



Fizikai Tanszék

Dr. Takács Csaba  
**Elektrodinamika, optika**

Miskolc, 2004. július

## Tartalomjegyzék

Elektromos alapjelenségek .....	1	A mágneses mező szemléltetése .....	39
Alapfogalmak .....	2	Peremfeltételek a mágneses mezőben .....	39
Coulomb - mező (1785) .....	3	Végtelen hosszú, egyenes áramfonal mágneses tere (homogén közegben) .....	40
Az elektrosztatika I. alaptörvénye .....	4	Mágneses mező szolenoid belsejében .....	40
Egyenletesen feltöltött egyenes rúd vákuumbeli tere a középtengelye mentén .....	5	Elektrodinamikai erőhatás végtelen hosszú, párhuzamos, egyenes áramvezetők között vákuumban ..	41
Az elektromos dipólus .....	5	Az anyagok osztályozása mágneses viselkedésük szerint .....	42
Forgatónyomaték homogén külső elektromos mezőben nyugvó pontszerű dipólusra .....	6	A mozgási elektromágneses indukció .....	44
Apoláros és poláros molekula .....	6	Lineáris generátor .....	44
Elektromos polarizáció .....	7	A mozgási indukció Faraday-féle törvénye .....	45
Elektromos polarizációvektor .....	8	A váltakozó áramú generátor modellje .....	46
Az elektromos indukcióvektor .....	8	A lineáris motor modellje .....	46
A lineáris elektromos anyagegyenlet .....	8	A nyugalmi elektromágneses indukció .....	48
Az elektromos fluxus .....	9	Lineáris áramkörök induktivitásai .....	50
Gauss törvénye (az elektrosztatika II. alaptörvénye) .....	9	Szolenoid önindukciós együtthatója .....	50
Felületen eloszló töltés .....	10	Az általánosított hurokegyenletek .....	51
A Poisson-egyenlet .....	11	A mágneses energia .....	51
Peremfeltétel az elektromos térerősségre .....	11	Egy tranziens (átmeneti) jelenség .....	52
Peremfeltétel az elektromos indukcióvektorra .....	12	Gerjesztett elektromágneses rezgések .....	54
Egyenletesen feltöltött végtelen sík szigetelőlemez tere	13	Szorosan csatolt transzformátor állandósult állapota, ohmos és kapacitív terhelés esetén .....	55
Kettős töltött lemez tere .....	15	Az áramsűrűség differenciálegyenlete .....	57
Vezetők az elektrosztatikában .....	16	A szkineffektus .....	57
Magányos vezető kapacitása .....	16	A vezetési és az eltolási áramsűrűség aránya jó vezetőkben .....	61
Vákuumban elhelyezett vezető gömb kapacitása .....	17	<b>ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK</b> .....	61
Kondenzátor .....	17	Hullámfelület (fázisfelület) .....	62
Kondenzátorok energiája .....	18	Síkhullám .....	62
Síkkondenzátor .....	18	Monokromatikus síkhullám .....	63
A Millikan-kísérlet (1910) .....	19	<b>HULLÁMJELENSÉGEK</b> .....	65
Egyenletesen feltöltött szigetelőgömb elektromos energiája .....	20	I. A hullám két közeg határán: visszaverődés és törés ..	65
<b>AZ ELEKTROMOS ÁRAMLÁS</b> .....	21	Optikai prizma .....	66
A töltésmegmaradás törvénye .....	21	Optikai lencsék .....	67
Az elektromos áramlás két típusa .....	22	Nevezetes sugármenetek .....	68
Stacionárius elektromos áramlás .....	22	Lineáris nagyítás .....	69
Vákuumdióda karakterisztikája .....	23	Lencsék alkalmazása .....	69
Az áramforrás .....	24	Kézi nagyító (LUPE) .....	69
A lokális Ohm-féle anyagegyenlet .....	25	Mikroszkóp .....	70
Az integrális Ohm-egyenlet .....	26	II. Diszperzió .....	70
Vonalas (lineáris) vezetők .....	27	Longitudinális és transzverzális hullámok .....	71
A lokális Joule-törvény .....	28	Elliptikusan poláros hullám .....	72
Az integrális Joule-törvény .....	28	III. Polarizáció .....	73
Az elektrolízis .....	29	Brewster törvénye .....	73
A villámhárító .....	30	Összefüggés az elektromos és a mágneses amplitúdó között .....	75
Mágneses alapjelenségek .....	31	Energiaviszonyok a hullámban .....	76
A mágneses indukcióvektor .....	32	Poynting-vektor .....	76
A Lorentz-erő .....	33	IV. Interferencia .....	77
A Hall-effektus .....	34	A természetes fényre vonatkozó extra koherenciafeltételek .....	78
Forgatónyomaték homogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra .....	35	IV.1. Állóhullám .....	79
Az anyagok mágnesezettségének oka .....	36	IV.2. Interferencia planparalel lemezen .....	80
A mágnesezettség vektora .....	36	IV.3. Diffrakció (a kétréses interferométer) .....	81
Stacionárius áramok vákuumbeli mágneses mezőjének cirkulációja .....	37	Utolsó tantermi feladat: hengeres dióda .....	82
Mágneses lineáris anyagegyenlet .....	37		
A stacionárius mágneses mező I. alaptörvénye: az Ampère-féle gerjesztési törvény .....	38		

A jegyzet tartalmát ellenőrizte: Dr. Takács Csaba, egyetemi docens.

A jegyzetet készítette és az ábrákat rajzolta: Imre Mihály.

Készült a Miskolci Egyetemen, Dr. Takács Csaba: Elektrodinamika, optika című előadásai alapján.  
Második, javított kiadás, 2004. július 26.

Előzmények:

- Kr. e. VI. sz. THALÉSZ: a gyapjával megdörzsölt borostyánkő magához vonzotta a kenyérmorzsákat
- 1600 WILLIAM GILBERT (1540-1603, angol orvos és fizikus): bőrrel megdörzsölt üvegrúd kis papír darabkákat magához vonzott, majd a hozzáérés után elpattantak tőle.

### Elektromos alapjelenségek

- 1.) Preparált (megdörzsölt) test és preparálatlan test között mindig vonzó kölcsönhatás jön létre.
- 2.) Két preparált test között már vonzó és taszító kölcsönhatás is létrejöhethet.
  - üveg-üveg → taszító
  - borostyánkő-üveg → vonzó
  - borostyánkő-műanyag → taszító

Az egynemű anyagok azonos elektromosságúak.

Szemben a gravitációval, ahol csak egyfajta (pozitív) tömeg létezett, az elektromosságnak 2 fajtája van, a kísérletek alapján az egynemű elektromosságok taszítják egymást, a különbözőek pedig vonzzák egymást.

Megállapodás:

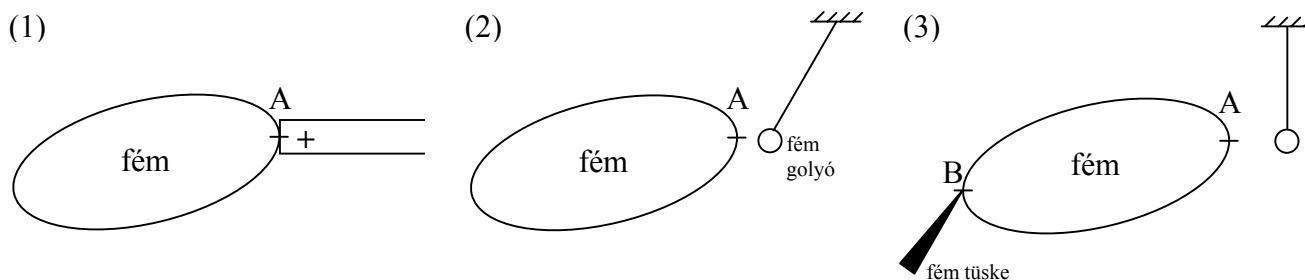
- bőrrel üveget dörzsölve → (+)
- gyapjával borostyánkövet dörzsölve → (-)

### 3.) Kísérletek

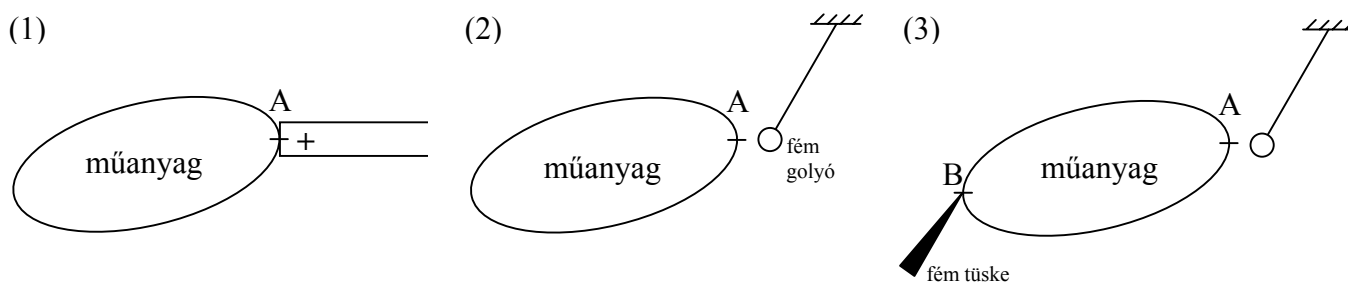
- a macska hátán végig húzzuk a műanyag fésűt, majd a macska fejéhez közelítjük, a macska szőre a fésűhöz közelít, majd hozzáérés után elpattan tőle.
- megdörzsölt fésűt papírszeletkének fölé tartjuk, odapattannak, majd rögtön le is pattannak róla.

Az elektromos töltés átvihető, ha a testek egymással érintkeznek.

### 4.)



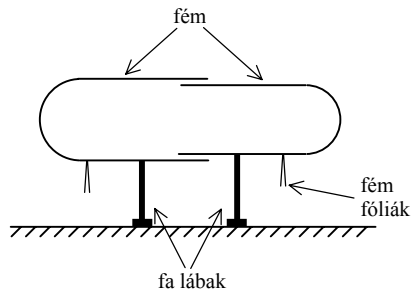
Az elektromosság a fém testben az (A) pontból a (B) pontba el tudott mozdulni, vagyis nagy utat képes megtenni, az ilyen testeket elektromos vezetőknél nevezünk.



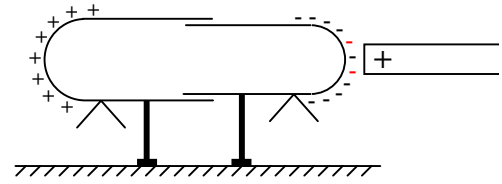
Ebben az esetben az elektromosság nem tud makroszkopikus távolságra elmozdulni, az ilyen anyagok a szigetelők.

5.)

(1/a)

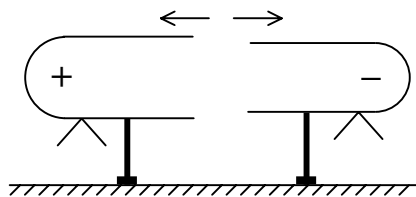


(1/b)

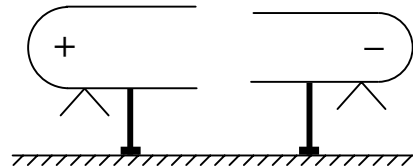


Az egybe tölt fém kapszulákhoz egy megdörzsölt üvegrudat közelítünk, ekkor azt tapasztaljuk, hogy a kezdetben (1/a) összetapadt fém fóliák szétállnak (1/b).

(2/a)



(2/b)



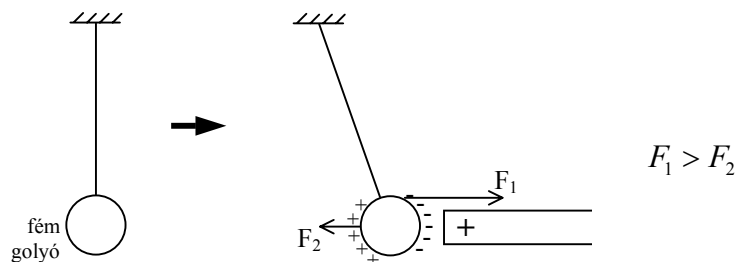
Még az üvegrúd jelenlétében kettéválasztjuk a kapszulákat, gumikesztyűs kézzel (2/a), majd az üvegrudat eltávolítjuk (2/b), ekkor azt tapasztaljuk, hogy a fóliák szétállva maradnak.

Magyarázat:

- (1): A fémtestben eleve vannak (+) és (-) töltések, de mindenütt ugyanannyi (+) van mint (-), ezért kifelé az elektromosságot nem lehet észlelni. A baloldali részen (+) töltés többlet jelent meg, a jobboldalin pedig (-) töltés felesleg alakult ki. A lefolyó töltések a fóliákra is jutnak és az azonos töltések miatt a fóliák szétugranak.
- (2): A szétvétel után két darab feltöltött testet kaptunk, a bal (+), a jobb (-). Ez a feltöltést csak vezetőkben idézhető elő, ez az elektromos megosztás, más szóval induktív hatás.

Az elektromos megosztással a vezető test monopólussá tehető (vagyis olyan testté, amelyben az egyik elektromosság túlsúlyban van a másikkal szemben). Ez a feltöltés a testek érintkezése nélkül valósul meg.

6.) Az elektromos erő a távolság növekedésével csökken.



### Alapfogalmak

1.) **Elektromos töltés:** az elektromos kölcsönhatásban való részvétel mértéke.

Helyezzük az elektromos mező ugyanabba a pontjába előbb az A, majd a B tömegpontot (ezek feltöltött testek), ha a B testre  $\lambda$ -szor nagyobb erő hat mint az A testre, akkor a B test töltésének abszolút értéke  $\lambda$ -szor nagyobb mint az A-é.

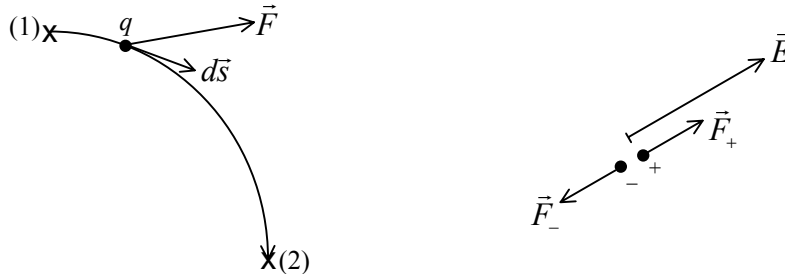
$$\frac{F_B}{F_A} \stackrel{def.}{=} \frac{|q_B|}{|q_A|}$$

2.) **Elektromos térerősség:** megmutatja az egységnyi töltésre ható erőt.

Vigyünk az elektromos mező egy P pontjába egy pontszerű testet, melynek töltése  $q$ , mérjük meg a reá ható elektromos erőt ( $\vec{F}$ ).

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}(P)}{q}$$

3.) **Elektromos feszültség:** megmutatja mennyi munkát végez az elektromos tér az egységnyi töltésen mialatt az  $\vec{12}$  pályán elmozdul.



$$W_{\vec{12}} = \int_{\vec{12}} \vec{F} d\vec{s} = q \int_{\vec{12}} \vec{E} d\vec{s}$$

$$U_{\vec{12}} = \frac{W_{\vec{12}}}{q} = \int_{\vec{12}} \vec{E} d\vec{s}$$

Az elektromos feszültség teljesen független a próbatest  $q$  töltésétől, csak attól függ, hogy az illető elektromos mezőben milyen vonalon történt az elmozdulás. Az elektromos feszültség tehát vonalon értelmezett mennyiség, általában attól is függ, hogy az 1, 2 végpontok között milyen alakú görbét veszünk fel.

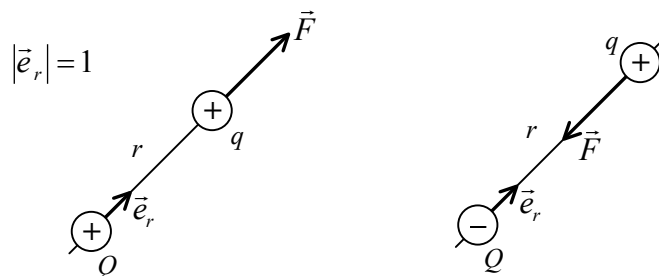
## ELEKTROSZTIKA

A tartós nyugalomban lévő töltések elektromos mezőjével foglalkozik.

### COULOMB - mező (1785)

CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB (1736-1806, francia fizikus)

Pontszerű töltés vákuumban centrális elektromos mezőt kelt, az erőcentrum maga az említett pontszerű töltés. E mezőben egy másik pontszerű töltésre ható erő egyenesen arányos mindkét töltéssel és fordított arányosságban áll a közöttük lévő távolság négyzetével.



$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{Coulomb-törvény,} \quad k : \text{Coulomb-állandó,} \quad F = k \frac{|Qq|}{r^2}$$

A  $k$  állandó értéke a töltésetalon megválasztásától függ.

Az SI rendszerben a töltés egysége: 1 coulomb (C). 1C a töltése annak a pontnak, amelynek vákuumbéli mezőjében egy másik, ugyanakkora töltésű, 1m távolságban lévő pontra  $9 \cdot 10^9 N$  erő hat (9 milliárd N).

$$Q = 1C$$

$$q = 1C$$

$$r = 1m$$

$$F = 9 \cdot 10^9 N$$

$$k = \frac{Fr^2}{Qq} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad \text{vákumban.}$$

Emlék: gravitációs mező  $q \leftrightarrow m, k \leftrightarrow -\gamma$  Coulomb mező

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r$$

$$V = -\gamma \frac{Mm}{r}$$

$$V = k \frac{Qq}{r} : \text{Coulomb-féle helyzeti energia}$$

$$(r \rightarrow \infty : V \rightarrow 0)$$

$$U = \frac{V}{m}$$

$$U = \frac{V}{q} \rightarrow U = k \frac{Q}{r} : \text{Coulomb-potenciál}$$

A gravitációs és a Coulomb-mező analógiájából látszik, hogy a Coulomb-mező is konzervatív.

Az elektrosztatikában a potenciált úgy értelmezzük, hogy ez a töltésegységre vonatkoztatott helyzeti energia.

$$\boxed{\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r} \quad \text{Coulomb-térerősség,} \quad [E] = 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}, \quad [U] = 1 \frac{J}{C} = 1 \text{ volt } (V)$$

### Az elektrosztatika I. alaptörvénye

**Ha a teret nem egyetlen ponttöltés, hanem ponttöltések sokasága kelti, akkor a szuperpozíciós axiómát alkalmazzuk. A térerősség az egyes ponttöltések keltette térerősségek vektori összege, a potenciál az egyes ponttöltésekhez tartozó potenciálok algebrai összege. Tetszőleges elektrosztatikai mező konzervatív mező.**

$$dV = -\vec{F} d\vec{s} \quad /:q$$

$$dU = -\vec{E} d\vec{s} \quad / \int$$

$$\int_{U_1}^{U_2} dU = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{s}$$

$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{s} = U_{\vec{r}_1 \vec{r}_2} \rightarrow \boxed{\oint \vec{E} d\vec{s} = 0} \quad : \text{ az I. alaptörvény integrális alakja}$$

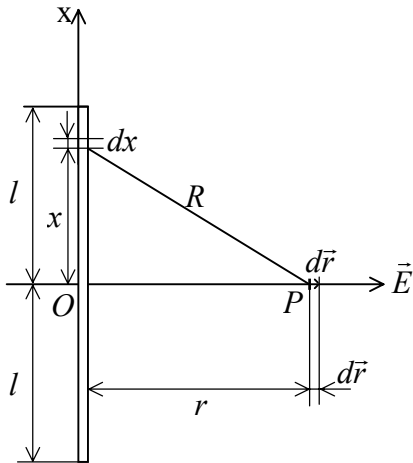
Az elektrosztatikában a feszültség úgy kapható, hogy a kezdőpont potenciáljából levonjuk a végpont potenciálját, zárt görbe esetén a kezdő- és végpont egybeesik, tehát a feszültség 0.

$$\vec{F} = -grad V \quad /:q$$

$$\boxed{\vec{E} = -grad U} \rightarrow \boxed{rot \vec{E} = \vec{0}} : \text{ az I. alaptörvény differenciális (lokális) alakjai}$$

Az első alaptörvény a sztatikus elektromos mező konzervativitását mondja ki.

**Egyenletesen feltöltött egyenes rúd vákuumbeli tere a középtengelye mentén**



$P$  : potenciálpont (ebben a pontban akarjuk tudni a potenciált)  
 $\lambda$  : hosszegységre jutó töltés

*Közvetlenül a Coulomb-törvényt SZIGORÚAN TILOS alkalmazni, mert a rúd NEM pontszerű test, DE feldarabolhatjuk pontszerű darabkákra!!!*

A kis töltéselem a  $P$  pontban:  $dU = k \frac{dQ}{R}$  potenciált kelt,  $dQ = \lambda dx$ ,  $R = \sqrt{x^2 + r^2}$  :

$$dU = k \frac{\lambda dx}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

A teljes rúd által keltett potenciál:  $U = k\lambda \int_{-l}^{+l} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k\lambda}{r} \int_{-l}^{+l} \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2}}$  .

Vezessük be a következő jelöléseket:  $\xi = \frac{x}{r} \rightarrow d\xi = \frac{dx}{r}$ , ekkor:

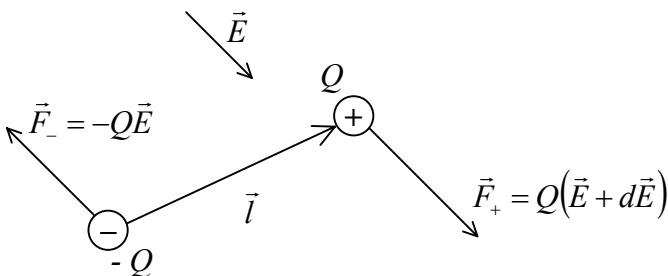
$$U = k\lambda \int_{-\frac{l}{r}}^{+\frac{l}{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = k\lambda [\text{arsh } \xi]_{-\frac{l}{r}}^{+\frac{l}{r}} = \underline{\underline{2k\lambda \text{ arsh } \frac{l}{r}}}$$

$$dU = -\vec{E}d\vec{r} = -E dr$$

$$\underline{\underline{E}} = -\frac{dU}{dr} = -2k\lambda \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}} \left(-\frac{l}{r^2}\right) = \underline{\underline{\frac{2k\lambda l}{r\sqrt{r^2 + l^2}}}}$$

**Az elektromos dipólus**

Az elektromos dipólus olyan alakzat, amely egy (+) és egy abszolút értékre ugyanakkora (-) töltésből áll.



A dipólust pontszerűnek nevezzük, ha  $\vec{l}$  abszolút értéke sokkal kisebb, mint a feladatban szereplő egyéb hosszúságok.

Megállapodás szerint a dipólus kezdőpontja a negatív töltés helye.

Dipólusnyomaték:  $\vec{p} = Q\vec{l}$ , ahol  $Q$  a dipólus (+) töltése,  $\vec{l}$  helyvektor.  $[p] = 1Cm$

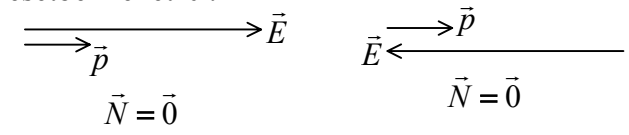
↳ ugyanolyan jellegű mennyiség, mint a sztatikai nyomaték.

