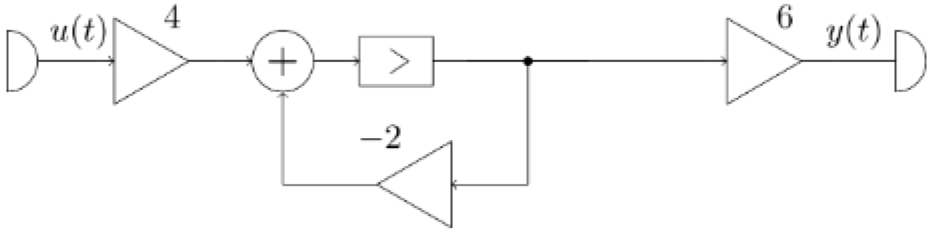
$$y[k]=u[k]\Big|_{\varepsilon[k]=g[k]}\quad\Longrightarrow\quad y[k]=2\left(5\cdot 0.8^{k+3}\varepsilon[k+3]\right)$$

Azaz $\varepsilon[k]$-t helyettesítjük $u[k]$-ban $g[k]$-val és szükség szerint eltoljuk, ebből kapjuk az $y[k]$ gerjesztésválaszt.

$$\boxed{y[k]=10\cdot 0.8^{k+3}\varepsilon[k+3]}$$

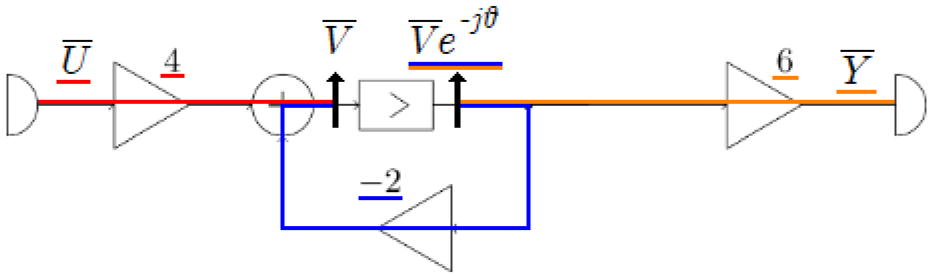
12. Feladat

Az alábbi ábrán látható egy diszkrét idejű rendszert reprezentáló jelfolyamhálózat.



Adja meg a rendszer átviteli karakterisztikáját normálalakban!

$$u[k] \to \overline{U}, \qquad u[k-1] \to \overline{U}e^{-j\vartheta}, \qquad y[k] \to \overline{Y}$$



Legyen a késleltető bemenete $\overline{V}$ fazor:

$$\begin{aligned}\overline{V} &= 4\overline{U} - 2\overline{V}e^{-j\vartheta} \\ \overline{V} + 2\overline{V}e^{-j\vartheta} &= 4\overline{U} \\ \overline{V}\left(1 + 2e^{-j\vartheta}\right) &= 4\overline{U} \\ \overline{V} &= \frac{4}{1+2e^{-j\vartheta}}\overline{U}\end{aligned}$$

A választ $\overline{Y}$ fazorral fejezzük ki:

$$\overline{Y} = 6\overline{V} = \frac{24}{1+2e^{-j\vartheta}}\overline{U}$$

$$\boxed{H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{24}{1+2e^{-j\vartheta}}}$$

1. Feladat

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer impulzusválasza

$$h(t) = -2\delta(t) + 10\varepsilon(t)e^{-8t}$$

Gerjesztés-válasz stabilis-e a rendszer?

- Egy FI rendszer GV-stabil, ha **abszolút integrálható**.
- **Integrálnunk** kell $h(t)$-t $-\infty$-től $+\infty$-ig és amennyiben az eredmény véges (tehát nem végtelen), akkor a rendszer **GV-stabil**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|h(t)\big|\, dt < \infty\,?$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|h(t)\big|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \big|-2\delta(t) + 10\varepsilon(t)e^{-8t}\big|\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \big|-2\delta(t)\big| + \int_{-\infty}^{\infty} \big|10\varepsilon(t)e^{-8t}\big|\, dt = \ldots$$

- A Dirac-delta integrálja a teljes valós számsíkon **1**.
- $\varepsilon(t)$ azt jelenti, hogy $h(t)$ **belépő**, azaz $t < 0 :\ h(t) = 0$, így az integrál alsó határa $-\infty$ helyett 0-ra írható át.
- e^{-8t}-t úgy integráljuk, hogy a **kitevő együtthatójával** (-8) **osztunk**.
- Továbbá, az **abszolútérték elhagyható**, mivel a függvény végig pozitív.