**Forgatónyomaték homogén külső elektromos mezőben nyugvó pontszerű dipólusra**

Homogén mező: olyan tér, ahol a térerősségvektor a helytől független.

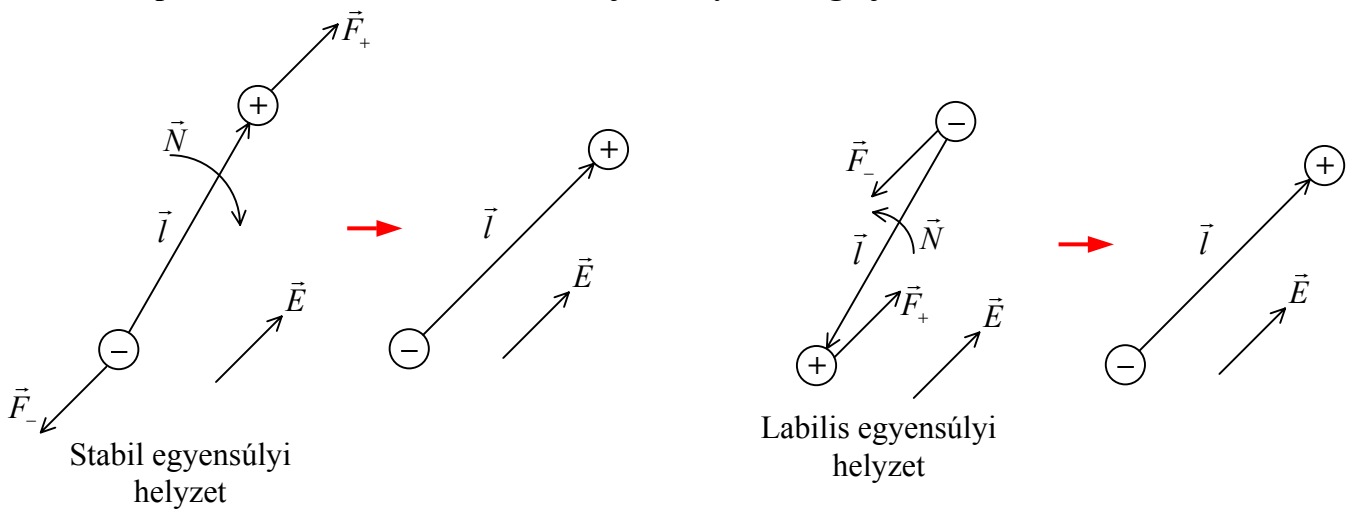
$$\underline{\underline{\vec{N}}} = \vec{l} \times Q(\vec{E} + d\vec{E}) = Q\vec{l} \times \vec{E} + \underbrace{Q\vec{l} \times d\vec{E}}_{\text{kicsiny}} \approx Q\vec{l} \times \vec{E} = \underline{\underline{\vec{p} \times \vec{E}}} \quad : \text{ forgatónyomaték (mechanikában: } M)$$

A forgatónyomaték két esetben lehet  $\vec{0}$  :



A homogén mezőben a dipólusra  $\vec{p} \times \vec{E}$  forgatónyomaték hat, függetlenül annak a pontnak a megválasztásától, amelyre a nyomatékot számítjuk.

A szabad dipólust a külső elektromos tér a saját irányába forgatja be.



Stabil egyensúlyi helyzetet csak akkor vesz fel a dipólus, ha momentuma egyirányú a térerősséggel.

**2.előadás**

**Apoláros és poláros molekula**

A molekula kifelé elektromosan semleges:  $\sum_{i=1}^m Q_i^+ = ne$

- $Q_i^+$  : az i-edik atommag töltése,
- $\vec{r}_i^+$  : az i-edik atommag helyvektora,
- $m$  : a molekulában lévő atommagok száma,
- $n$  : az elektronok száma a molekulában,
- $\vec{r}_i^-$  : az i-edik elektron helyvektora,
- $e$  : elemi töltés ( $1,6 \cdot 10^{-19} C$ ).

Töltésközéppont:

- a (+) töltések középpontjának helyvektora:  $\vec{r}^+ = \frac{\sum_{i=1}^m Q_i^+ \vec{r}_i^+}{\sum_{i=1}^m Q_i^+} = \frac{\sum_{i=1}^m Q_i^+}{ne} \vec{r}_i^+$ ,
- a (-) töltések középpontjának helyvektora:  $\vec{r}^- = \frac{-e \sum_{i=1}^n \vec{r}_i^-}{-en} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i^-$



a.) Ha a (+) és a (-) töltésközéppont külső elektromos mező híján egybeesik, a molekula apoláris, az ilyen molekulákból felépülő anyag pedig apoláris anyag.

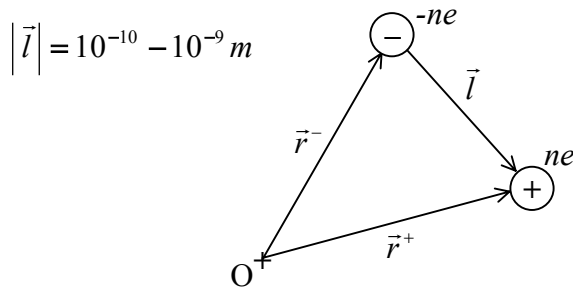
$$\vec{r}^+ = \vec{r}^- \quad \text{pl. a kétatomos gázok } O_2, H_2, \dots$$

b.) Ha külső elektromos mező híján sem esnek egybe a töltésközéppontok, a molekula poláros, az ilyen anyag poláros anyag.

$$\vec{r}^+ \neq \vec{r}^- \quad \text{pl. HCl, H}_2\text{O, CO}_2, \dots$$

A poláros molekulákat pontszerű elektromos dipólussal modellezhetjük.

A molekula összes (+) töltését gondolatban összpontosítjuk a (+) töltésközéppontba, a molekula összes (-) töltését pedig a (-) töltésközéppontba.

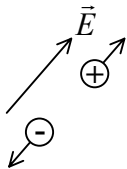


Külső elektromos mező híján a poláros anyag sem mutat elektromos hatást, mert az egyes molekula-dipólusok terei a teljes rendezetlenség miatt egymást kioltják.

### Elektromos polarizáció

Az a jelenség, amikor a **szigetelő** anyag külső elektromos mező hatása alá kerül.

a.) indukált polarizáció

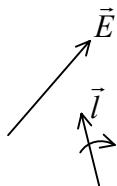


Tulajdonságai:

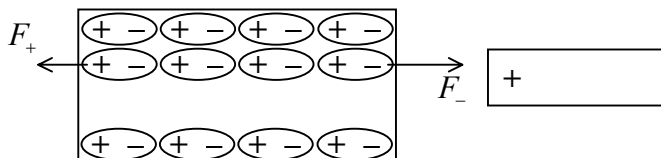
Mind az apoláros, mind a poláros anyagokra jellemző. A külső elektromos mező széthúzza a töltésközéppontokat. Az apoláros anyag számára az egyetlen polarizációs lehetőség, polárosnál csak másodlagos effektus.

- az elektromos mező erősödésével fokozódik
- a hőmérséklettől független

b.) rendeződési polarizáció

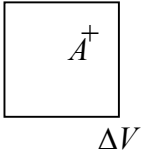


Kizárólag a poláros molekulájú szigetelőkre jöhet szóba, ott viszont ez a domináns effektus. A külső elektromos mező okozta forgatónyomaték többé-kevésbé befordítja a molekuláris dipólusokat a tér irányába. Az anyag ezután már mutat kifelé elektromos jelleget. Annál inkább sikerül a dipólusokat befordítani, minél erősebb a tér, annál kevésbé, minél nagyobb a hőmérséklet. Erősen hőmérsékletfüggő, a hőmérséklet növekedésével a polarizáció csökken.



A szigetelő 2 homloklapján (-) és (+) szabad töltéstöbblet jön létre.

## Elektromos polarizációvektor



$\Delta \vec{p} \rightarrow$  a térfogatcellában foglalt molekuladipólusok dipólnyomatékának a vektori összege

$$\vec{P}(A) = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ A \in \Delta V}} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} : \text{a polarizációvektor az } A \text{ pontban (pontbeli mennyiség, intenzitásparaméter)}$$

$$[P] = 1 \frac{Cm}{m^3} = 1 \frac{C}{m^2}$$

Míg a vákuumban létrejött elektromos mezőt egyetlen vektor ( $\vec{E}$ ) írja le, a kémiai anyagban megvalósuló elektromos mező leírásához már 2 vektor szükséges  $\vec{E}$ -n kívül például a  $\vec{P}$  polarizációvektor.

## Az elektromos indukcióvektor

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} : \text{a vákuum permittivitása}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{1}{[k]} = \frac{1}{\frac{Nm^2}{C^2}} = 1 \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$[\epsilon_0 E] = 1 \frac{C^2}{Nm^2} \cdot 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{C}{m^2} = [P]$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \text{ definíció} \quad [D] = 1 \frac{C}{m^2}$$

$\vec{D}$  bevezetését az indokolja, hogy vele az elektromágnesség alaptörvényei egyszerűbb alakban írhatók fel.

## A lineáris elektromos anyagegyenlet

Nem minden anyagra, és csak közelítőleg érvényes.

$$\boxed{\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}} \text{ első közelítés, } \kappa : \text{elektromos szuszceptibilitás (dimenziótlan)}$$

$$\kappa = 0 \quad \text{vákuum, vezető}$$

$$\kappa > 0 \quad \text{minden szigetelőre (dielektrikum)}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial T} = 0 \quad \text{apoláros anyagokra}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial T} < 0 \quad \text{poláros anyagokra}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \kappa \epsilon_0 \vec{E} = (\kappa + 1) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

$$\kappa + 1 = \overset{jel.}{\epsilon'} : \text{relatív permittivitás}$$

$$\epsilon_0 \overset{jel.}{\epsilon'} = \epsilon : \text{abszolút permittivitás}$$

Ha az anyagban  $\epsilon$  helyről-helyre állandó, akkor az anyagot homogénnek nevezzük.

## Olyan esetek, amikor a felírt lineáris anyagegyenlet nem igaz:

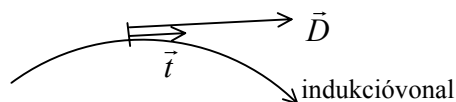
- 1.) Amíg jó a kondenzátor, sem az egyen-, sem a váltóáram nem megy át rajta. Átütési szilárdság az a térerősség, amelynél a szigetelőanyag vezetővé válik. Az átütési szilárdságon túl a polarizáció 0-ra esik, tehát az anyag nem követi a lineáris anyagegyenletet.
- 2.) Anizotrop (irányfüggő) szigetelő: anizotrop anyagokban a polarizációvektor és a térerősségvektor nem egyirányúak, így a permittivitás nem lehet skalár.
- 3.) ELEKTRETT-ek: Például ha olvadt gyantát elektromos mezőbe helyezünk, és megvárjuk, hogy ott megszilárduljon, a mezőből kivéve megőrzi polaritását.  $\vec{E} = \vec{0}$  de  $\vec{P} \neq \vec{0}$ , így a lineáris anyagegyenlet nem igaz.

## Az elektromos fluxus

A fluxus irányított felületre vonatkozik, és vektormezőben van értelmezve. Az illető vektornak a mondott felületre vett integrálját jelenti.

$$\boxed{\Psi_A = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}$$
 : az A-ra vett elektromos fluxus (definíció)  $[\Psi] = 1 \frac{C}{m^2} \cdot m^2 = 1C$

Az indukcióvonalak az elektromos mező szemléltetésére szolgálnak, ezek irányított vonalak, amelyek érintő egységvektora megadja az érintési pontban uralkodó indukció irányát.



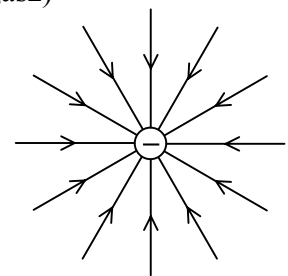
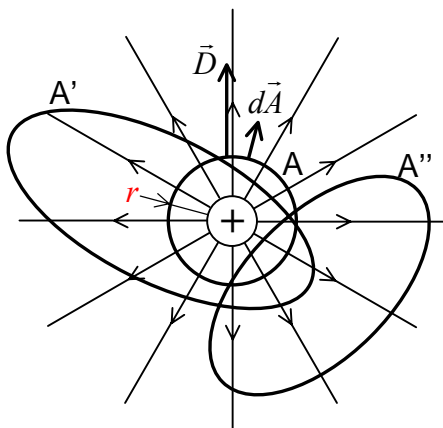
Megállapodás szerint az indukcióvonalakat olyan sűrűn vesszük fel, hogy a rájuk merőleges egységnyi felületen éppen  $D$  számú indukcióvonal menjen át (vagyis annyi, amennyi ott az indukció számértéke).

A fluxus szemléletes jelentése: **Megadja az illető felületet átbökö indukcióvonalak előjeles számát (ha a vonalak a felület irányításának megfelelően döfik át a felületet, akkor (+) előjelűnek vesszük, ha azzal ellentétesen, akkor (-) -nak).**

## Gauss törvénye (az elektrosztatika II. alaptörvénye)

KARL FRIDRICH GAUSS (1777-1855, német matematikus, fizikus és csillagász)

Ponttöltés vákuumban:



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad / \quad |\vec{D}| \text{ az } A \text{ felületen csökönnyösen állandó: } D$$

$$\Psi_A = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint_A D dA = D \underbrace{\oint_A dA}_{4\pi r^2} = Q$$

A rugbylabdaszerű felületre ( $A'$ -re) a fluxus ugyanakkora, mint a gömbre, hiszen minden indukcióvonal, ami átböki a gömb felületét, átböki a rugbylabdaszerű felületet is és viszont. Az  $A''$  felületre viszont a fluxus 0, mert minden indukcióvonal, ami a felületbe belép, az ki is lép onnan.

**Tetszőleges vákuumbeli töltéselrendezés esetén a szuperpozíció elvéből következik, hogy (épp úgy mint egyetlen ponttöltés esetén) a fluxus a zárt felületben foglalt töltéssel egyenlő.**

Tapasztalat szerint az összefüggés akkor is érvényes ha az elektromos mező nem vákuumban, hanem tetszőleges kémiai anyagban valósul meg.

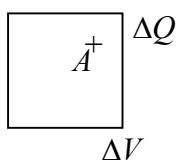
$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_V \quad : \text{ Gauss-törvény (integrális alak)}$$

**Rögzített zárt felületre az elektromos fluxus egyenlő a felület határolta térfogati tartományban foglalt össztöltéssel.**

Gauss törvénye az elektrosztatika II. alaptörvénye, az elektromos mező forrástörvénye.

A sztatikai elektromos tér indukcióvonalai a (+) töltéseken erednek, és a (-) töltéseken érnek véget.

**Vizsgáljuk a térbeli töltéseloszlás esetét:**



$$\rho = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ A \in \Delta V}} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad : \text{ térfogati töltéssűrűség, } [\rho] = 1 \frac{C}{m^3}$$

$$Q_V = \int_V \rho dV$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$$

$$/ \text{ G.-O. -tétel: } \oint_A \vec{w} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{w} dV$$

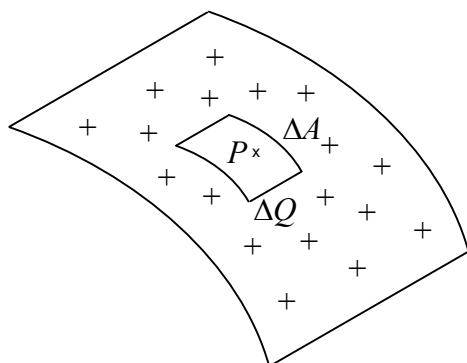
$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV$$

/ ez bármely  $V$  térfogatra fennáll, az integrandusoknak meg kell egyezniük:

$$\boxed{\text{div} \vec{D} = \rho} \quad : \text{ Gauss törvénye (lokális alak)}$$

Ez Descartes-koordinátákban:  $\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$

### Felületen eloszló töltés



$\Delta Q$  a  $\Delta A$  felületdarabkán ülő töltés.

$$\sigma(P) = \lim_{\substack{\Delta A \rightarrow 0 \\ P \in \Delta A}} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad : \text{ felületi töltéssűrűség a } P \text{ pontban,}$$

$$[\sigma] = 1 \frac{C}{m^2}$$

## Az elektrosztatika alaptörvényei:

I.	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ $\vec{E} = -\text{grad} U$
II.	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_v$	$\text{div} \vec{D} = \rho$

Ha az elektromos mező kémiai anyagban jelenik meg, akkor anyagegyenlet használata nélkül az elektrosztatikai egyenletrendszer nem teljes.

### A Poisson-egyenlet

SIMEON DENIS POISSON (1781-1840, francia fizikus, matematikus)

Feltesszük, hogy az anyag követi a lineáris anyagegyenletet és homogén.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\text{div} \vec{D} = \nabla(\varepsilon \vec{E}) = \underbrace{\nabla \varepsilon \cdot \vec{E}}_{\vec{0}} + \varepsilon \nabla \vec{E} = \varepsilon \nabla \vec{E} = \varepsilon \nabla(-\nabla U) = -\varepsilon \nabla^2 U$$

$$\boxed{\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon}} : \text{Poisson-egyenlet}$$

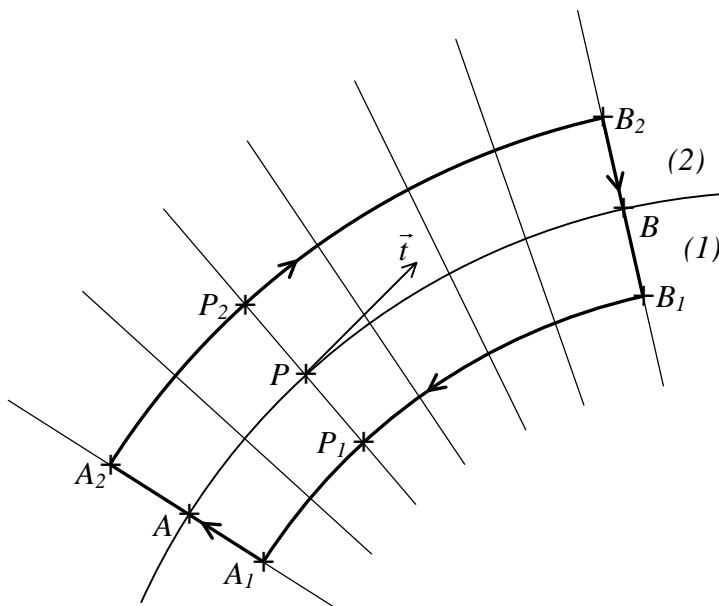
Poisson egyenlete lehetővé teszi, hogy a töltéeloszlás (vagyis  $\rho(\vec{r})$ ) ismeretében kiszámítsuk a potenciáeloszlást.

Descartes-koordinátákkal: 
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

Ez másodrendű lineáris, parciális differenciálegyenlet, megoldásához még a peremfeltételeket is ismerni kell, például azt, hogy 2 különböző felületen milyen a potenciáeloszlás.

A potenciál ismeretében, deriválással ( $\vec{E} = -\text{grad} U$ ) kiszámíthatjuk a térerősséget.

### Peremfeltétel az elektromos térerősségre



Vegyünk fel a két közeg határfelületén egy  $\overline{AB}$  görbeívet. Az  $\overline{AB}$  görbe minden pontjában rajzoljuk meg a határfelületi normálisokat. Ezek az egyenesek egy vonalfelületet alkotnak, ezt lehatároljuk az (1) közegben húzódó  $\overline{A_1B_1}$  és a (2)-ben húzódó  $\overline{A_2B_2}$  ívvel.

$P$  a görbe tetszőleges pontja.

Az elektrosztatika I. alaptörvényét  $A_1A_2B_2B_1A_1$  zárt görbére alkalmazzuk (az ábrán a megvastagított görbe):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\int_{A_1A_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{A_2B_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{B_2B_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{B_1A_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$P_2, P_1 \rightarrow P$ :  $\int_{A_1A_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0$   $\int_{A_2B_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow \int_{AB} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}$ ,  $\vec{E}_2$ : a térerősség a határfelületen, de már a 2-es közegben

$\int_{B_2B_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0$   $\int_{B_1A_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow \int_{BA} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = -\int_{AB} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}$ ,  $\vec{E}_1$ : a térerősség a határfelületen, de még az 1-es közegben

$$\int_{AB} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} - \int_{AB} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = 0 \quad / \quad d\vec{s} = \vec{t} ds$$

$$\int_{AB} \underbrace{\vec{E}_2 \cdot \vec{t}}_{E_{2t}} ds - \int_{AB} \underbrace{\vec{E}_1 \cdot \vec{t}}_{E_{1t}} ds = 0 \quad E_{2t}, E_{1t}: \text{a térerősségvektorok tangenciális koordinátái}$$

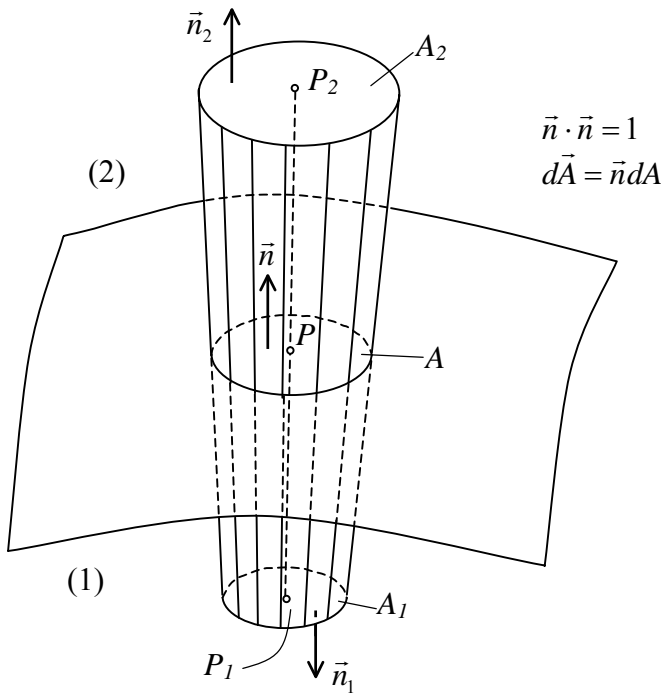
$\int_{AB} (E_{2t} - E_{1t}) ds = 0 \rightarrow$  mivel ez bármely, a határfelületen felvett görbére igaz, az integrandusnak el kell tűnnie.

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

**Két közeg határán az elektromos térerősség tangenciális koordinátája ugrást nem szenved.**

### 3. előadás

#### Peremfeltétel az elektromos indukcióvektorra



A határfelületben kijelölünk egy  $A$  felületdarabot, ennek tetszőleges pontja  $P$ .  $A$ -nak minden pontjában felvesszük a felületi normális. Az  $A$  felület peremgörbéje menti normálisok alkotta vonalfelületet lezárjuk az (1) közegben felvett  $A_1$ , illetve a (2)-ben felvett  $A_2$  „sapkával”. A kapott zárt felületre Gauss törvénye:

$$\oint_{AU_1U_2} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_V,$$

itt  $V$  az a térfogati tartomány, amit a zárt cső határol, ebben a csőben töltés lehet: térfogaton eloszló töltés, továbbá, a két közeg határán, felületen eloszló töltés is.

$$\int_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int_{A_p} \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV + \int_A \sigma dA$$

$P_1, P_2 \rightarrow P$  : azaz az  $A_1$  és  $A_2$  sapkák tartanak  $A$ -hoz:

$$\int_{A_p} \vec{D} \cdot d\vec{A} \rightarrow 0 \text{ és } \int_V \rho dV \rightarrow 0, \int_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{D} \cdot \vec{n}_1 dA \rightarrow \int_A \vec{D}_1 \cdot (-\vec{n}) dA, \int_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{A} \rightarrow \int_A \vec{D}_2 \cdot \vec{n} dA$$

$\vec{D}_1$  : az elektromos indukció a két közeg határán, de még az egyes közegben,

$\vec{D}_2$  : az elektromos indukció a két közeg határán, de már a kettes közegben.

$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = D_{1n}$  : az elektromos indukció normális koordinátája a határon, az egyes közegben

$\vec{D}_2 \cdot \vec{n} = D_{2n}$  : az elektromos indukció normális koordinátája a határon, a kettes közegben

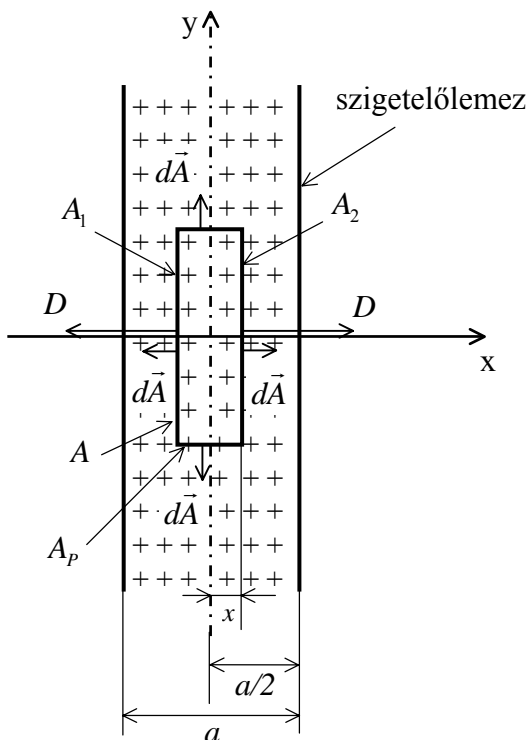
A határátmenet a jobb oldali második integrált nem érinti, így a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_A (D_{2n} - D_{1n}) dA = \int_A \sigma dA : \text{ez az egyenlőség a határfelületen felvett bármely } A \text{ felületdarabra igaz, ami csak úgy lehet, ha az integrandusok megegyeznek:}$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma} : \text{peremfeltétel az elektromos indukcióvektorra}$$

**Az elektromos indukció normális koordinátája töltéssel borított határfelületen ugrást szenved, a függvény tehát nem folytonos.**

### Egyenletesen feltöltött végtelen sík szigetelőlemez tere



Az  $yz$  sík az elrendezés szimmetriasíkja, minden fizikai mennyiségnek erre a síkra tükörszimmetrikusnak kell lennie.

Az  $A_1, A_p, A_2$  felületekkel határolt 'cipőasztás dobozra' alkalmazzuk Gauss törvényét:

$$a.) \quad |x| < \frac{a}{2} \quad \int_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int_{A_p} \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \frac{2xA}{V} \rho$$

$$\int_{A_1} D dA + \int_{A_2} D dA = 2xA\rho$$

mivel az  $y$  és  $z$  irányban a méretek végtelenek, a fizikai mennyiségek kizárólag csak az  $x$ -től függhetnek.

$$DA + DA = 2xA\rho$$

$/ : A$

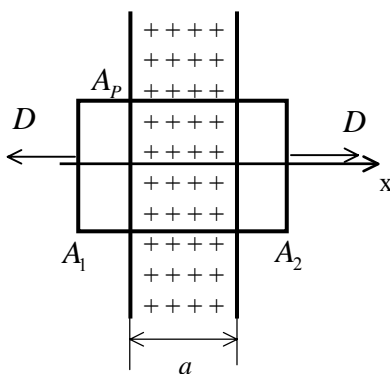
$$D = \rho x$$

$/ \varepsilon = \varepsilon_0 \underset{>1}{\xi}' > \varepsilon_0$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\rho}{\varepsilon} x : \text{így változik az elektromos térerő a lemezben}$$

b.)  $|x| > \frac{a}{2}$

Nagy különbség, hogy míg az (a) esetben a doboz szélesítésével több lesz a bezárt töltés, addig a (b) esetben a további szélesítés már nem növeli a bezárt töltés mennyiségét.

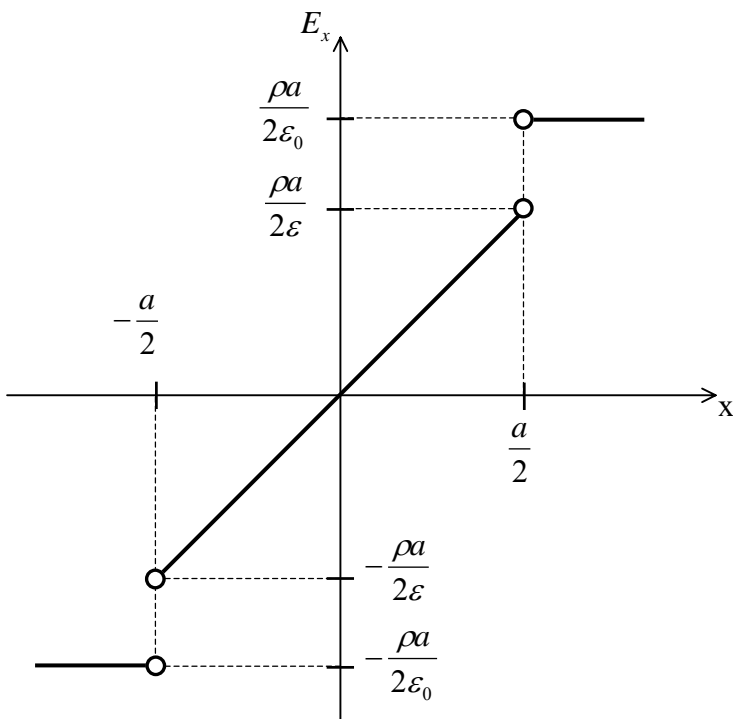


$$2DA = Aa\rho$$

$$D = \frac{\rho a}{2}$$

$\rightarrow$  const. : az elektromos mező a lemezen kívül (külön a jobb oldali és külön a bal oldali tér) homogén.

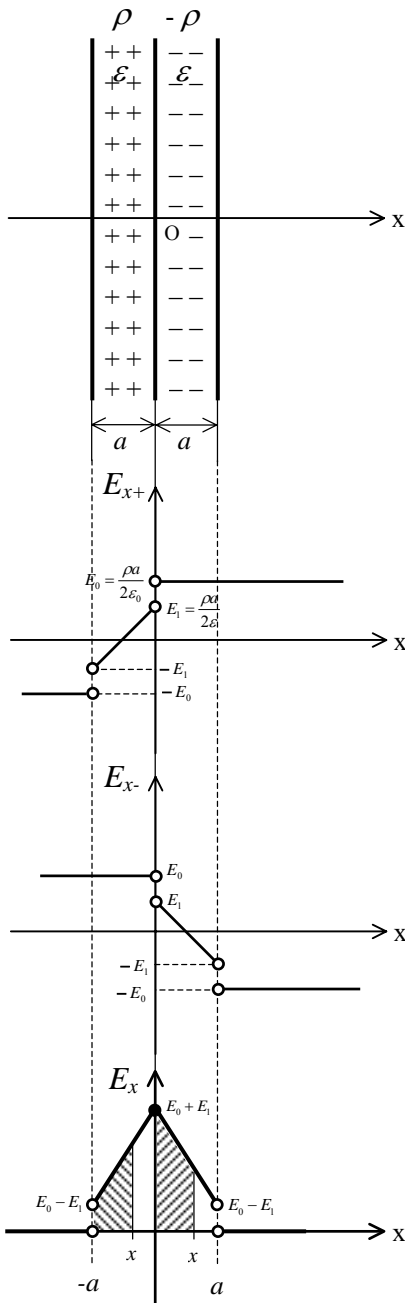
$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$$



A 2. peremfeltételből következik, hogy  $\vec{E}$  normális összetevője ugrik a határon, noha felületen koncentrált töltés nincs.



## Kettős töltött lemez tere



A feladatot a szuperpozíció elvével oldjuk meg, az egyes lemezek keltette tereket vektorosan összeadjuk.

Meghatározzuk hogyan változik  $x$  függvényében a potenciál, megállapodás szerint a  $-\infty$ -ben a potenciál 0.

$$E_x = -\frac{dU}{dx} \rightarrow \int_{-\infty}^{U(x)} dU = -\int_{-\infty}^x E_x dx'$$

$$U(x) = -\int_{-\infty}^x E_x(x') dx' = -\int_{-a}^x E_x(x') dx'$$

$$(-a, 0] : E_x = \frac{\rho}{\epsilon} x + E_0 + E_1$$

$$[0, a) : E_x = -\frac{\rho}{\epsilon} x + E_0 + E_1$$

$$(-\infty, -a) : U = 0$$

$$(-a, 0) : U = -\frac{1}{2} \left( E_0 - E_1 + \frac{\rho}{\epsilon} x + E_0 + E_1 \right) [x - (-a)] =$$

$$= - \left( E_0 + \frac{\rho}{2\epsilon} x \right) (x + a) = - \left( \frac{\rho a}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{2\epsilon} x \right) (x + a) =$$

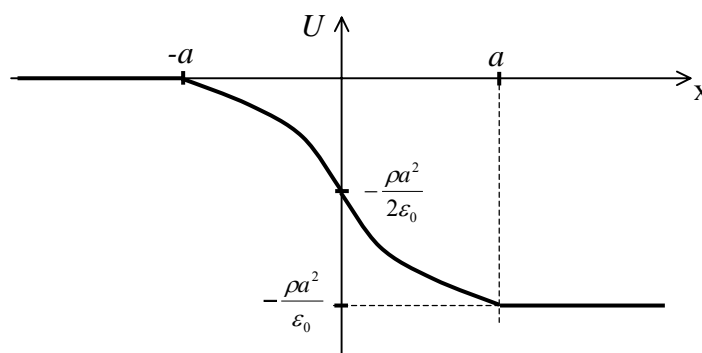
$$= -\frac{\rho}{2} \left[ \frac{x^2}{\epsilon} + xa \left( \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon} \right) + \frac{a^2}{\epsilon_0} \right]$$

$$x = 0 : U(0) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$$

$$(0, a) : U(x) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} - \int_0^x E_x(x') dx' = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} - \frac{1}{2} \left( E_0 + E_1 - \frac{\rho}{\epsilon} x + E_0 + E_1 \right) x =$$

$$= -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} - \left[ \frac{\rho a}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon_0} \right) - \frac{\rho}{2\epsilon} x \right] x = -\frac{\rho}{2} \left[ \frac{a^2}{\epsilon_0} + a \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon_0} \right) x - \frac{x^2}{\epsilon} \right] \rightarrow U(a) = -\frac{\rho a^2}{\epsilon_0}$$

$$(a, \infty) : U = -\frac{\rho a^2}{\epsilon_0}$$



**Vezetők az elektrosztatikában**

Ha a vezető belsejében a térerősség 0-tól eltérő volna, akkor a szabad töltéshordozókra erő hatna, s emiatt rendezett mozgást végeznének, vagyis az állapot nem volna sztatikus.

1.) A vezetőben:  $\vec{E} = \vec{0}$

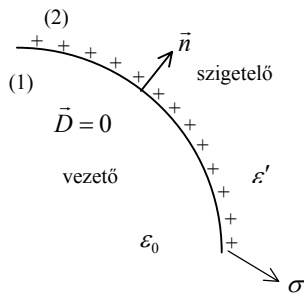
$$U_{12} = \int_{12} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ az } 12 \text{ vonal a vezető belsejében húzódik.}$$

2.) A vezető tetszőleges két pontja között 0 a feszültség.

3.) A vezető belsejében töltés nem lehet.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} = \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = 0, \text{ a vezetőre vitt töltés annak felületén oszlik el.}$$

4.)



$E_{2t} = E_{1t} \rightarrow \vec{E}_2$  normális irányú: A szigetelőben, a vezető határán a térerősség merőleges a határfelületre.

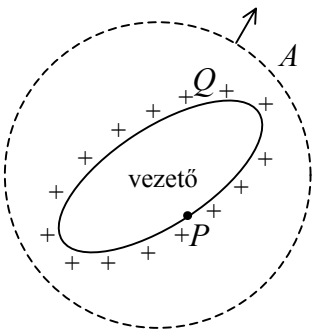
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\boxed{E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon'}}$$

: a szigetelőben, a vezető határán a térerősség dielektrikum alkalmazása esetén  $\epsilon'$ -ször kisebb, mint vákuum esetén.

**Magányos vezető kapacitása**

Feltesszük, hogy az a szigetelőanyag, amelybe a vezető anyag be van ágyazva, követi a lineáris anyag-egyenletet.



$$U = \int_{(P\infty)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1), \quad \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q \rightarrow \lambda Q \Rightarrow \vec{D} \rightarrow \lambda \vec{D} \Rightarrow \vec{E} \rightarrow \lambda \vec{E} \Rightarrow U \rightarrow \lambda U$$

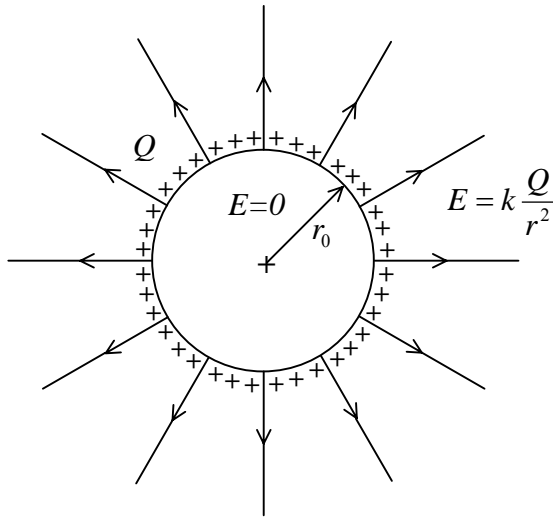
$$U = U_p \text{ a vezető potenciálja}$$

Növeljük a vezető töltését a  $\lambda$ -szorosára, Gauss-törvényéből következik, hogy az elektromos indukció is a  $\lambda$ -szorosára növekszik. Ha igaz a lineáris anyagegyenlet, akkor  $\vec{E}$  is a  $\lambda$ -szorosára nő, de akkor (1) szerint  $U$  is a  $\lambda$ -szorosára nő. Tehát a vezetőre felhordott töltés egyenesen arányos a vezető potenciáljával.

$$C = \frac{Q}{U} \quad : \text{ a vezető kapacitása (állandó)}$$

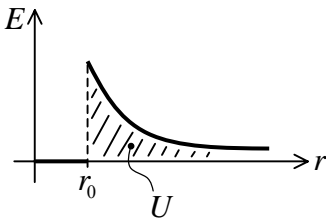
A kapacitás függ a vezető test alakjától, méretétől és a beágyazó szigetelőanyag milyenségétől (de  $C$  nem függ  $Q$ -tól és  $U$ -tól!!!).

**Vákuumban elhelyezett vezető gömb kapacitása**



$$U = kQ \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = k \frac{Q}{r_0}$$

A gömbön kívül a tér teljesen olyan, mintha egy a gömb középpontjába rakott ponttöltés keltette volna.



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{k \frac{Q}{r_0}} = \frac{r_0}{k}$$

$$[C] = 1 \frac{C}{V} = 1 \text{ farad} = 1F$$

$$C = 1F, \text{ ha } r_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ m} = 9 \text{ millió km}$$

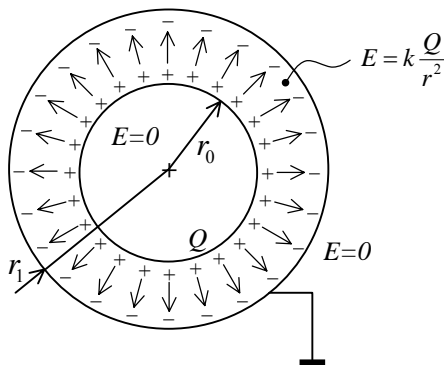
A magányos vezetők kapacitása roppant csekély.

**Kondenzátor**

A kapacitás megnövelésének két lehetősége van:

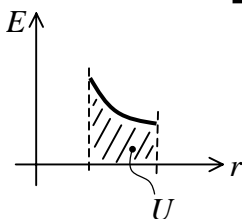
- a.) Az elektromos indukcióvonalak lerövidítése.

A két fémtest között a mező olyan, mintha egy gömb a középpontba helyezett  $Q$  töltés keltette volna.



$$U = kQ \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = kQ \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{kQ \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)} = \frac{r_0}{k \left( 1 - \frac{r_0}{r_1} \right)}$$



Nagy kapacitást, akkor érhetünk el, ha a két gömb között kicsi a hézag.

Például ha  $\frac{r_0}{r_1} = 0,999 \rightarrow C = \frac{r_0}{k} \cdot 1000$ .

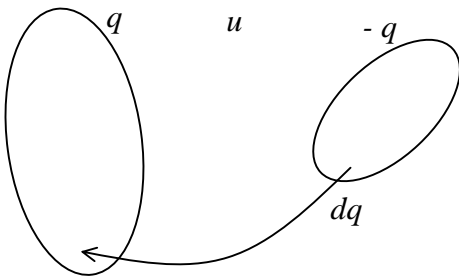
b.) A két fémtest között nem vákuum, hanem valami szigetelőanyag van, ez polarizálódik, és a térerősség az  $\epsilon'$ -ed részére esik vissza, ezzel együtt a feszültség is  $\epsilon'$ -ed részére csökken, minek következtében a kapacitás  $\epsilon'$ -szörösére nő.

**Kondenzátor:** az az elrendezés, amely két vezető testből és az őket elválasztó szigetelőanyagból áll. A vezetőket fegyverzeteknek (armatúráknak), a szigetelőanyagot pedig dielektrikumnak nevezzük.

Kikötjük, hogy a (+) fegyverzetből kiinduló indukcióvonalak mind a (-) fegyverzeten érjenek véget és viszont. Más szóval ez azt jelenti, hogy a két fegyverzet töltése ellentettlen egyenlő.

### Kondenzátorok energiája

A feltöltés egy közbülső pillanata:



Mennyi  $dW$  munkát kell végeznünk a  $dq$  töltéscsomag átszállításakor?

$$dW = udq$$

$$dW = udq = \frac{q}{C} dq$$

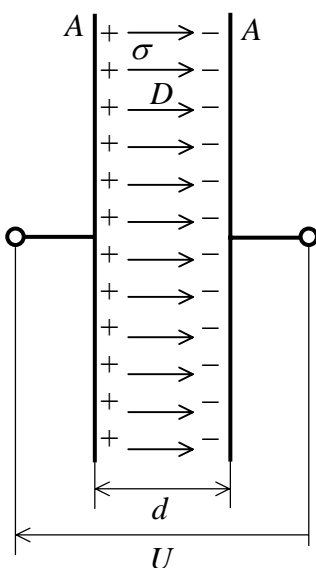
Az eredetileg töltetlen kondenzátort  $Q$  töltéssel látjuk el, az ekkor végzett munka:

$$\underline{W} = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \underline{\underline{\frac{Q^2}{2C}}}$$

Ha a feltöltéshez ennyi munkát kellett végeznünk, az energia megmaradás elve alapján, ennyi elektromos energiának kellett felhalmozódnia. Az energiakifejezés további alakjai:

$$\underline{W} = \frac{1}{2} Q \frac{CU}{C} = \underline{\underline{\frac{1}{2} QU}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} CU^2}}$$

### Síkkondenzátor



A fegyverzetek síklemezek, a lemezek hosszmeretei sokkal nagyobbak, mint a közöttük lévő  $d$  távolság.

$$D = \sigma \rightarrow Q = \sigma A = DA$$

$$U = Ed$$

$$\underline{W} = \frac{1}{2} QU = \underline{\underline{\frac{1}{2} DAE d}}$$

Az energiasűrűség: 
$$w = \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2} DAE d}{Ad} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \vec{D} \vec{E}}}$$

A most kapott energiasűrűség kifejezés általános érvényű, tetszőleges elektromos mezőben érvényes.

$$D = \epsilon E$$

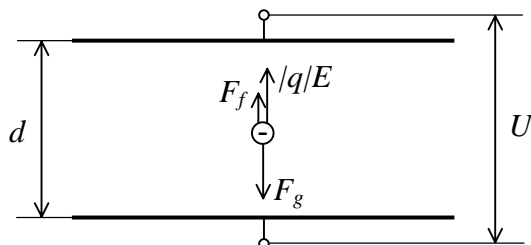
$$\underline{C} = \frac{Q}{U} = \frac{DA}{Ed} = \frac{\epsilon EA}{Ed} = \underline{\underline{\frac{\epsilon A}{d}}}$$
 : ez kizárólag a síkkondenzátor kapacitásának kiszámítására alkalmazható.

A Millikan-kísérlet (1910)

ROBERT ANDREWS MILLIKAN (1868-1953, amerikai Nobel-díjas (1923) fizikus)

Egy kondenzátor két lemeze közzé olajat porlasztunk, melyből apró feltöltött cseppek lesznek, kiválasztunk egy ilyen cseppet, és mikroszkóppal nyomon követjük a mozgását. Nem hagyjuk, hogy a részecske szabadon essen, ha megfelelően választjuk a feszültséget, elérhető, hogy a részecske megálljon.

a.)



$F_g$  : gravitációs erő

$F_f$  : felhajtóerő

$$E = \frac{U}{d}$$

Alkalmos polaritású és alkalmas feszültségű elektromos mezővel a töltött részecske megállítható és lebegésre kényszeríthető.

Amikor a cseppecske lebeg:  $F_g - F_f = |q| \frac{U}{d}$  /  $F_g = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_o g$ ,  $F_f = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho g$

$$(1) \quad \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_o - \rho) g = |q| \frac{U}{d} \quad \frac{p}{\rho} = R_* T$$

Ahol: -  $r$  az olajcsepp sugara,

-  $\rho_o$  az olaj sűrűsége,

-  $p$  a légnyomás,

-  $R_*$  a levegő fajlagos gázállandója.

-  $q$  a kis olajcsepp töltése,

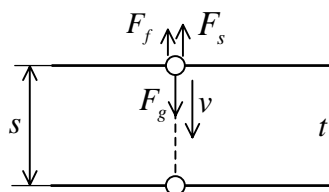
-  $\rho$  a levegő sűrűsége,

-  $T$  a levegő hőmérséklete,

Az  $r$  sugarat nem tudjuk megmérni. Mérjük azonban a következő mennyiségeket:  $\rho_o$ ,  $d$ ,  $U$ ,  $p$ ,  $T$ .