$$\ldots = 2\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) + 10\int_{0}^{\infty} e^{-8t}\, dt = 2 + 10\left(\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-8t}}{-8} - \frac{e^{-8\cdot 0}}{-8}\right) =$$

$$= 2 + 10\left(0 - \frac{-1}{-8}\right) = \boxed{3.25 < \infty} \quad \Longrightarrow \quad \textbf{GV-stabil, mert absz. int.}$$

2. Feladat

Egy folytonos idejű rendszer impulzusválasza

$$h(t) = 4\varepsilon(t)e^{-2t}$$

Adja meg a rendszer ugrásválaszát!

- A FI ugrásválasz az **impulzusválasz integrálja** $-\infty$-től t-ig.
- $\varepsilon(t)$ miatt az integrál alsó határa ismét helyettesíthető 0-val.
- Az ugrásválasz nem egy konkrét számként fog előállni, hanem t függvénye.

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{t} 4\varepsilon(\tau)e^{-2\tau}\,d\tau = 4\varepsilon(t)\int_0^t e^{-2\tau}\,d\tau =$$

$$= 4\varepsilon(t)\left[\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right]_0^t = 4\varepsilon(t)\left(\frac{e^{-2t}}{-2} - \frac{e^{-2\cdot 0}}{-2}\right) = \boxed{-2\varepsilon(t)\big(e^{-2t} - 1\big)}$$

3. Feladat

Adott egy elsőrendű, folytonos idejű lineáris invariáns rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja:

$$x'(t) = 3x(t) + 2u(t)$$
$$y(t) = 1x(t)$$

Adja meg a rendszer állapotváltozóinak $x(t)$ közelítő számításához szolgáló előrelépő Euler-séma formuláját!

Előrelépő Euler-séma:

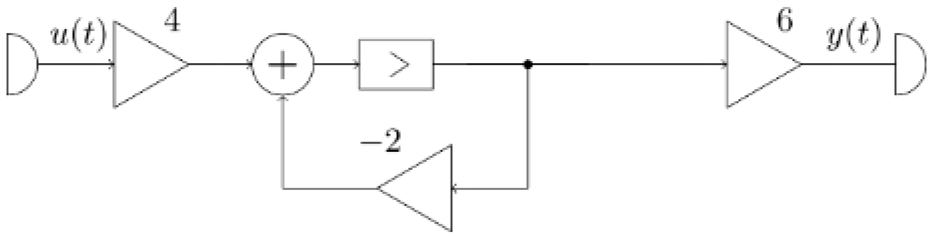
$$x(t_k + h_k) \approx (1 + Ah_k)x(t_k) + Bh_k u(t_k)$$

Ennek alapján:

$$\left.\begin{array}{l} A = 3 \\ B = 2 \end{array}\right\} \implies \boxed{x(t_k + h_k) \approx (1 + 3h_k)x(t_k) + 2h_k u(t_k)}$$

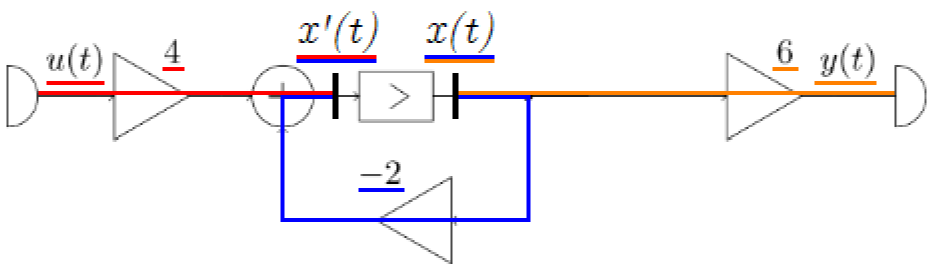
4. Feladat

Az alábbi ábrán látható egy folytonos idejű rendszer reprezentáló jelfolyamhálózat. Adja meg a rendszer állapotváltozós leírásának normálalakját!



- A rendszer **elsőrendű**, mivel **1 db** integrátora van.
- Az állapotváltozó az **integrátor bemenete**: $x'(t)$

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
x'(t) &= -2x(t) + 4u(t) \\
y(t) &= 6x(t)
\end{aligned}
$$