Két ismeretlen marad:  $r$  és  $q$ .

b.) Lekapcsoljuk a kondenzátorról a feszültséget. Rövid időn belül beáll az egyenletes süllyedés, mert a gravitációs és felhajtóerő eredőjét a légsúrlódási erő kiegyenlíti. Ekkor megmérjük a csepp sebességét, a mikroszkópban lévő vízszintes jelzések segítségével.



$t$  a két vízszintes jelzés közötti út befutásának ideje.  $v = \frac{s}{t}$ ,  $s$ -t és  $t$ -t mérjük.

Stokes-formula:  $F_s = 6\pi\mu r v$ , ahol  $\mu$  a levegő viszkozitási (belső súrlódási) együtthatója (mérjük).

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_o - \rho) g = 6\pi\mu r v \rightarrow \text{ebből kiszámítjuk } r\text{-t, és az (1)-esbe behelyettesítve a cseppecske töltése kiszámítható.}$$

A mérési tapasztalat (nagyon sok töltött cseppecske megfigyeléséből):

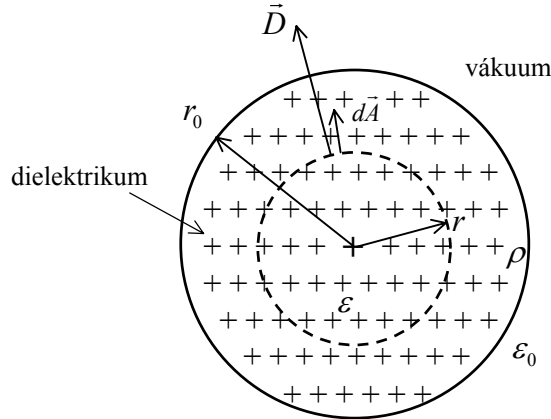
a mért töltés nagy pontossággal kis egész számú többszöröse az  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  töltésmennyiségnek,

$$\text{vagyis } q = ne, \quad \text{ahol } n \text{ kis egész szám.}$$

Az  $e$  nem az elektronra utal, hanem az elementum (elemi) latin szó kezdőbetűje. A természetben csak  $e$  egész számú többszöröseit észleljük.

**Egyenletesen feltöltött szigetelögömb elektromos energiája**

Mekkora energia halmozódik fel a térben?



$$r < r_0 : \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_V$$

$$\oint_A D dA = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$$

$$D \underbrace{\oint_A dA}_{4\pi r^2} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \quad / : 4\pi r^2$$

$$D = \frac{\rho r}{3} \rightarrow \text{egyenes arányosság}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon}$$

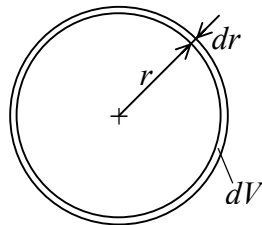
$$r > r_0 : 4\pi r^2 D = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho$$

$$D = \frac{r_0^3 \rho}{3r^2} \rightarrow \text{négyzetes fordított arány}$$

$$E = \frac{r_0^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$$

A szigetelő és a vákuum határán a térerősség ugrásszerűen megnő.

$$r < r_0 : w = \frac{1}{2} DE = \frac{\rho^2 r^2}{18\epsilon}$$



$$r > r_0 : w = \frac{1}{2} DE = \frac{r_0^6 \rho^2}{18\epsilon_0 r^4}$$

$$dV = 4\pi r^2 dr \rightarrow \text{a vékony gömbhéj térfogata}$$

$$r < r_0 : dW = \frac{\rho^2 r^2}{18\epsilon} \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\underline{\underline{W_b}} = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon} \int_0^{r_0} r^4 dr = \underline{\underline{\frac{2\pi\rho^2}{45\epsilon} r_0^5}}$$

↳ a szigetelögömbben lévő energia

$$r > r_0 : dW = \frac{r_0^6 \rho^2}{18\epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\underline{\underline{W_k}} = \frac{2\pi\rho^2 r_0^6}{9\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \underline{\underline{\frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} r_0^5}}$$

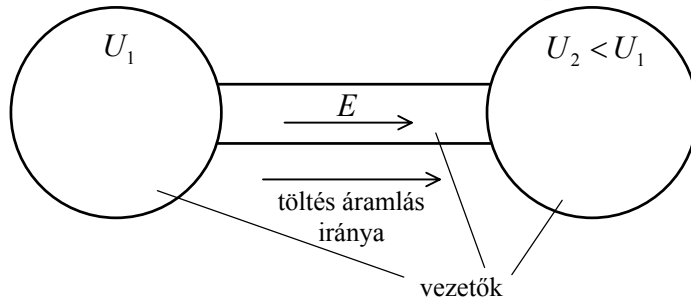
↳ a vákuumban tárolt energia

A teljes energia:  $W_e = W_b + W_k$

$$\frac{W_k}{W_b} = \frac{45\epsilon_0 \epsilon'}{9\epsilon_0} = 5\epsilon' > 5 \rightarrow \text{a vákuumban több mint ötször akkora energia van, mint a gömbben.}$$

## AZ ELEKTROMOS ÁRAMLÁS

A fém vezető, mert a szabad elektronok makroszkopikusan elmozdulhatnak. Külső elektromos mező híján azonban mozgásuk teljesen rendezetlen. A sztatikai állapot dinamikus egyensúlyt jelent.



Az elektromos mező rendezett mozgást vált ki, a (+) töltéshordozók  $\vec{E}$  irányában, a (-) töltéshordozók  $\vec{E}$  irányával szemben mozognak rendezetten (ha szabadok).

Definíció: Az elektromos áramlás a szabad töltéshordozók rendezett mozgása.

**Az elektromos áramlás feltételei:**

1. vezető jelenléte,
2. elektromos vagy idegen mező jelenléte.

Megállapodás szerint a **technikai áramirány** a (+) töltéshordozók (valóságos vagy elképzelt) rendezett mozgásának iránya.

Az áramlás nem áll le, amíg a két fémtest potenciálja ki nem egyenlítődik.

Ami áramlik: az elektromos töltés (extenzív mennyiség),  
ami kiegyenlítődik: az elektromos potenciál (intenzív mennyiség).

### A töltésmegmaradás törvénye

A tapasztalat szerint a tömeghez hasonlóan az elektromos töltés is megmaradó mennyiség, vagyis nem keletkezik, és nem is tűnik el.

**Egy rögzített térfogati tartományban a töltés csak egy okból változhat meg: a tartomány zárt  $A$  határfelületén töltés áramlik át.**

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_A \vec{J} d\vec{A}} \quad \text{integrális alak}$$

Ahol: -  $\rho$  a térfogati töltéssűrűség, -  $\vec{J}$  az elektromos áramsűrűség,  
-  $V$  rögzített térfogati tartomány, -  $A$  a térfogati tartomány (zárt) határfelülete.

Formailag a töltésmegmaradás egyenlete úgy fest, mint a hidrodinamikai kontinuitási egyenlet. A bal oldal a térfogati tartományban foglalt töltés időegység alatti megváltozását fejezi ki, a jobb oldali kifejezés megmutatja, hogy a tartomány határfelületén mennyi töltés áramlott be időegység alatt.

A  $\vec{J}$  áramsűrűség pontban értelmezett mennyiség,  $[J] = 1 \frac{C}{m^2 s}$  ;

- iránya megadja a (+) töltéshordozók áramlási irányát,
- abszolút értéke megadja, hogy az áramlási irányra merőleges, egységnyi keresztmetszeten időegység alatt mennyi töltés áramlik át.

Az elektromos áramerősség vagy intenzitás irányított felületre vonatkozó, skalár mennyiség,  
 - megmutatja, hogy az illető felületen időegység alatt mennyi töltés áramlik át, előjele pozitív, ha a (+) töltéshordozók a felületi normális irányában áramlanak át, ellenkező esetben negatív.

$$I(A) = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad [I] = 1 \frac{C}{s} = 1 \text{ amper (A)}$$

### Az elektromos áramlás két típusa:

a.) Feltöltött szigetelőt mozgatunk, ekkor a töltéshordozók a VR-ben rendezett mozgást végeznek, miközben a szigetelő testhez képest nem mozognak, ez a konvektív vagy szállítási elektromos áramlás.

A konvektív áram sűrűsége:  $\rho\vec{v}$  (lásd kontinuitási egyenlet)

↳ a töltésáramlás sebessége

↳ töltéssűrűség

b.) Egy rézdróttal összekapcsolunk két különböző potenciálú fémtestet, a rézdrót áll, de a töltés benne áramlik, a töltéshordozók a vezető testhez képest rendezett mozgást végeznek. Ilyen áramlás csak vezetőekben képzelhető el, ez a konduktív vagy vezetési áramlás.

A konduktív áramsűrűség jele:  $\vec{j} \rightarrow \vec{J} = \rho\vec{v} + \vec{j}$

A konduktív áramsűrűsége anyagegyenlet állítható fel.

A töltésmegmaradás törvényének lokális alakja:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0$  (lásd kontinuitási egyenlet)

### Stacionárius elektromos áramlás

Az összes fizikai mennyiség időben állandó, töltésáramlás lehetséges. Mivel az elektromos tér időben állandó, érvényesek a konzervatív mezőre jellemző törvények:

$$1. \text{ alaptörvény: } \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{integrális alak}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{E} = -\text{grad} U \end{array} \right\} (\text{lokális alak})$$

Mivel időben minden változatlan, a töltésmegmaradás törvényének bal oldala eltűnik.

$$2. \text{ alaptörvény: } \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{integrális alak}), \quad \text{div} \vec{J} = 0 \quad (\text{lokális alak})$$

$$\text{emlék: } \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_V \rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma,$$

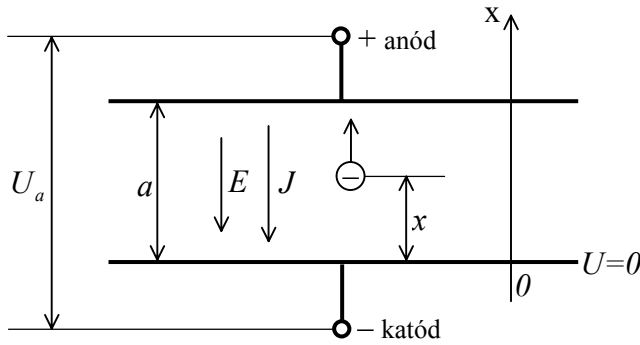
$$\text{most: } \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow J_{2n} - J_{1n} = \sigma$$

Peremfeltétel az áramsűrűsége: az elektromos áramsűrűség normális koordinátája két közeg határán ugrást nem szenved. Ebből következik, hogy vezető és szigetelő határán a vezetőben folyó áramsűrűsége csak tangenciális irányú lehet.

**Az integrális alak szemléletes jelentése: stacionárius áramlásban, zárt felületre az áramerősség zérus.**



## Vákuumdióda karakterisztikája



$U_a$  - anódfeszültség

Megállapodás szerint a potenciált a katódon vesszük zérónak.

Az izzított katódból szabad elektronok lépnek ki és az anód felé áramlanak. Töltésfelhő alakul ki,  $\rho$  töltéssűrűséggel.

Két közelítéssel élünk:

1. a szabad elektronok kilépésekor meglévő sebességét 0-nak vesszük,
2. a katód felületén az elektromos térerősség zérus.

### Az energiamegmaradás törvénye egy elektronra:

Az elektron helyzeti energiája:  $-eU$ . Mivel a katódon se helyzeti, se mozgási energiája nincs, e két energia összege mindvégig 0 marad.

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv^2 - eU = 0 \rightarrow v = \sqrt{2\frac{e}{m}U}$$

A stacionárius áramlás 2. alaptörvénye:  $\frac{dJ_x}{dx} = 0$  (2)  $\rightarrow J_x = const. \rightarrow J = |J_x| = const.$

$$\text{Gauss törvénye: } \text{div}\vec{D} = \rho \rightarrow \frac{dD_x}{dx} = \rho \rightarrow \frac{\epsilon_0 dE_x}{dx} = \rho \quad (3)$$

$$J = |\rho|v = -\rho v \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_x}{dx} &= -\epsilon_0 \frac{J}{v} = -\frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} U^{-1/2} \\ \frac{dE_x}{dx} &= \frac{dE_x}{dU} \frac{dU}{dx} = -E_x \frac{dE_x}{dU} \end{aligned} \right\} \lambda = \frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$$

$$E_x = -\frac{dU}{dx} \quad (5) \quad \text{az 1. alaptörvény differenciális alakja.}$$

$$E_x \frac{dE_x}{dU} = \lambda U^{-1/2}$$

$$\int E_x dE_x = \lambda \int U^{-1/2} dU$$

$$\frac{E_x^2}{2} = 2\lambda U^{1/2} + C_1$$

$$x = 0: E_x = 0 \text{ és } U = 0 \rightarrow 0 = 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\begin{aligned} E_x &= -2\sqrt{\lambda} U^{1/4} \\ -\frac{dU}{dx} &= -2\sqrt{\lambda} U^{1/4} \end{aligned}$$

$$\int_0^{U_a} U^{-1/4} dU = 2\sqrt{\lambda} \int_0^a dx \quad \rightarrow \text{az integrálást a katód és az anód között hajtjuk végre}$$

$$\frac{4}{3} U_a^{3/4} = 2\sqrt{\lambda} a \quad / :2, /^2$$

$$\frac{4}{9} U_a^{3/2} = \lambda a^2 = \frac{J a^2}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$$

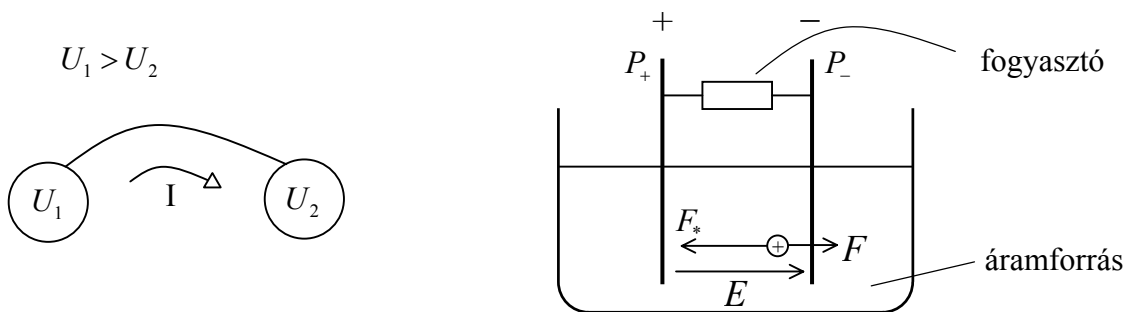
$$J = \frac{4\varepsilon_0}{9a^2} \sqrt{2 \frac{e}{m} U_a^{3/2}} \quad \text{Richardson-Dushman - formula}$$

Tehát az áramsűrűség a feszültség 3/2 -ik hatványával arányos, nem követi az Ohm-szabályt.

## 5. előadás

### Az áramforrás

Az áramforrások olyan vezetők, amelyekben (az elektromos erő mellett) idegen (nem elektromos) erő is hat a szabad töltéshordozókra, ennek iránya ellenkező az elektromos erővel, és így megteremti az elektromos cirkuláció lehetőségét. Az olyan vezetőket, amelyekben idegen erők nem működnek, fogyasztóknak nevezzük.



Elemben, akkuban kémiai természetű az idegen erő.

Dinamóban, generátorban mágneses természetű az idegen erő.

$$\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} \quad \text{: idegen térerősség}$$

$\vec{F}_*$  : a  $q$  ponttöltésre ható idegen erő

$\vec{E}_*$  : a  $q$  ponttöltés helyén az idegen térerősség

Ha a töltés az áramforrásban elmozdul, az idegen erő rajta munkát végez.

$$W_{12}^* = \int_{12} \vec{F}_* \cdot d\vec{r} \quad \underline{\underline{U_{12}^*}} = \frac{W_{12}^*}{q} = \int_{12} \frac{\vec{F}_*}{q} \cdot d\vec{r} = \int_{12} \vec{E}_* \cdot d\vec{r} \quad \rightarrow \text{az } \overline{12} \text{ ívre vett elektromotoros erő}$$

**Az elektromotoros erő megadja az idegen erő egységtöltésen végzett munkáját. Az áramforrás elektromotoros erején azt a munkát értjük, amelyet az idegen erő végez, míg az egységtöltés az áramforrás belsejében a (-) pólustól a (+) pólusig elmozdul.**

$$U_* = \int_{P_- P_+} \vec{E}_* \cdot d\vec{r} > 0 \quad \rightarrow \text{az áramforrás elektromos ereje}$$

**A továbbiakban feltesszük, hogy az áramforrás elektromotoros ereje független attól, hogy milyen úton mozdult el a töltés az áramforrásban a (-) pólustól a (+) -ig.**

## A lokális OHM-féle anvagegyenlet

GEORG SIMON OHM (1787-1854, német fizikus)

Kristályos vezetőt tekintünk, az elektromos áramlás a szabad (vezetési) elektronok rendezett mozgásával valósul meg, az ilyen vezetőkben kizárólag konduktív (vezetési) áram van. A  $\rho$  töltéssűrűség 0.

$\rho_e = -en_e \rightarrow$  a vezetési elektronok töltéssűrűsége

$n_e$  : a vezetési elektronok számsűrűsége ( $db/cm^3$ )

$e$  : elemi töltés

$\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e \rightarrow$  konduktív áramsűrűség

$\vec{v}_e$  : a vezetési elektronok áramlási sebessége

$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \rightarrow$  egy szabad elektron sebessége,  $|\vec{v}'| = u \rightarrow$  a rendezetlen mozgás átlag sebessége,  $u \gg |\vec{V}|$

$\vec{V}$  : a rendezett mozgás sebessége

$\vec{v}'$  : a rendezetlen mozgás sebessége

$\lambda \rightarrow$  közepes szabad úthossz: a vezetési elektronok ionokkal való, két egymást követő ütközése között átlagosan befutott út

$\tau = \frac{\lambda}{u} \rightarrow$  két ütközés között átlagosan eltelt idő

$\vec{F}_e = -e(\vec{E} + \vec{E}_*) \rightarrow$  a szabad töltéshordozóra ható erő

$\vec{a}_e = \frac{\vec{F}_e}{m_e} = -\frac{e}{m_e}(\vec{E} + \vec{E}_*)$

Ütközés után a rendezett mozgás sebessége 0, majd a következő ütközésig fel nő  $\vec{V}_{\max} = \vec{a}_e \tau$ -ra.

Az áramlás sebessége a rendezett mozgási sebesség időátlaga:

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{0} + \vec{V}_{\max}}{2} = -\frac{1}{2} \frac{e\lambda}{m_e u} (\vec{E} + \vec{E}_*)$$

$$\vec{j} = -en_e \vec{v}_e = \frac{e^2 \lambda}{2m_e} \cdot \frac{n_e}{u} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_*)$$

$\gamma = \frac{e^2 \lambda}{2m_e} \cdot \frac{n_e}{u} \rightarrow$  fajlagos vezetőképesség

$$\boxed{\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_*)} \text{ lokális alak}$$

Fémek esetében ha  $\vec{j}$  nő, a vezető felmelegszik,  $u$  megnő, és így  $\gamma$  lecsökken. Szigorú arányosságról tehát szó nem lehet, hiszen a  $\gamma$  „arányossági tényező” függ a  $\vec{j}$  változótól.

Félvezetők esetében a  $\vec{j}$  növekedése okozta melegedés növeli ugyan  $u$ -t, de még erősebben növeli a vezetési elektronok  $n_e$  számsűrűségét, ezért a félvezetők vezetőképessége melegedés esetén nő.

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \rightarrow \text{fajlagos ellenállás}, \quad [\gamma] = 1 \frac{A}{m^2} / \frac{V}{m} = 1 \frac{A}{Vm} = 1 \frac{1}{\Omega m}, \quad 1\Omega = 1 \frac{V}{A}, \quad [\rho] = 1\Omega m$$

$\vec{j} = \vec{E} + \vec{E}_* \rightarrow$  a lokális alak, más formában

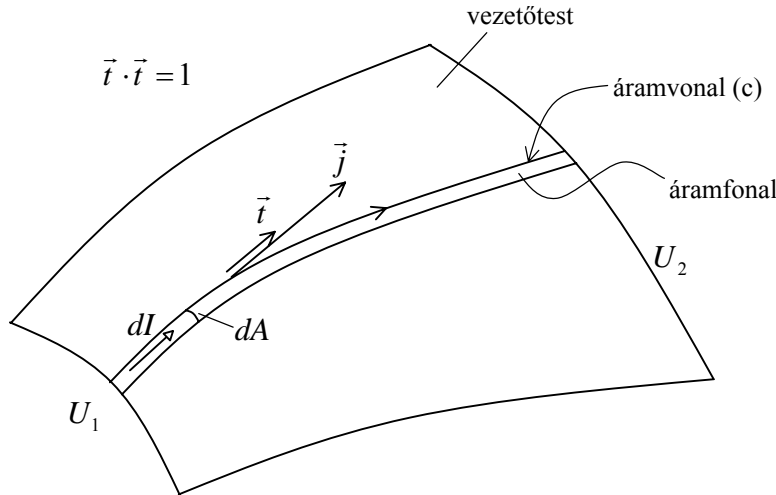
## A szupravezetés

HEIKE KAMMERLINGH-ONNES (holland származású Nobel-díjas (1913) fizikus)

Egyes anyagok a rájuk jellemző hőmérséklet alá hűtve tökéletes elektromos vezetőkké válnak ( $\rho = 0$ ), ez a hőmérséklet ólom esetén 7K. Ma azonban ismerünk olyan anyagokat, amelyek  $(-100) - (-70)^\circ\text{C}$ -on mutatják a szupravezetés jelenségét.

A kitüntetett hőmérséklet alatt feszültség hiányában is folyik áram. Az Ohm-egyenlet például a szupravezetést sem írja le.

### Az integrális OHM-egyenlet



A két határfelület ekvipotenciális felület.

**Áramvonal:** az elektromos áramvonalak olyan irányított görbék, melyek érintő egységvektora megadja az érintési pontbeli elektromos áramsűrűség irányát.

**Áramfonal:** olyan kicsiny keresztmetszetű cső, melynek palástját áramvonalak alkotják.

$$U_{12} = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_c (\rho\vec{j} - \vec{E}_*) \cdot d\vec{s} = \int_c \rho\vec{j} \cdot d\vec{s} - \underbrace{\int_c \vec{E}_* \cdot d\vec{s}}_{U_{12}^*}$$

$$\vec{j} = \vec{t} \frac{dI}{dA}, \quad d\vec{s} = \vec{t} ds \Rightarrow \vec{j} \cdot d\vec{s} = \vec{t} \cdot \vec{t} \frac{dI}{dA} ds = \frac{dI}{dA} ds$$

Az áramfonal bármely keresztmetszetére az áramsűrűség ugyanaz, a töltés-megmaradás értelmében.

$$U_{12} + U_{12}^* = dI \int_c \frac{\rho ds}{dA} \quad / \quad dG_{12} \stackrel{def.}{=} \frac{1}{\int_c \frac{\rho ds}{dA}} \rightarrow \text{az áramfonal vezetőképessége}$$

$$(U_{12} + U_{12}^*) dG_{12} = dI$$

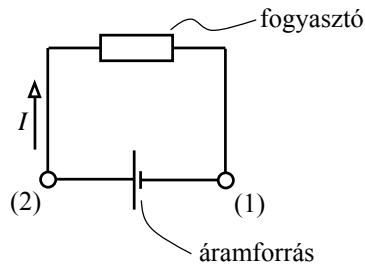
Ha ezt az egyenletet minden egyes áramfonalra felírjuk, majd a sok egyenletet összeadjuk, akkor:

- a  $dI$ -k összege a teljes vezetőtesten átfolyó áram erőssége,
- a  $dG$ -k összege a teljes vezetőtest vezetőképességét adja.

$$(U_{12} + U_{12}^*) G_{12} = I \quad / \quad R_{12} \stackrel{def.}{=} \frac{1}{G_{12}} \rightarrow \text{a vezető ellenállása}$$

$$\boxed{(U_{12} + U_{12}^*) = IR_{12}} \quad \text{integrális OHM-egyenlet} \quad / \quad \text{fogyasztóra: } U_{12}^* = 0 \rightarrow U_{12} = IR_{12}$$

**Az áram az (1)-es pólustól a (2)-es felé folyik!**

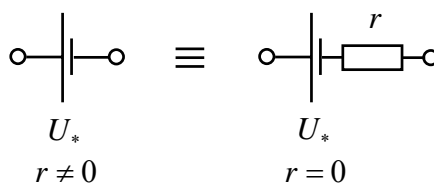


Az áramforrás ellenállása  $r$  (belső ellenállás), a fogyasztó ellenállása:  $R$ .

Az áramforrás elektromotoros ereje:  $U_*$ , kapcsolásfeszültség:  $U$ .

$$\left. \begin{array}{l} - \text{ Ohm az áramforrásra: } U_{12} + U_* = Ir \\ - \text{ Ohm a fogyasztóra: } \underbrace{U_{21}}_U = IR \end{array} \right\} \begin{array}{l} -U + U_* = Ir \\ U_* = U + Ir = I(R + r) \end{array}$$

Ideális áramforrásnak nevezzük a  $r = 0$  belső ellenállású áramforrást.



### Vonalas (lineáris) vezetők

Az olyan vezetők, melyeknek keresztmetszeti méretei nagyon kicsinyek a hossz méreteikhez képest, vonalas vezetőknek nevezzük.

Az egész vezető egyetlen áramfonalnak tekinthető.

$$R = \int \frac{\rho ds}{A} \quad / \text{ az integrálást a vezető teljes hosszára kell elvégezni}$$

$$\text{Állandó keresztmetszetű, homogén huzal esetén: } R = \frac{\rho l}{A}.$$

Milyen törvények érvényesek a vonalas vezetőkkel összeállított hálózatokra?

**Csomópont:** a hálózat olyan pontja, ahol legalább 3 vonalas vezető fut össze.

**Ág:** a hálózat olyan szakasza, amelynek kezdő- és végpontja csomópont, belsejében azonban nincs csomópont. Egy ágon belül csak egyetlen áramerősség lehet.

**Hurok:** olyan irányított, zárt vonal, amelyet lineáris vezetők testesítenek meg.

$$\begin{array}{ll} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \sum U_i = 0 & \text{huroktörvény (KIRCHHOFF II. törvénye)} \\ \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow \sum I_i = 0 & \text{csomóponti törvény (KIRCHHOFF I. törvénye)} \end{array}$$

GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824-1887, német fizikus)

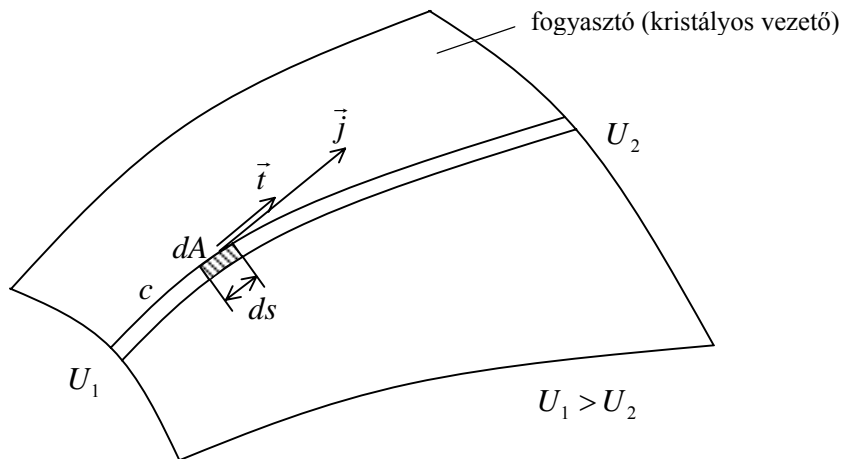
Huroktörvény: egy hurok mentén az elektromos feszültségek algebrai összege 0.

Csomóponti törvény: egy csomópontban összefutó vezetékekben az áramerősségek algebrai összege 0.

Az ideális áramforrás feszültsége:  $U_*$ , ha a (+) pólustól a (-) felé haladunk,  
 $-U_*$ , ha a (-) pólustól a (+) felé haladunk.

## A lokális JOULE-törvény

JAMES PRESCOTT JOULE (1818-1889, francia származású angol fizikus)



Mennyi a szabad elektronok töltése a jelölt térfogati cellában?  $dQ_e = \rho_e dV$

- $\rho_e$  : az elektronok töltéssűrűsége,
- $dV$  : a cella térfogata.

Mekkora elektromos erő hat a cellában foglalt szabad elektronokra?  $d\vec{F}_e = \vec{E}dQ_e = \rho_e \vec{E}dV$

Kiszámítjuk az elektromos mező teljesítményét a cella szabad elektronjaira:

$$dP = \vec{v}_e \cdot d\vec{F}_e = \rho_e \vec{v}_e \cdot \vec{E}dV \quad / \quad \vec{j} = \rho_e \vec{v}_e$$

$$\boxed{\frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E}} \rightarrow \text{lokális JOULE-törvény}$$

$\frac{dP}{dV} \rightarrow$  elektromos teljesítménysűrűség

**A szabad elektronokon végzett munka apasztja az elektromos tér energiáját. Az elektromos tér munkavégzése a fogyasztó belső energiáját gyarapítja. A mező felgyorsítja a szabad elektronokat, ezek ütköznek az ionráccsal, az ionok rezgése megélenkül, nő a test belső energiája.**

**Az elektromos teljesítménysűrűség egyben a belső energia forrassűrűsége, megadja, hogy térfogat-egységben, időegység alatt mennyi belső energia keletkezik (elektromos energiából).**

## Az integrális JOULE-törvény

$$\underline{\underline{\delta P}} = \int_{\delta V} \vec{j} \cdot \vec{E}dV = \int_c \frac{dI}{dA} \underbrace{\vec{t} \cdot \vec{E}dA}_{ds} = dI \underbrace{\int_c \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{U_{12}} = \underline{\underline{U_{12}dI}}$$

- $\delta P$  : az elektromos teljesítmény a megrajzolt áramfonalban
- $\delta V$  : az egész áramfonal térfogata

Ezt az összefüggést minden áramfonalra felírjuk, majd ezeket az egyenleteket összeadjuk:

$$\boxed{P_{12} = U_{12}I} = I^2 R_{12} = \frac{U_{12}^2}{R_{12}}$$

- $P_{12}$  : az elektromos teljesítmény a fogyasztón,
- $R_{12}$  : a fogyasztó két pólusa közötti ellenállás,
- $U_{12}$  : a fogyasztó két pólusa közötti feszültség,
- $I$  : a fogyasztón folyó áramerősség.

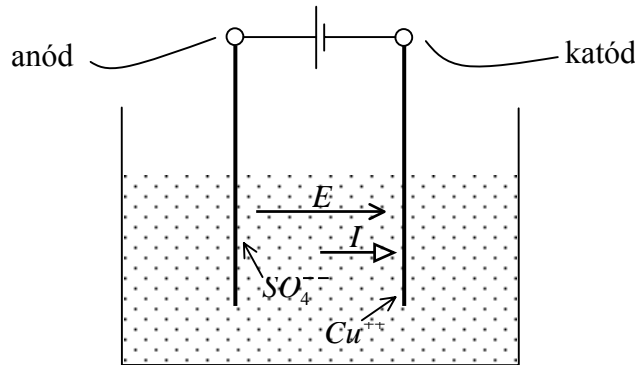
## Az elektrolízis

Az elektrolízis folyadékban megvalósuló elektromos vezetés.

**Elektrolit:** vezető folyadék, ilyen elektrolitok a savak, lúgok és sók vizes oldatai, például az  $NaCl$  - (konyhasó-) oldat, a  $CuSO_4$  (réz-szulfát) oldata vagy az  $AgNO_3$  (ezüst-nitrát) oldata, de nem elektrolit a cukoroldat, a parafin olaj vagy a glicerin.

Só feloldásakor molekulái szétesnek (disszociálnak) pozitív és negatív ionokra.

Például:  $CuSO_4 \rightarrow Cu^{++} + SO_4^{--}$



A rézion a katódon két elektront vesz fel, és semleges rézatom formájában kiválik a katódon, így a katódra egyre több réz rakódik rá.

Egy ion töltése:  $Ze$

-  $Z$  : vegyérték, egész szám,

-  $e$  : elemi töltés.

-  $M$  : a kiváló anyag móltömege,

-  $N_A$  : Avogdro-állandó ( $6,02 \cdot 10^{23} / mol$ ),

-  $m$  : a kivált tömeg,

-  $Q$  : a kiválasztás során az áramkörön átfolyt töltés,

-  $n = \frac{m}{M}$  : kivált mólok száma,

-  $N = nN_A$  : a kivált ionok száma,

$$Q = ZeN = Ze \frac{m}{M} N_A \rightarrow \boxed{m = \frac{M/Z}{eN_A} Q} \quad \text{FARADAY-törvény az elektrolízisre}$$

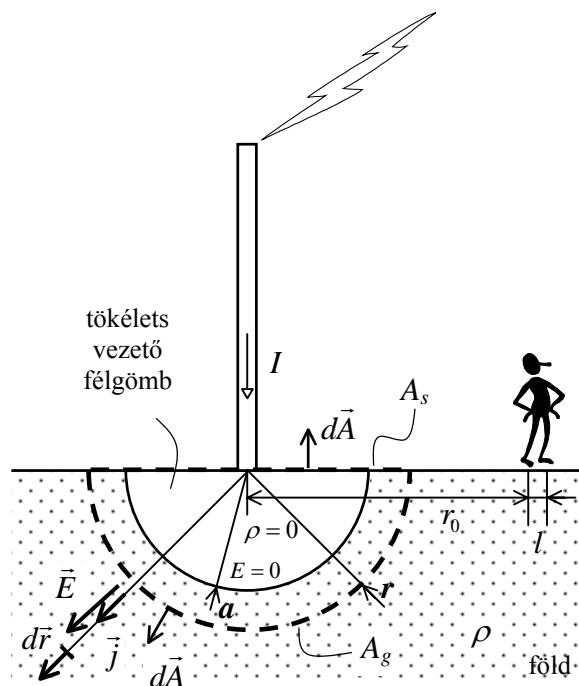
MICHAEL FARADAY (1791-1867, angol kémikus és fizikus)

A kivált anyag tömege egyenesen arányos a folyamat során az áramkörön átfolyt töltés mennyiségével.

Az arányossági tényező nevezőjében az  $F = eN_A$  természeti állandó szerepel.

$$\underline{\underline{F}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 9,65 \cdot 10^4 \frac{C}{mol} \rightarrow \text{Faraday-állandó}$$

-  $\frac{M}{Z}$  : kémiai egyenértéktömeg.

A villámhárító

$$\rho = 100 \Omega m$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$I = 10 \text{ kA}$$

- Mekkora potenciálon van a földelő?

anyagegyenlet:  $\vec{E} = \rho \vec{j}$

2. alaptörvény:  $\oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$

$$\int_{A_s} \vec{j} \cdot d\vec{A} + \int_{A_g} \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$$

/ A göbbszimmetria miatt a félgömbfelület mentén az áramsűrűség és a térerősség abszolút értéke nem változik.

$$-I + \underbrace{j(r) \int_{A_s} dA}_{2\pi r^2} = 0$$

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \rightarrow E(r) = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$U = \int_{r=a}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{1. alaptörvény, } U \text{ a földelő potenciálja}$$

$$U = \frac{\rho I}{2\pi} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^{\infty} = \frac{\rho I}{2\pi a} \Rightarrow \text{a föld ellenállása: } R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{2\pi a} = \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 0,1} = \underline{\underline{159 \Omega}}$$

$$\underline{\underline{U}} = I \cdot R = 10000 \cdot 159 = \underline{\underline{1,59 \text{ MV}}}$$

$$r_0 = 10 \text{ m}$$

$$l = 75 \text{ cm}$$

- Mekkora a feszültség a képen látható Jancsi bácsi két lába között (lépésfeszültség)?

$$\underline{\underline{U_l}} = \int_{r_0}^{r_0+l} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho I}{2\pi} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ -\frac{1}{r^2} \right]_{r_0}^{r_0+l} = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+l} \right) = \underline{\underline{1,1 \text{ kV}}}$$



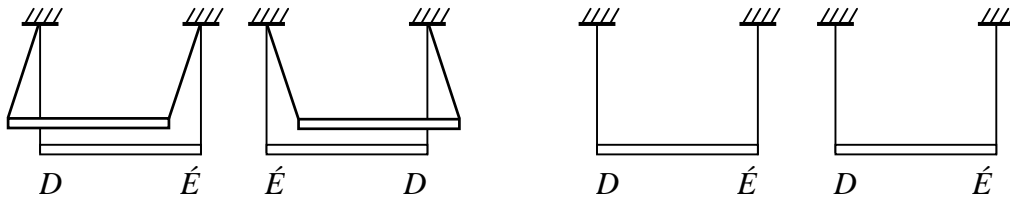
## Mágneses alapjelenségek

Magnészia – város Kis-Ázsiában, határában az ókorban különleges vasércet bányásztak. E vasérc és apró vasdarabkák között vonzó kölcsönhatást tapasztaltak (nincs test-test kapcsolat), fizikai mező jelenlétére utal → mágneses mező.

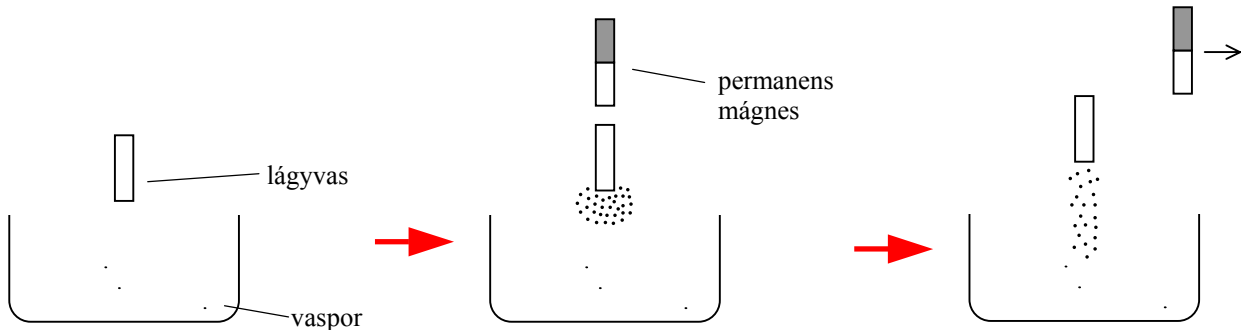
- 1.) A mágnesvasérc és a vasreszelék között a kölcsönhatás mindig vonzó.
- 2.) Ha mágnesvasércre acéltűt helyezünk, és huzamosan ott tartjuk, levétele után az acéltű is vonzza a vasreszeléket, de a vasdarabkák csak a két végére tapadnak, ám oda egyforma mértékben. Ezeket a végeket mágneses pólusoknak hívjuk.

A Föld mágneses hatására a felfüggesztett permanens (állandó) mágnes befordul az É-D-i irányba, az É-ra mutató pólus az É-i, a másik a D-i.

- 3.) Az azonos pólusok között mindig taszító, a különböző pólusok között mindig vonzó kölcsönhatás lép föl (É ↔ É vagy D ↔ D ⇒ taszító, É ↔ D ⇒ vonzó).



- 4.) Mágneses polarizáció: ha a lágyvas külső mágneses mezőbe kerül, maga is mágnessé válik, a külső mező megszűnése után azonban elveszti ezt a tulajdonságát.



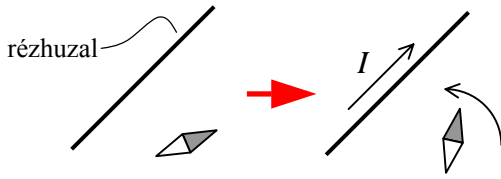
- 5.) Az elektromos megosztásnak nincs mágneses megfelelője. Semmi módon nem érhető el, hogy egy testben például az É mágnesség túlsúlyra jusson a D-ivel szemben. Nem létezik mágneses egypólus, a mágnességtanban a legegyszerűbb alakzat a dipólus.
- 6.) Milyen kapcsolat létezik az elektromos és a mágneses jelenség között?

Egy nyugvó töltés és egy nyugvó mágnes között a tapasztalatok szerint nincs kölcsönhatás.

HANS CHRISTIAN ØRSTED (1777-1851)

A mozgó töltés és a mágnes már kölcsönhatásban van. Árammal átjárt rézhuzal közelében az iránytűk megbolondulnak.

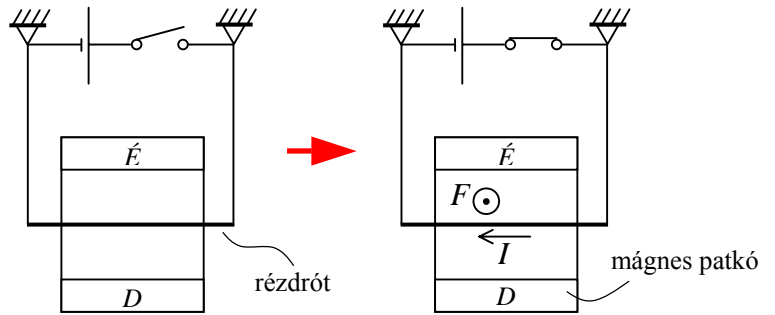
6.a.



ANDRÉ MARIE AMPÈRE

A mozgó elektromos töltés mágneses mezőt gerjeszt.

6.b.

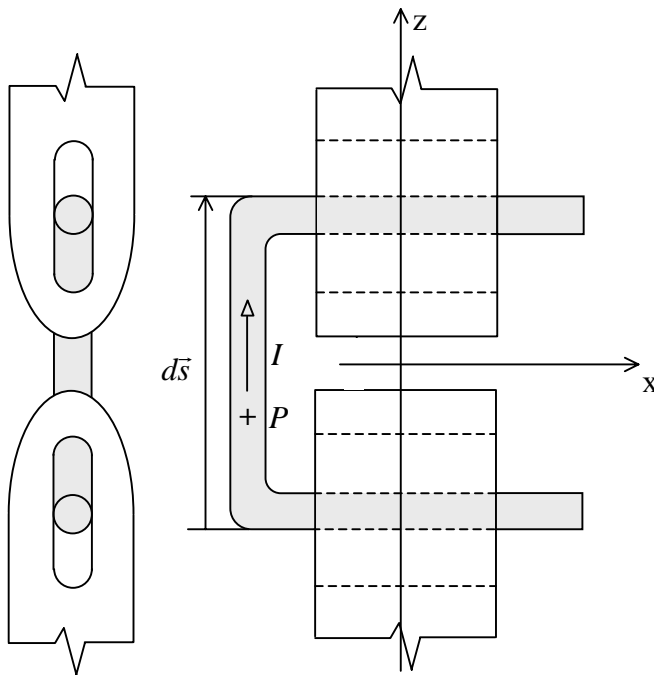


A mágneses mezőben rendezett mozgást végző töltésekre, és így a töltéseket magában foglaló testre erő hat, ez az AMPÈRE erő.

ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775-1836, francia fizikus)

Két áramvezető között is erőhatás figyelhető meg, az egyik áramvezető mágneses mezőt gerjeszt, a másik vezető ebbe merül, így a benne folyó áramra Ampère erő hat (elektrodinamikai erőhatás).

**A mágneses indukcióvektor**



$d\vec{s}$  : a valóságban igen rövid  
 - iránya az áram irányával megegyezik  
 - abszolút értéke az 'U' szög z irányú oldalának hossza

$P \in d\vec{s}$

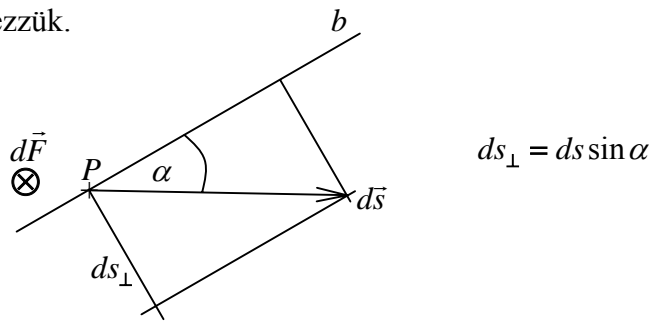
Jelen állásban mérhető a mágneses mező által az 'U' szögre kifejtett x irányú (betoló-kihúzó) és a z irányú (fel-letoló) Ampère-erő, ha pedig a z tengely körül 90°-kal a szerkezetet elfordítjuk, mérhető az y irányú erő is.

A mérőeszközt  $P$  körül elforgatva a térben bármely irányba beállíthatjuk.  $P$  az a pont ahol ismerni akarjuk a mágneses mezőt.

**Mérési tapasztalatok:**

A cél olyan mennyiséget találni mely a mérőeszköz adataitól ( $I$ -től és  $d\vec{s}$ -től) független, egyedül a mágneses mezőt jellemzi a  $P$  pontban.

- 1.) Tapasztalatok szerint  $d\vec{F}$  -sel párhuzamos erő semmilyen helyzetben fel nem lép, tehát  $d\vec{F} \perp d\vec{s}$ .
- 2.) A mérőeszköz forgatásakor találunk egy olyan helyzetet, amikor az áramelemre egyáltalán nem hat erő. Azt a P-n átmenő  $b$  egyenest, amellyel ekkor  $d\vec{s}$  vektor párhuzamos, kitüntetett egyenesnek nevezzük.



- 3.) Ha  $d\vec{s}$  nem párhuzamos a kitüntetett egyenessel, akkor az áram elemre olyan mágneses erő hat, amely  $b$ -re is merőleges, vagyis  $d\vec{F} \perp b$ .

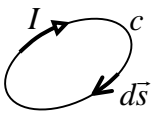
$$4.) \left. \begin{array}{l} |d\vec{F}| \propto I \\ |d\vec{F}| \propto ds_{\perp} \end{array} \right\} B \stackrel{def.}{=} \frac{|d\vec{F}|}{I ds_{\perp}}$$

A  $\frac{|d\vec{F}|}{I ds_{\perp}}$  hányados már nem függ a mérőeszköz adataitól, kizárólag a mágneses mezőt jellemzi a  $P$  pontban, ezért ezt a hányadost tekintjük a mágneses mező alapvektora, a  $\vec{B}$  indukcióvektor abszolút értékének.

Definíció szerint a mágneses indukcióvektor iránya párhuzamos a  $b$  kitüntetett egyenessel, és értelmét úgy állapítjuk meg, hogy a  $d\vec{F}$ ,  $d\vec{s}$ ,  $\vec{B}$  vektorok jobbhármast alkossanak. (Az ábrán  $\vec{B}$  ferdén fölfelé mutat.) A  $B$ -ről mondottak a következő tömör alakban foglalhatóak össze:

$$\boxed{d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}} \rightarrow \text{elemi Ampère erő}$$

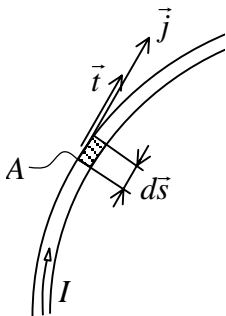
$$|d\vec{F}| = I \underbrace{ds \sin \alpha}_{ds_{\perp}} B$$



$$\vec{F} = I \oint_c d\vec{s} \times \vec{B}$$

$\vec{F}$ , az áramhurokra ható Ampère erő

## A LORENTZ-erő



vonalas vezető

$$I \cdot d\vec{s} = jA \vec{t} ds = \underbrace{j \vec{t} A}_{\vec{j}} \underbrace{ds}_{dV} = \vec{j} dV$$

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dV$$

$$/ \vec{j} = \rho_e \vec{v}_e$$

-  $\rho_e$ : a szabad elektronok töltéssűrűsége

-  $\vec{v}_e$ : a szabad elektronok áramlási sebessége

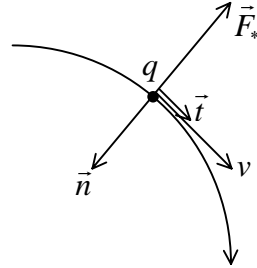
$$d\vec{F} = \underbrace{\rho_e dV}_{dQ_e} \vec{v}_e \times \vec{B} = dQ_e \vec{v}_e \times \vec{B}$$

/  $dQ_e$ : a pontszerű vezetődarabkában foglalt szabad elektronok össztöltése

Bármely ponttöltésre:

$$\vec{F}_* = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \text{Lorentz-erő}$$

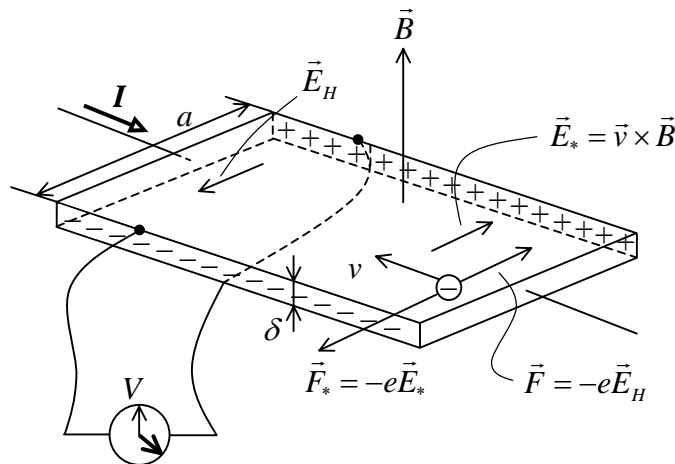
- Ahol
- $q$ : a pontszerű test töltése,
  - $\vec{v}$ : a pontszerű test sebessége,
  - $\vec{B}$ : a mágneses indukció azon a helyen, ahol a pontszerű test éppen áthalad.



A Lorentz-erő normális irányú, vagyis kerületi gyorsulást nem okozhat, a Lorentz-erő hatására a kerületi sebesség állandó marad, a sebességvektornak csak iránya változik.

$$\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \text{Lorentz-térerősség}$$

### A HALL-effektus



Ha a vezetőszalag a síkjára merőleges, homogén, időben állandó mágneses mezőbe merül, és hosszirányban elektromos áramot bocsátunk át rajta, akkor a szalag két szélének átellenes pontjai között elektromos feszültséget mérhetünk.

Az áramlás kezdeti szakaszában a rájuk ható Lorentz-erő miatt a szabad elektronok kisodródnak a szalag egyik szélére, itt tehát negatív töltéstöbblet jön létre.

Létrejön egy keresztirányú térerősség, ez a Hall-térerősség, jele:  $\vec{E}_H$ .

Az állandósult állapotban a Lorentz-erő és a Hall-erő kioltja egymást, így a keresztirányú áramlás leáll.

Stacionárius állapot:  $\vec{F} + \vec{F}_* = \vec{0}$

$$vB = E_* = E_H$$

$$U_H = E_H a = vBa$$

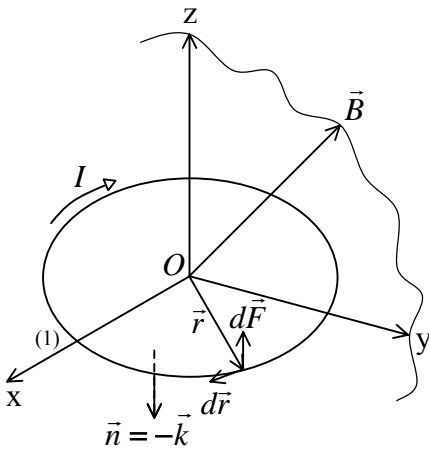
$$/ I = jA, \text{ ahol } j = en_e v, A = a\delta \rightarrow I = en_e va\delta$$

$$/ va = \frac{I}{en_e \delta}$$

$$U_H = \frac{IB}{en_e \delta}$$

ahol mérhető:  $U_H, I, B, \delta$  és kiszámítható:  $n_e$ .

**Forgatónyomaték homogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra**



$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F} \rightarrow$  a mágneses forgatónyomaték a megrajzolt áramelemre

$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}$

Megállapodás:

- a z tengely legyen merőleges a vezetőhurok síkjára,
- az y tengelyt úgy vesszük fel, hogy  $\vec{B}$  beleessen a zy-síkba.

$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F} = I \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) \quad / \quad \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = (\vec{r} \cdot \vec{B})d\vec{r} - (\vec{r} \cdot d\vec{r})\vec{B}$

$\vec{N}$  : az egész áramhurokra ható forgatónyomaték

$\vec{N} = I \oint (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - I \vec{B} \oint \vec{r} d\vec{r} \quad / \quad \oint \vec{r} d\vec{r} = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{(1)}^{(1)} = 0,$

$d\vec{s} \times \vec{B} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \rightarrow d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

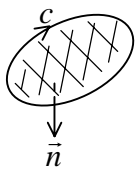
$\vec{B} = B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

$\vec{r} \cdot \vec{B} = B_y y$

$\vec{N} = IB_y \oint y (dx\vec{i} + dy\vec{j})$

$\vec{N} = IB_y \vec{i} \underbrace{\oint y dx}_A + IB_y \vec{j} \oint y dy \quad / \quad A: \text{a vezetőhurok által körülzárt terület, } \oint y dy = \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{(1)}^{(1)} = 0$

$\vec{N} = IAB_y \vec{i}$



A peremgörbe és a felület irányítása közötti kapcsolat a jobbsavarszabály.

Ha jobb kezünk beállított ujjai a görbe irányába mutatnak, hüvelykujjunk mutatja a felület normálisának irányát.

$\vec{A} = A \cdot \vec{n} = -A\vec{k} \rightarrow$  területvektor, abszolút értéke a terület, iránya a normális iránya.

$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -A \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i} AB_y \rightarrow \boxed{\vec{N} = I\vec{A} \times \vec{B}}$  ez az áramhurokra ható forgatónyomaték.

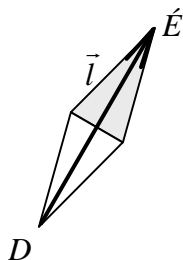
Emlék:  $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$ ,  $\vec{p}$  : elektromos dipólusnyomaték

$\vec{N} = I\vec{A} \times \vec{B}$

mágneses dipólus nyomaték:  $\vec{m} = I\vec{A}$

Áramhurok:  $\left. \begin{array}{l} \vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \\ \vec{m} = I\vec{A} \end{array} \right\} \text{ ez a mágneses dipólusnyomaték töltésáramlásához, } [m] = 1Am^2$   
 azaz áramhoz van kötve.

Permanens mágnes:



$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \rightarrow$  rendezett töltésmozgás nincs, mágneses dipólusnyomaték mégis van  
 $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{l}$   
 $m \propto l \rightarrow$  az arányossági tényező attól függ, hogy milyen erősen van felmágnesezve a mágnesű

### Az anyagok mágnesezettségének oka

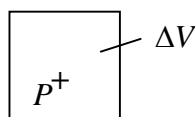
A nukleonok (a mag alkotórészei) mágneses dipólusnyomatéka 3 nagyságrenddel kisebb, mint az elektronoké. Ezért egy atom mágneses dipólusnyomatéka az elektronjai a dipólusnyomatékának vektori összege.

Az elektron dipólusnyomatékának:

- egy része mozgásból származik,
- a másik része saját momentum: az elektron mozgásállapotától független.

Vannak olyan atomok, melyekben az elektronokhoz tartozó mágneses dipólusnyomatékok vektori összege nulla. A legtöbb atomban azonban az eredő dipólusnyomaték nem nulla, ám ilyen atomok halmaza külső mágneses mező híján mégsem mutat mágneses viselkedést, a dipólusmomentumok rendezetlensége okán, külső mágneses mező azonban többé-kevésbé rendet alakíthat ki.

### A mágnesezettség vektora



$\Delta \vec{m}$ : a  $\Delta V$  térfogatban foglalt atomok összes mágneses dipólusnyomatéka

$$\vec{M}(P) = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ P \in \Delta V}} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} \rightarrow \text{a mágnesezettség vektora}$$

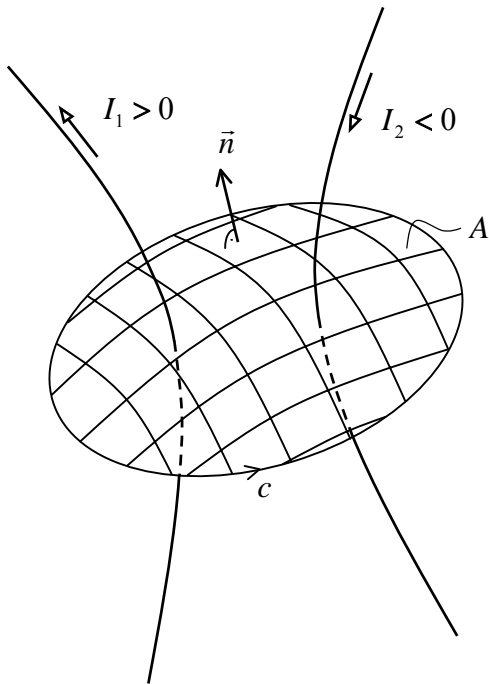
**A mágnesezettség vektora megadja, hogy a  $P$  pontnál térfogategységben mennyi az összes mágneses dipólusnyomaték.**

$$[M] = \frac{[m]}{[V]} = 1 \frac{Am^2}{m^3} = 1 \frac{A}{m}$$

A külső mágneses mező erősödésével az anyag mágnesezettsége is növekszik.

A polarizáló mágneses mező indukciója és a mágnesezettség közötti kapcsolatot mágneses anyag-egyenletnek nevezzük.

## Stacionárius áramok vákuumbeli mágneses mezőjének cirkulációja



A felület és a peremgörbe irányítása között a jobbszavar-, más néven a dugóhúzószabály teremt kapcsolatot.

$I_A \rightarrow$  az A-n átfolyó összes áram

$I_A = \sum_i I_i \rightarrow$  az A felületet átbökö áramok előjeles összege

Egy vektormező cirkulációján az illető vektor irányított, zárt görbére vett integrálját értjük:

$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} \rightarrow$  a mágneses indukcióvektor cirkulációja (a c görbe mentén sűrűn megmérjük  $\vec{B}$ -t, összeszorozzuk a mérési pontbeli ívelemvektorral, a szorzatokat összeadjuk)

$\hookrightarrow$  a mérési tapasztalatok azt mutatják, hogy ez a mennyiség arányos  $I_A$ -val.

$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_A$ , ahol  $\mu_0$  arányossági tényező a mérések szerint egyenlő  $1,256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$ -rel, és neve: a vákuum mágneses permeabilitása.

A kémiai anyagban megvalósuló mágneses mező leírására két vektor szolgál: a  $\vec{B}$  alapvektor és az  $\vec{M}$  mágnesezettségi vektor. Most bevezetjük e két vektor lineáris kombinációjaképpen a mágneses térerősség vektorát.

A mágneses térerősség, definíció szerint:  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ ,  $[H] = 1 \frac{A}{m}$ .

Ennek a vektornak a segítségével a stacionárius mágneses mező I. alaptörvénye egyszerűbb alakban írható fel.

### Mágneses lineáris anyagegyenlet

Feltételezzük, hogy a mágneses indukció és a mágnesezettség között arányosság van.

$\vec{B} \propto \vec{M} \Rightarrow \vec{H} \propto \vec{M} : \vec{M} = \chi \vec{H} \rightarrow$  az anyagegyenlet 1. alakja, ahol  $\chi$ : mágneses szuszceptibilitás.

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \rightarrow \vec{B} = (\chi + 1)\mu_0 \vec{H}$ , ahol  $\chi + 1 = \mu'$  a relatív permeabilitás

$\mu = \mu_0 \mu'$ : (abszolút) permeabilitás

$\vec{B} = \mu \vec{H} \rightarrow$  az anyagegyenlet 2. alakja

## A stacionárius mágneses mező I. alaptörvénye: az Ampère-féle gerjesztési törvény

emlék:  $U_{12} = \int_{12} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

A mágneses feszültség ( $K$ ) irányított vonalra értelmezett fizikai mennyiség, a mágneses térerősség vonalintegrálja.

$$\boxed{K_{12} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{12} \vec{H} \cdot d\vec{s}}$$

$K_c = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} \rightarrow$  mágneses körfeszültség, a mágneses térerősség cirkulációja.

$$K_c = \frac{1}{\mu_0} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} - \oint_c \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

Vákuum esetén:  $\vec{M} = 0 \rightarrow K_c = \frac{1}{\mu_0} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = I_A$

Mérési tapasztalat, hogy a mágneses körfeszültség és az áram egyenlősége fennáll akkor is, ha a térben mágnesezhető anyagok vannak jelen.

$$\boxed{\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_A} \rightarrow \text{az Ampère-féle gerjesztési törvény integrális alakja}$$

**A stacionárius mágneses mezőben felvett rögzített, irányított, nyílt felületre az elektromos áramerősség egyenlő a felület peremgörbéjére számított mágneses körfeszültséggel.**

Térbeli árameloszlás esetén:  $I_A = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$

(Matematika: Stokes-féle integrál átalakítási tétel:  $\oint_c \vec{w} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{w} \cdot d\vec{A}$ )

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \rightarrow \text{bármely } A\text{-ra igaz, ezért}$$

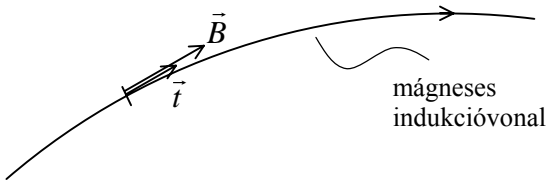
$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J} = \vec{j} + \rho \vec{v}} \rightarrow \text{az Ampère-féle gerjesztési törvény lokális alakja}$$

**A stacionárius mágneses mező (ellentétben a stacionárius elektromos mezővel) nem konzervatív:  $\text{rot } \vec{H} \neq \vec{0}$  ha a mágneses mezőt áramok gerjesztik.**

**Sztatikus mágneses mezőben, melyet nyugvó permanens mágnesek gerjesztenek,  $\text{rot } \vec{H} = \vec{0}$ , ez tehát konzervatív mező.**



## A mágneses mező szemléltetése



A mágneses indukcióvonalak olyan irányított görbék, amelyek érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral.

Megállapodás szerint az indukcióvonalakat olyan sűrűn vesszük fel, hogy a rájuk merőleges egységnyi felületen éppen  $B$  számú indukcióvonal menjen át (vagyis annyi, amennyi ott a mágneses indukció mérőszáma).

emlék:  $\Psi_A = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$ ,  $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_V$ ,  $\text{div} \vec{D} = \rho$ ,  $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$

Irányított felületre a mágneses fluxus:  $\Phi_A = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ ,  $[\Phi] = [B][A] = 1 \frac{Vs}{m^2} m^2 = 1Vs$ .

Vagyis a mágneses fluxus a mágneses indukcióvektor felületi integrálja.

A mágneses fluxus számértéke megadja az illető felületet átdőfő mágneses indukcióvonalak előjeles számát. Mivel mágneses töltés nem létezik, zárt, rögzített felületre a mágneses fluxus nulla.

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$  → a II. alaptörvény, a mágneses Gauss-törvény integrális alakja.

$\text{div} \vec{B} = 0$  → a mágneses Gauss-törvény lokális alakja.

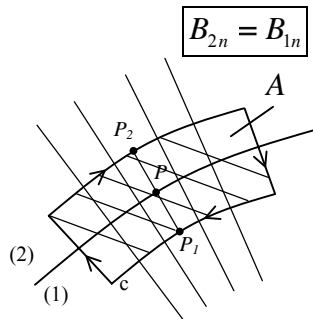
Az elektrosztatikában azt tanultuk, hogy az elektromos indukcióvonalak a pozitív töltésen erednek és a negatív töltésen végződnek, van elejük és van végük. A mágneses indukcióvonalak viszont – mágneses töltések hiányában – sehol nem kezdődnek és nem is érnek véget (ebből nem következik, hogy feltétlenül zárt görbéknek kell lenniük).

## Peremfeltételek a mágneses mezőben

Mivel felületi mágneses töltés sincs, a mágneses indukcióvektor normális koordinátája két közeg határán ugrást nem szenved.

emlék:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow E_{1t} = E_{2t}$

$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_A$

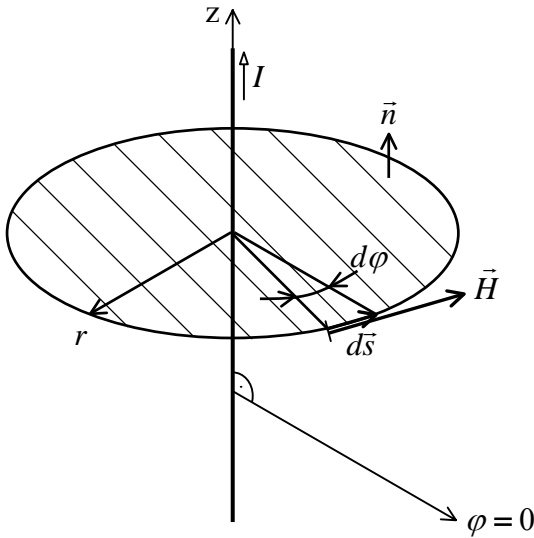


$\left. \begin{matrix} P_1 \rightarrow P \\ P_2 \rightarrow P \end{matrix} \right\} A \rightarrow 0 : I_A \rightarrow 0$

Az  $A$ -n átfolyó áram 0-hoz tart, ha az áram térben oszlik el, nem a határfelületen koncentrált áramról van szó.

$H_{2t} = H_{1t}$  → A mágneses térerősség tangenciális koordinátái két közeg határán nem szenved ugrást, ha nincsenek a határfelületen koncentrált áramok.

**Végtelen hosszú, egyenes áramfonal mágneses tere (homogén közegben)**



$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_A$$

$$\oint_c H ds = I \quad / \quad ds = r d\varphi$$

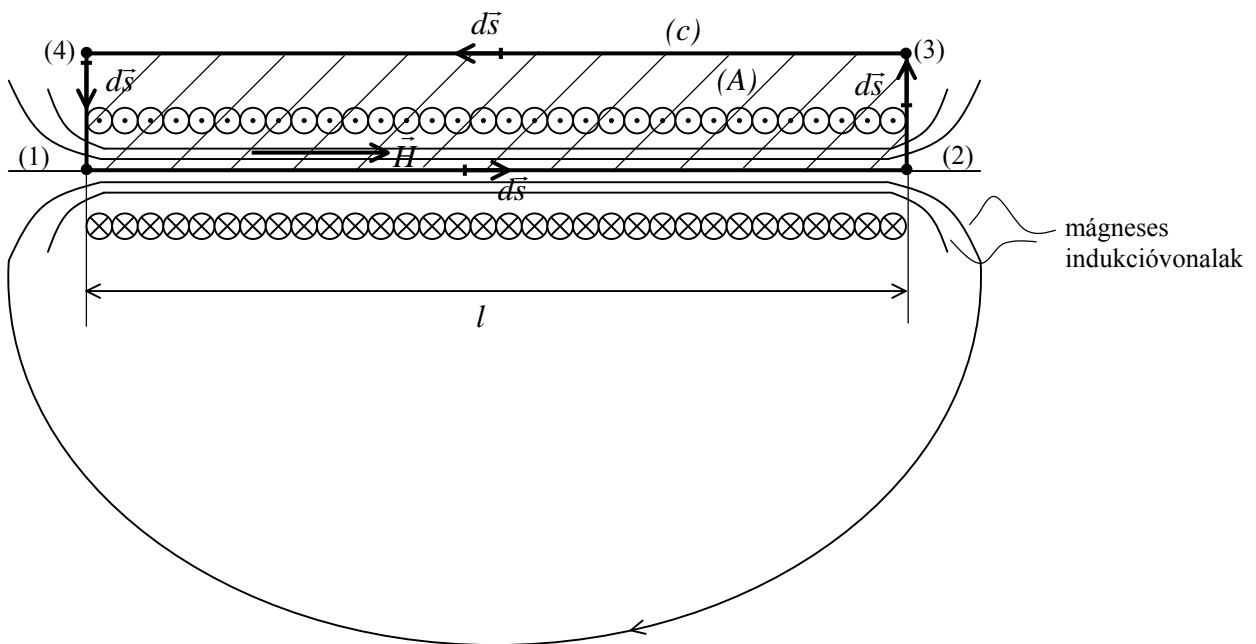
$$Hr \oint d\varphi = I \quad / \quad \oint d\varphi = 2\pi$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

- Ez az elrendezés tökéletes hengersizimetriát mutat.
- A skalárok a három hengerkoordináta közül egyedül  $r$ -től függhetnek ( $\varphi$ -től és  $z$ -től nem).
- Ampère törvényét olyan körvonalra írjuk fel amelynek síkja az áramfonalra merőleges és középpontja rajta van az áramfonalon.
- A  $\vec{H}$  vektor szimmetriaiokokból azimutális irányú.
- A mágneses térerősség fordítottan arányos az áramfonaltól mért távolságtól.
- Ha jobb kezünk hüvelykujja az áram irányába mutat, akkor behajlított ujjaink mutatják a  $\vec{H}$  vektor értelmét.

**Mágneses mező szolenoid belsejében**

**Szolenoid:** átmérőjéhez képest igen hosszú, sűrűn csévelt, árammal átjárt, hengeres tekercs (belsejében az anyag homogén).



A tekercs belsejében a mágneses indukció és térerősség tengelypárhuzamos, és a mágneses mező homogénnek vehető.

a menetek száma:  $N$ ,  
 a szolenoidban folyó áram erőssége:  $I$ .

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_A$$

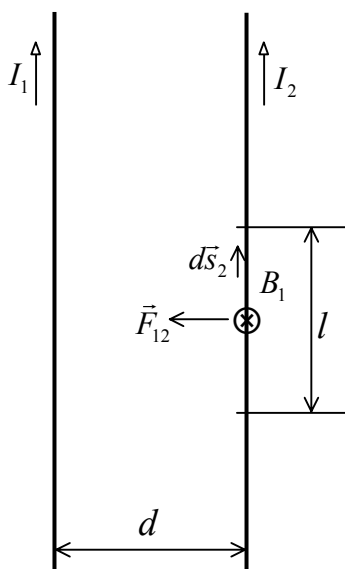
$$\int_{12} \vec{H} \cdot d\vec{s} + \int_{23} \vec{H} \cdot d\vec{s} + \int_{34} \vec{H} \cdot d\vec{s} + \int_{41} \vec{H} \cdot d\vec{s} = NI \quad / \int_{34} \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx 0, \text{ mert a } \overline{34} \text{ vonal mentén az}$$

indukcióvonalak nagyon ritkák, ezért  $H$  elhanyagolható

$$\int_{12} H ds = NI$$

$$H \int_{12} ds = NI \rightarrow Hl = NI \rightarrow \boxed{H = \frac{NI}{l}} \rightarrow \text{ez a formula csak a tekercs belsejében igaz, a végek közelében és a tekercsen kívül már nem.}$$

### Elektrodinamikai erőhatás végtelen hosszú, párhuzamos, egyenes áramvezetők között vákuumban



$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi d} \rightarrow B_1 = \mu_0 H_1$$

$$\vec{F}_{12} = I_2 \int d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1$$

$$\underline{\underline{F_{12}}} = I_2 B_1 \int ds_2 = \underline{\underline{\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l}}$$

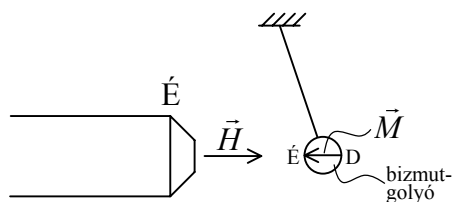
Az áramokkal nem úgy áll a helyzet, mint a töltésekkel: míg az egynemű töltések taszítják egymást, az egyirányú áramok között vonzóerő lép fel (természetesen az ellenkező irányú áramok taszítják egymást).

Speciális eset:

$$I_1 = I_2 = 1A$$

$$l = d = 1m$$

$$F_{12} = \frac{1,256 \cdot 10^{-6}}{6,28} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-7} N}}$$

Az anyagok osztályozása mágneses viselkedésük szerinta.) Diamágnes

Ilyen anyagok még például: *Cu, Ag, Au*.

A permanens mágnes É-i pólusánál a mágneses indukcióvektor a mágnestől kifelé mutat.

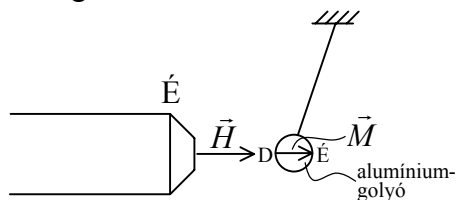
$$\vec{H} \uparrow \downarrow \vec{M} \quad , \quad \vec{M} = \chi \vec{H} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\chi < 0}}, \quad \chi \approx -10^{-6} \dots -10^{-5}$$

A mágneses szuszceptibilitás a diamágnesek esetében hőmérséklet független.

A diamágneses anyag atomja (külső mágneses mező híján) nem bír mágneses dipólus nyomatékkal, mert az atomok elektronjainak dipólusnyomatékai kompenzálják egymást. Külső mágneses mező hatására az atomok mágneses dipólusnyomatékot nyernek, melynek iránya a mágnesező tér irányával ellentétes, ezt a jelenséget hívják **indukált mágneses polarizációnak**.

Amikor a mágneses mező nulláról felnövekszik, az atomokban áram indukálódik és ennek iránya olyan, hogy mágneses hatásával gátolja az indukáló változást  $\rightarrow$  Lenz-szabály.

Az indukált áram fojtán az elektronok mozgásából származó dipólusnyomaték megváltozik, és az elemi dipólusnyomatékok már nem kompenzálják egymást.

b.) Paramágnes

Ilyen anyagok még például: *Pt, W, Fe, Ni* <sup>800°C</sup> <sup>500°C</sup>

$$\underline{\underline{\chi > 0}}, \quad \chi \approx 10^{-5} \dots 10^{-4}$$

A paramágneses anyag atomja rendelkezik (külső mágneses mező híján is) mágneses dipólusnyomatékkal, de az atomi dipólusnyomatékok külső mágneses tér híján kioltják egymást. A külső mágneses mező a maga irányába forgatja be – többé-kevésbé – az atomi dipólusokat, ez a **rendeződési mágneses polarizáció**.

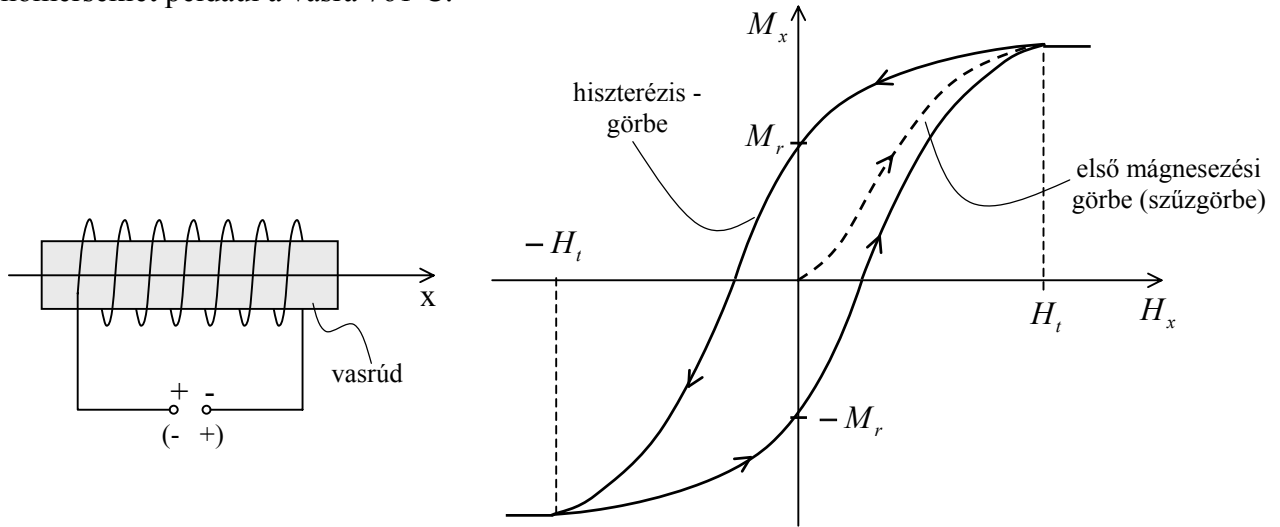
A beforgatás annál inkább sikerül, minél erősebb a mágnesező tér, és annál kevésbé, minél magasabb a hőmérséklet.

A paramágnesek mágneses szuszceptibilitása a hőmérséklet növekedésével csökken.

Természetesen indukált polarizáció a paramágnesekben is van, ám ennek hatása eltörlül a rendeződési polarizáció mellett.

c.) Ferromágnes anyagok

Ezek az anyagok a legjobban felmágnesezhető anyagok: *Fe, Ni, Co, Heusler-fél mangán öntvény*. A lineáris anyagegyenletet nem követik. A rájuk jellemző hőmérsékleten (Curie-ponton) túlhevítve ugrásszerűen elvesztik a ferromágneses tulajdonságukat és paramágnessé válnak, ez a hőmérséklet például a vasra 761°C.



A mágnesezési görbe felvétele:

- az anyagot felmelegítjük a Curie-pont fölé és azután visszahűtjük → így az anyag kiindulási állapotában nem mutat mágneses tulajdonságot,
- a gerjesztő áramot 0-ról fokozatosan növeljük, egy bizonyos értéken túl már nem nő az anyag mágnesezettsége, ekkor elkezdjük csökkenteni az áramerősséget,
- az áramforrás pólusait  $M_r$ -nél felcseréljük, és ismét növeljük az áramerősséget, ekkor egy értéken túl ismét nem változik tovább az anyag mágnesezettsége,
- ekkor elkezdjük ismét csökkenteni az áramerősséget, és  $-M_r$ -nél a pólusokat visszacseréljük,
- az áramerősséget ismét növeljük a görbe záródásáig.

**Mágneses telítettség ( $H_t$ ):** bizonyos, az anyagra jellemző térerősegen túl az anyag mágnesezettsége már nem növekszik (de nem is csökken) ezt a térerősséget telítettségű térerőnek nevezzük.

**Remanens mágnesség ( $M_r$ ):** az a mágnesezettség, amely a külső mágneses térerősséget nullára csökkentve visszamarad az anyagban.

Az  $\vec{M}$  és  $\vec{H}$  közötti kapcsolat még csak nem is egyértékű. Pontról pontra meghatározható a

$$\chi = \frac{dM_x}{dH_x} \quad \text{lokális szuszceptibilitás.}$$

A ferromágneses anyag lokális szuszceptibilitása elérheti az ezres, sőt a tízezres nagyságrendet is.

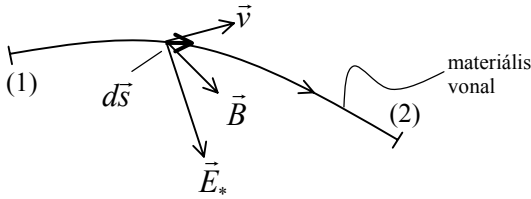
A ferromágneses anyagban vannak olyan kicsiny tartományok, domének ( $10^{-9} \dots 10^{-13} \text{ cm}^3$ ), amelyeken belül az atomi elektronok saját mágneses momentuma rendezve van. Amerre a rendezett saját mágneses momentumok mutatnak az a doménekben a kitüntetett irány.

Külső mágneses mező és mágneses előélet híján a kitüntetett irányok rendezetlensége miatt a domének egymás hatását kioltják. A külső mágneses mező hatására azok a domének híznak meg, amelyeknek a kitüntetett iránya kis szöveget zár be a mágnesező tér erősségével.

Igen erős külső mágneses tér esetén a domének nagy belső súrlódás mellett befordulnak a mágnesező tér irányába, beáll a mágneses telítődés.

## A mozgási elektromágneses indukció

Ha materiális vonalat mágneses mezőben mozgatunk, a benne lévő töltéshordozókra a vonallal való együttmozgásuk miatt Lorentz-erő hat.



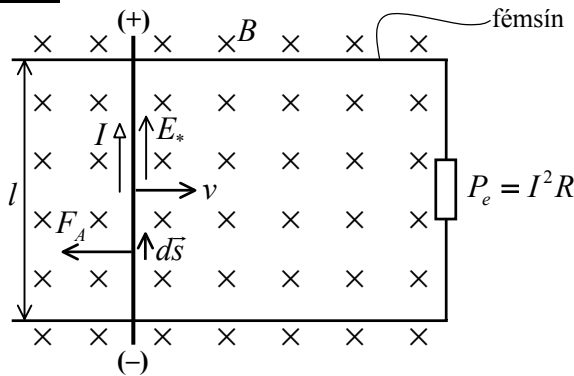
$$\vec{F}_* = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\underline{\underline{U_{12}^*}} = \int_{12} \vec{E}_* \cdot d\vec{s} = \int_{12} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \rightarrow \text{Neumann-formula}$$

A mágneses mezőben mozgó 12 materiális vonalban elektromotoros erő lép fel, más szóval indukálódik, ezt a Neumann-formulából számíthatjuk ki, a jelenséget mozgási elektromágneses indukciónak nevezzük.

Ha a mozgó materiális vonal zárt vezetőkör vagy annak egy része, akkor az elektromotoros erő áramot létesíthet, ezt indukált áramnak nevezzük.

### Lineáris generátor



$$E_* = |\vec{v} \times \vec{B}| = vB$$

$$P_m \geq F_A v = IlBv = U_* I \geq I^2 R = P_e$$

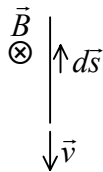
$$(U_* \geq IR)$$

A mágneses mező homogén és stacionárius. A mozgó rúd áramforrássá vált. Az áramforrás belsejében az idegen térerő a negatívól a pozitív pólus felé mutat. A mágneses mezőben mozgó áramjárta vezetőre Ampère-erő hat:  $\vec{F}_A = I\vec{l} \times \vec{B}$

Lenz törvénye a mozgási indukcióra: az indukált áram iránya olyan, hogy a reá ható Ampère-erő az indukáló hatást fékezi.

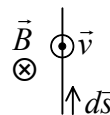
A rúd mozgásával áramot indukálunk, mechanikai teljesítményt fektetünk be, s ennek árán elektromos teljesítményt nyerünk a fogyasztón.

$$\underline{\underline{U_*}} = \int_{(-)}^{(+)} \vec{E}_* \cdot d\vec{s} = \int_{(-)}^{(+)} vB ds = vB \int_{(-)}^{(+)} ds = vBl \rightarrow \text{a mozgatott rúdban indukálódott elektromotoros erő}$$



$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

0



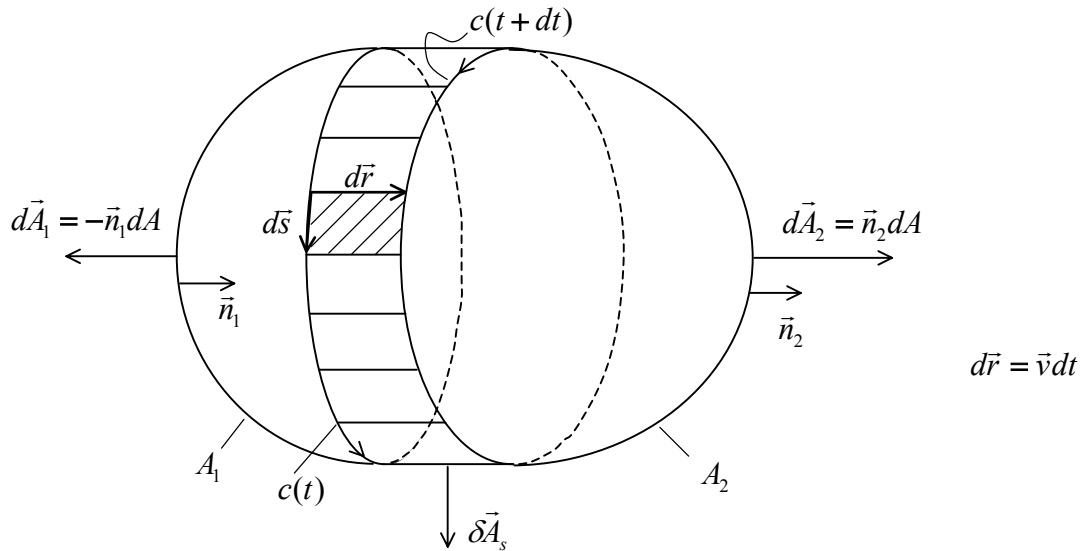
$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

0

A materiális vonalban csak akkor indukálódik elektromotoros erő, ha a vonal mozgása során indukcióvonalakat metsz át.

A mozgási indukció törvényének van egy másik, további tanulmányaink szemszögéből hasznosabb megfogalmazása, ez a Michael Faraday nevéhez fűződik.

## A mozgási indukció Faraday-féle törvénye



A materiális vonal egyes pontjai elmozdulásvektorainak megrajzolásával előállt egy kis szalagfelület.

A két sapka és a szalagfelület együtt zárt felületet képez, erre alkalmazzuk a mágneses Gauss-törvényt. A normális irányt a peremvonal irányításának ismeretében a dugóhúzó szabállyal dönthetjük el.

$$\delta \vec{A}_s = d\vec{s} \times d\vec{r} \quad (\text{zárt felületből a felületelem-vektor kifelé mutat})$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\underbrace{\int_{A_1} \vec{B} \cdot (-\vec{n}_1) dA}_{-\Phi_A(t)} + \int_{\delta A_s} \vec{B} \cdot (d\vec{s} \times \frac{d\vec{r}}{v dt}) + \underbrace{\int_{A_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dA}_{\Phi_A(t+dt)} = 0$$

$$\text{A } c(t) \text{ görbe által körülfogott mágneses fluxus: } \Phi_A(t) = \int_{A_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dA,$$

$$\text{a } c(t+\Delta t) \text{ görbe által körülfogott mágneses fluxus: } \Phi_A(t+\Delta t) = \int_{A_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dA.$$

$$\text{A vegyes szorzat tényezői ciklikusan permutálhatóak: } \vec{B} \cdot (d\vec{s} \times \vec{v}) = d\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\int_{\delta A_s} \vec{B} \cdot (d\vec{s} \times \vec{v}) = \int_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = U_c^* \rightarrow \text{Neumann törvénye szerint, ez a zárt, materiális vonalban indukált elektromotoros erő}$$

$$\Phi_A(t+dt) - \Phi_A(t) + U_c^* dt = 0$$

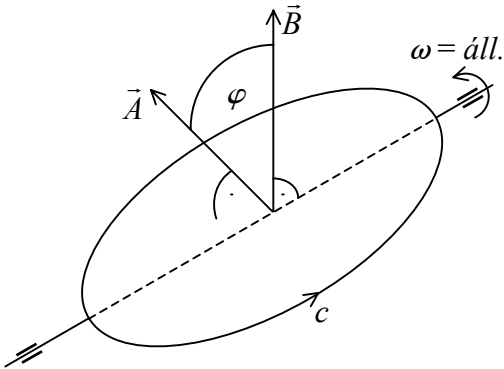
$$\boxed{U_c^* = -\frac{d\Phi_A}{dt}}$$

**Faraday törvénye a mozgási indukcióra**

**A stacionárius mágneses térben mozgó irányított, zárt materiális vonalban indukálódó elektromotoros erő ellentétben egyenlő a vonal által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságával.**

## A váltakozó áramú generátor modellje

Merev, sík vezetőhurok homogén, stacionárius mágneses mezőben egyenletesen forog a mágneses indukcióvektorra merőleges tengely körül.



$$\Phi_A = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \varphi$$

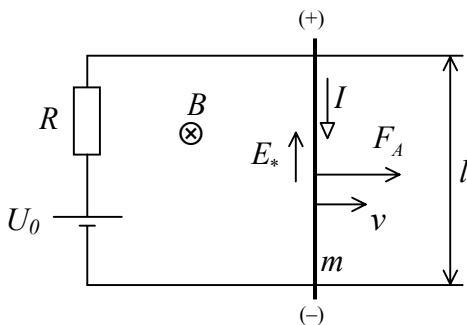
$$U_c^* = -\frac{d\Phi_A}{dt} = -AB(-\sin \varphi) \frac{\dot{\varphi}}{\omega} \quad / t = 0 : \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \omega t$$

$$U_c^* = AB\omega \sin \omega t \quad / U_{\max} = AB\omega$$

Ha nem egyetlen vezetőhurokot, hanem egy  $N$  menetű lapos tekercset forgatunk, az elektromotoros erő maximuma az  $N$ -szeresére nő, mert az egyes menetekben indukálódott elektromotoros erők összeadódnak.

## A lineáris motor modellje

A mágneses mező homogén és stacionárius. Nincs súrlódás, a sínek és a rúd ellenállása elhanyagolható.



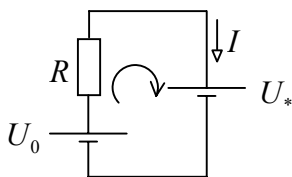
$$t = 0 : v = 0$$

$$\vec{F}_A = I \vec{l} \times \vec{B} \quad F_A = IlB$$

$$\text{Newton mozgás egyenlete: } m \frac{dv}{dt} = F_A = IlB$$

$$\vec{E}_* = \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow E_* = vB \rightarrow U_* = vBl$$

Az elrendezés villamos kapcsolási rajza:



A motorba belevezetve az áramot, az Ampère-erő mozgást okoz. Az áramforrás teljesítménye árammechanikai teljesítményt nyerünk. Fogy az akkuból az energia és egyre több mechanikai energiája lesz a rúdnak.

Kirchhoff-féle huroktörvény:

$$IR + U_* - U_0 = 0 \rightarrow I = \frac{U_0 - Blv}{R}$$

→ Ahogy a sebesség nő a motor árama egyre gyengül.



A motor mozgásegyenlete:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{U_0 l B}{R} - \frac{(Bl)^2 v}{R} \quad / : m, \frac{1}{\tau} = \frac{(Bl)^2}{mR}, \text{ a gyorsulás a } t=0 \text{ pillanatban: } a_0 = \frac{U_0 l B}{mR},$$

$$\tau = \frac{mR}{(Bl)^2} : \text{időállandó}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\tau} (a_0 \tau - v) \quad / \text{ ez szétválasztható differenciálegyenlet}$$

$$\frac{dv}{a_0 \tau - v} = \frac{1}{\tau} dt \quad / \int$$

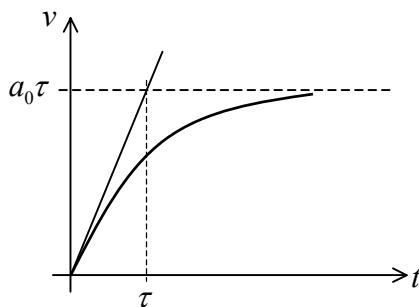
$$\int \frac{dv}{a_0 \tau - v} = \frac{1}{\tau} \int dt$$

$$-\ln \frac{a_0 \tau - v}{C} = \frac{t}{\tau}$$

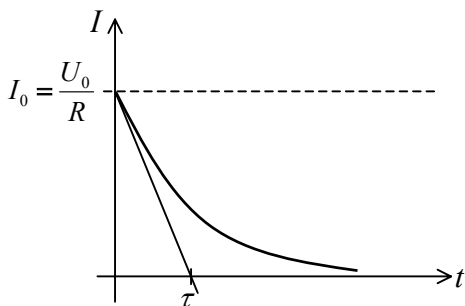
$$\frac{a_0 \tau - v}{C} = e^{-t/\tau}$$

$$v = a_0 \tau - C e^{-t/\tau} \quad / t=0 : v=0 \rightarrow 0 = a_0 \tau - C \rightarrow C = a_0 \tau$$

$$\underline{\underline{v = a_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})}}$$



$$\text{Ha } t \rightarrow \infty : v \rightarrow v_\infty = a_0 \tau, \quad v_\infty = \frac{U_0 l B}{mR} \frac{mR}{(Bl)^2} = \frac{U_0}{Bl}$$



$$I = \frac{U_0}{R} - \frac{Bl U_0}{R Bl} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

A hatásfok a mozgórész által nyert energiának és az áramforrás által végzett munkának a hányadosa.

$$\text{eredmény: } T_\infty = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m \frac{U_0^2}{B^2 l^2}, \text{ ráfordítás: } W_t = \int_0^\infty U_0 I dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = \tau \frac{U_0^2}{R} \underbrace{\left[ e^{-t/\tau} \right]_0^\infty}_1 = \frac{U_0^2}{R} \frac{mR}{B^2 l^2}$$

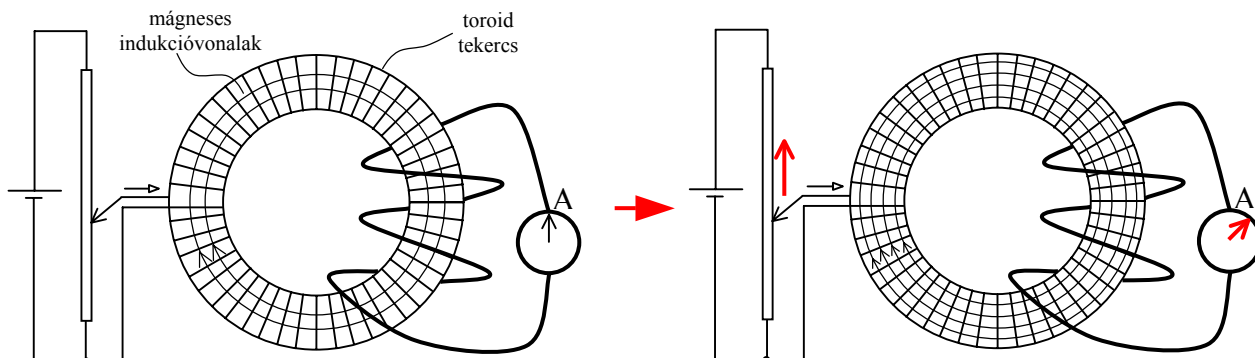
$$\text{hatásfok: } \eta = \frac{T_\infty}{W_t} = 0,5$$

A nyugalmi elektromágneses indukció

emlék:  $U_* = -\frac{d\Phi}{dt}$  mozgási indukció

Ha zárt vezetőhurok stacionárius mágneses mezőben mozog, és az általa körülfogott fluxus változik, akkor benne áram indukálódik. Ha a fluxus változását a vezetőhurokban nem mozgás, hanem a mágneses mező időbeni megváltozása okozza, indukálódik-e benne áram?

a) kísérlet



Primer kör – áramforrás van benne, szekunder kör – áramforrás nincs benne.  
A mágneses tér gyakorlatilag a tekercs belsejére korlátozódik.

Amíg a primer áramot növeljük (vagy csökkentjük) addig a szekunder körben az amper mérő áramot jelez, noha a szekunder körben áramforrás nincs. Nem a primer áram, csak annak változása idézi elő az áramot a szekunder körben.

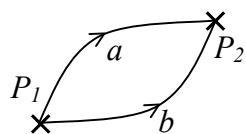
Az indukcióvonal-nyalábot a szekunder kör is körülfogja, és ennek a nyalábnak a vonalsűrűsége a primer áram növelésével nő, tehát a szekunder fluxus (nem mozgás, hanem a mágneses mező időbeni változása miatt) változik s, erre tapasztalat szerint indukált áram jelenik meg.

A szekunder áramot Lorentz-erő nem indíthatja meg, hiszen a szekunder kör áll, vezetőke mentén szinte nincs is mágneses tér:  $\vec{E}_* = \vec{v} \times \vec{B}$ .

A jelenségre egyetlen magyarázat van: a mágneses mező időbeli változása következtében elektromos mező jött létre (indukálódott), e mezőben a szekunder kör vonala mentén feszültség van, és ez a vezetőben áramot indít meg. A leírt jelenséget nyugalmi indukciónak nevezzük.

Ez az indukált elektromos mező nem olyan, mint az elektrosztatikai mező: míg abban zárt vonal mentén a feszültség zérus, itt a szekunder kör zárt vonala mentén a feszültség 0-tól különböző, éppen ez hajtja az áramot. Az indukált elektromos mező tehát nem konzervatív, benne helyzeti energiát nem értelmezhetünk.

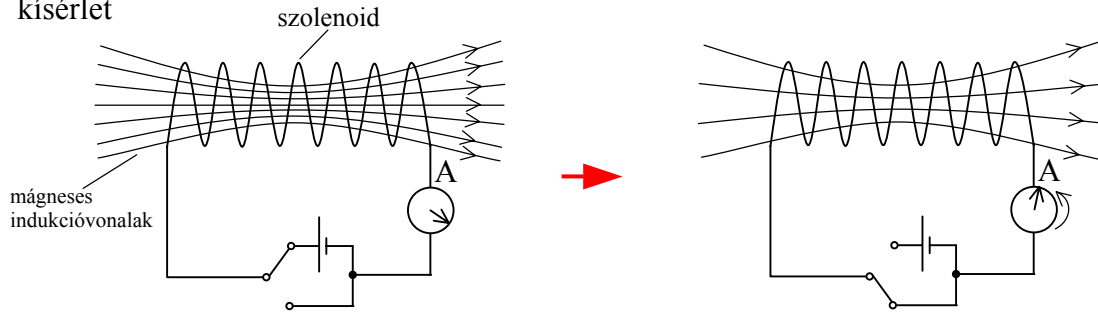
A feszültség itt nem potenciálkülönbség, mert nem létező potenciálnak nem létezik különbsége.



Két pont között felvett, két különböző görbén a feszültség általában különböző,  $U_a \neq U_b$ !

Ami a szekunder körben indukálódik, az nem elektromotoros erő hanem elektromos körfeszültség. Az indukált elektromos mező akkor is megjelenik, ha a szekunder kör nincs jelen, a vákuumban felvett geometriai zárt vonal mentén is van indukált körfeszültség, indukált áram azonban természetesen nincs, mert ahhoz vezető kell.

b) kísérlet



Lekapcsoljuk az áramforrást és azt látjuk, hogy az áram csak fokozatosan csökken zérusra, nem ugrásszerűen.

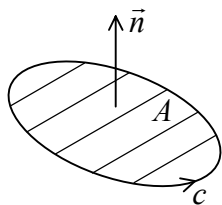
Mi tartja fenn a körben az áramot az áramforrás lekapcsolása után?

A kör árama változik (gyengül) ezzel változik az általa gerjesztett mágneses mező, ez indukált elektromos mezőt létesít, ebben a mezőben az áramkör mentén feszültség van, ez tartja fenn az áramot.

Az (a) kísérletben a szekunder kör áramát egy másik kör (a primer) áramának a megváltozása idézte elő, ez a kölcsönös indukció, a (b) kísérletben a kör saját áramának a megváltozása folytán jön létre indukált feszültség, ez az önindukció. Ez a két válfaja van a nyugalmi indukciónak.

Mi a nyugalmi indukció mennyiségi törvénye?

A törvény analóg a mozgási indukcióra vonatkozó Faraday-törvénnyel.



$$U_c = -\frac{d\Phi_A}{dt}$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

**Faraday törvénye a nyugalmi indukcióra**  
(integrális alak)

**A rögzített, irányított, nyílt felületre vett mágneses fluxus változási gyorsasága ellentétben egyenlő a felület peremvonalára vett elektromos feszültséggel. Az egyenlet bal oldala az elektromos térerősség cirkulációja.**

Az elektrosztatikus mezőt nyugvó töltések hozták létre, ennek indukciójai a pozitív töltéseken erednek és a negatív töltéseken érnek véget. Az indukált elektromos mezőt nem töltések keltik (hanem az időben változó mágneses tér), ezért ennek indukciójai sehol nem kezdődnek és nem is érnek véget.

$$\oint_c \vec{w} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot} \vec{w} \cdot d\vec{A} \quad \text{Stokes integrál átalakítási tétele}$$

Mivel az A felület rögzített, Faraday törvényében a felületi integrálás és az idő szerinti deriválás sorrendje felcserélhető.

$$\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

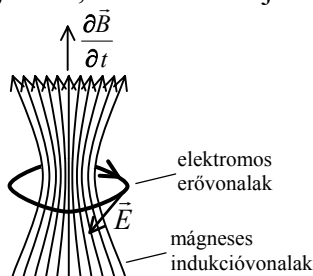
/ alkalmazzuk Stokes tételét az  $\vec{E}$  elektromos vektormezőre

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\int_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \quad \text{/ ez bármely A felületre igaz, ezért az integrandusoknak meg kell egyezniük:}$$

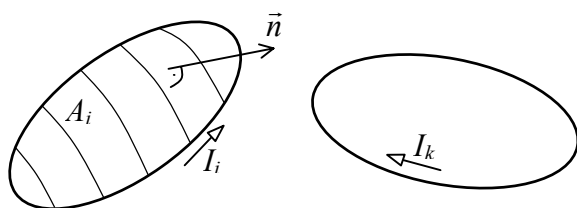
$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{lokális alak}$$

Lenz-szabály a nyugalmi indukcióra (balképszabály): ha bal kezünk hüvelykujját a mágneses mező változási gyorsaságának irányába állítjuk be, akkor a behajlított ujjaink mutatják az indukált elektromos mező erővonalainak az irányát.



### Lineáris áramkörök induktivitásai

Van  $n$  számú rögzített, vonalas vezetőből készült áramhurok. Feltesszük, hogy a lineáris mágneses anyagegyenlet érvényes, emiatt áll a szuperpozíció törvénye a  $\vec{B}$  mágneses indukcióra.



$k, i = 1, 2, \dots, n$   
 $\Phi_i$  - az  $i$ -edik kör által közrefogott fluxus

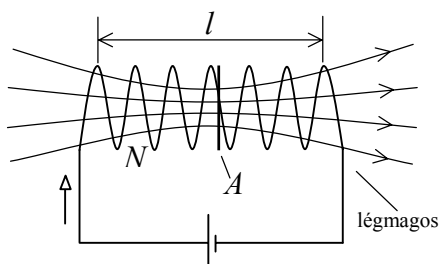
$$\Phi_i = \int_{A_i} \vec{B} \cdot d\vec{A}_i \quad / \quad \vec{B}_k : \text{ az } I_k \text{ áram gerjesztette mágneses mezőben az indukció, } \vec{B} = \sum_{k=1}^n \vec{B}_k$$

$$\Phi_i = \int_{A_i} \sum_{k=1}^n \vec{B}_k \cdot d\vec{A}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_{A_i} \vec{B}_k \cdot d\vec{A}_i}_{\Phi_{ik}} \quad / \quad \Phi_{ik} : \text{ a } k\text{-adik áram gerjesztette mágneses mezőben az } i\text{-edik kör által körfogott mágneses fluxus}$$

$\vec{B}_k \propto I_k \Rightarrow \Phi_{ik} \propto I_k : \Phi_{ik} = L_{ik} I_k$ , az  $L_{ik}$  mennyiségeket induktivitásoknak hívjuk,  $L_{ik} = L_{ki}$ .  
 $i \neq k : L_{ik}$  kölcsönös indukciós együttható,  
 $i = k : L_{ii}$  önindukciós együttható.

$$\boxed{\Phi_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} I_k}, \quad [L] = \frac{[\Phi]}{[I]} = 1 \frac{Vs}{A} = 1 \Omega s = 1 \text{ henry (H)}$$

### Szolenoid önindukciós együtthatója



Belsejében:  $H = N \frac{I}{l}$   
 $B = \mu_0 H$   
 Menetfluxus:  $\Phi_n = BA = \mu_0 N \frac{A}{l} I$

Mivel a tekercsen kívül a mágneses tér igen gyenge, a kör fluxusa gyakorlatilag a szolenoid fluxusával egyezik meg.

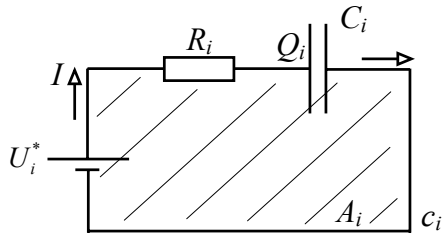
Tekercsfluxus:  $\Phi = N \Phi_n = \mu_0 N^2 \frac{A}{l} I$

$$\underline{\underline{L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}}}$$

Mivel  $L$  arányos  $N^2$ -tel, egy szolenoid induktivitása akár több milliószor akkora lehet, mint egy vezetőhuroké. Ezért ha egy vezetőkörben tekercs van, a kör induktivitása gyakorlatilag a tekercsével vehető egyenlőnek.

## Az általánosított hurokegyenletek

$U_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}$ , ahol  $U_i$ : az i-edik vezetőkör elektromos feszültsége  
 $\Phi_i$ : az i-edik áramkör által körülfogott mágneses fluxus



$R_i$  – a kör teljes ohmos ellenállása  
 $C_i$  – a kör teljes kapacitása  
 $Q_i$  – annak a lemeznek a töltése, amelyre az áram nyílja mutat

$$\left. \begin{aligned} U_i &= R_i I_i + \frac{Q_i}{C_i} - U_i^* \\ \frac{d\Phi_i}{dt} &= \sum_{k=1}^n L_{ik} \dot{I}_k \end{aligned} \right\} R_i I_i + \frac{Q_i}{C_i} - U_i^* = -\sum_{k=1}^n L_{ik} \dot{I}_k \rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^n L_{ik} \dot{I}_k + R_i I_i + \frac{1}{C_i} Q_i = U_i^*}, i=1, 2, \dots, n$$

A kondenzátor lemezére  $dt$  idő alatt  $I_i dt$  töltés áramlik rá, ennyivel változik a kondenzátor töltése.

$$I_i dt = dQ_i,$$

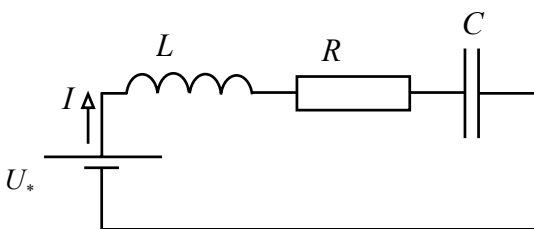
$$I_i = \frac{dQ_i}{dt} = \dot{Q}_i.$$

Az általános hurokegyenletek a  $Q_i$  töltésekre nézve inhomogén, lineáris, másodrendű, szimultán egyenletrendszert képeznek állandó együtthatókkal. Eszerint a megoldáshoz  $2n$  számú kezdeti feltétel ismerete kell, például megadjuk, a  $t=0$  pillanatban az összes áramot és az összes töltést.

Ideális tekercs drótja mentén a feszültség 0 (nincs ohmos ellenállása).

## A mágneses energia

Legyen  $n=1$ , azaz egy hurok van.



$$LI + RI + \frac{Q}{C} = U_* \quad / \cdot I = \dot{Q}$$

$$LII + RI^2 + \frac{1}{C} Q\dot{Q} = U_* I$$

$$\frac{d}{dt} \left( L \frac{I^2}{2} \right) + RI^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} \right) = U_* I$$

A jobb oldalon a telep teljesítménye áll, a bal oldal 2. tagja az elektromos teljesítmény a fogyasztón, a 3. tag pedig az elektromos energia változási gyorsasága.

A kör árama mágneses mezőt gerjeszt, természetesen e mezőnek is van energiája, mely az áram változásával változik. Az első tag szükségképpen a kör mágneses energiájának változási gyorsasága.

A telep munkája

1. a fogyasztón elektromos munkavégzésre,
2. a kondenzátor elektromos energiájának megváltoztatására,
3. a tekercs mágneses energiájának megváltoztatására fordítódik.

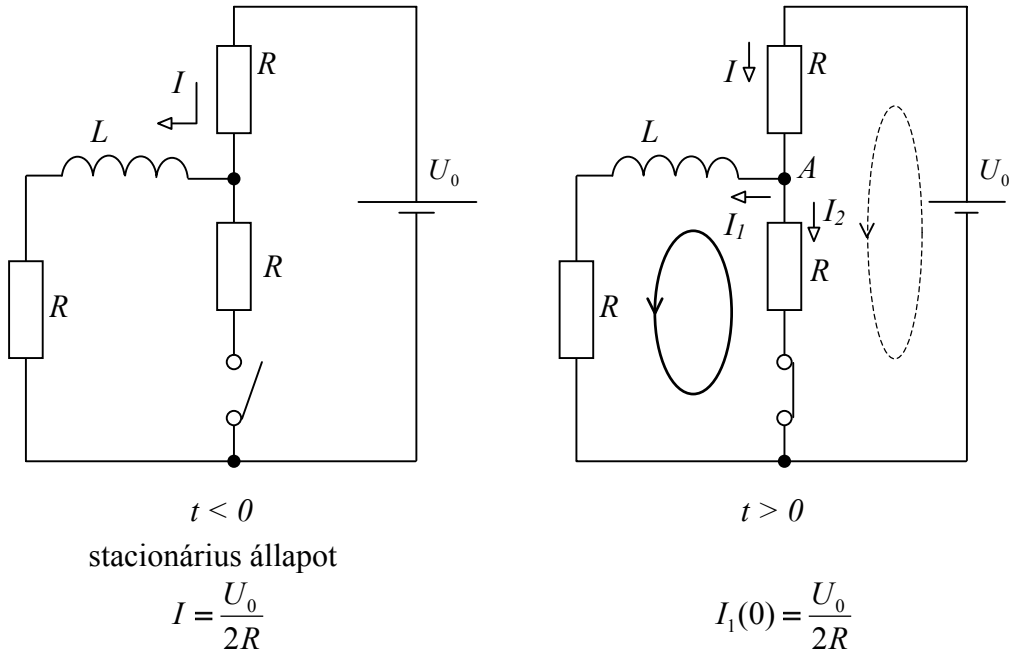
$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} LI^2} = \frac{1}{2} \Phi I$$

Szolenoid esetén:

$$\Phi = NBA, \quad I = \frac{HI}{N} \quad \rightarrow \quad W_m = \frac{1}{2} NBA \frac{HI}{N} = \frac{1}{2} BH \underbrace{Al}_{V}$$

A mágneses energiasűrűség a tekercsben:  $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ , ez az összefüggés a mágneses energia-sűrűség általános formulája, akkor is igaz tehát, ha a mágneses mezőt nem szolenoid árama gerjesztette.

**Egy tranziens (átmeneti) jelenség**



Tekercset tartalmazó ágban az áram ugrásszerűen nem változhat meg. Ugrásszerű változáskor ugyanis  $\dot{I}$  végtelen volna, ami azt jelentené, hogy az indukált feszültség végtelen.

Hogyan változik a telepen átfolyó áram erőssége?

Csomóponti törvény az A csomóponton:  $I = I_1 + I_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = I - I_1$

A szaggatott vonallal jelzett hurokban tekercs nincs, az induktivitás elhanyagolható  $\rightarrow$  a körfeszültség 0.

$$IR + I_2R - U_0 = 0 \quad \rightarrow \quad (I + I_2)R - U_0 = 0 \quad \rightarrow \quad 2I - I_1 = \frac{U_0}{R} \quad \rightarrow \quad I = \frac{I_1}{2} + \frac{U_0}{2R}$$

A vastag vonallal jelzett hurokban:  $(I_1 - I_2)R = -L \frac{dI_1}{dt}$

$$2I_1 - I = -\frac{L}{R} \frac{dI_1}{dt}$$

$$2I_1 - \frac{I_1}{2} - \frac{U_0}{2R} = -\frac{L}{R} \frac{dI_1}{dt}$$

/ lineáris, elsőrendű, inhomogén differenciálegyenlet

$$\frac{L}{R} \frac{dI_1}{dt} + \frac{3}{2} I_1 - \frac{U_0}{2R} = 0$$

$$\frac{2}{3} \frac{L}{R} \frac{dI_1}{dt} + I_1 - \frac{U_0}{3R} = 0$$

/  $\tau = \frac{2}{3} \frac{L}{R}$ : a kör időállandója

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{\tau} \left( I_1 - \frac{U_0}{3R} \right)$$

$$\int \frac{dI_1}{I_1 - \frac{U_0}{3R}} = -\int \frac{dt}{\tau}$$

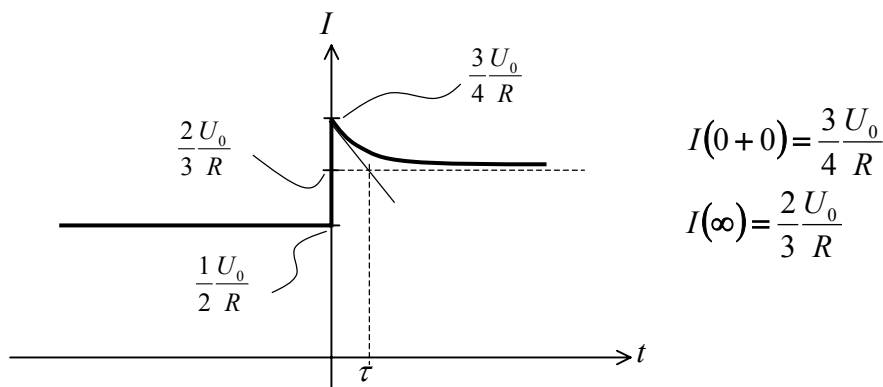
$$\ln \frac{I_1 - \frac{U_0}{3R}}{C} = -\frac{t}{\tau}$$

$$I_1 = Ce^{-t/\tau} + \frac{U_0}{3R}$$

$$t=0: I_1 = \frac{U_0}{2R} \rightarrow \frac{U_0}{2R} = \frac{U_0}{3R} + C \rightarrow C = \frac{U_0}{6R}$$

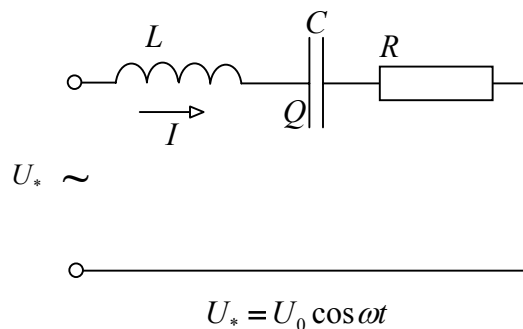
$$I_1 = \frac{U_0}{6R} (e^{-t/\tau} + 2)$$

$$\underline{\underline{I}} = \frac{I_1}{2} + \frac{U_0}{2R} = \frac{U_0}{12R} (e^{-t/\tau} + 2) + \frac{U_0}{2R} = \underline{\underline{\frac{U_0}{12R} (e^{-t/\tau} + 8)}}$$



$\tau$  : ennyi idő alatt csökkenne az áram  $\frac{2U_0}{3R}$ -re, ha a kezdeti mértékben csökkenne folyamatosan.  $5\tau$  idő alatt az áram gyakorlatilag felveszi a végső értékét, az eltérés már 1% alatt van.

A folyamatot azért hívjuk tranziensnek, mert az egyik stacionárius állapotból ( $I = U_0/2R$ ), egy másik stacionárius állapotba ( $I = 2U_0/3R$ ) vezet át.

Gerjesztett elektromágneses rezgések

Gerjesztett elektromágneses rezgés

Emlék:

Gerjesztett mechanikai rezgés mozgásegyenlete:

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}Q = U_0 \cos \omega t$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$m\dot{v}_x + \kappa v_x + Dx = F_0 \cos \omega t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\alpha = \frac{\kappa}{2m}$$

$$Q \rightarrow x$$

$$\dot{Q} = I \rightarrow \dot{x} = v_x$$

$$U_* \rightarrow F_x^{(g)}$$

$$L \rightarrow m$$

$$R \rightarrow \kappa$$

$$1/C \rightarrow D$$

$$Q_h = B e^{-\alpha t} \sin(\omega_s t + \varphi_0)$$

$$B = B(\omega)$$

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$x = X_h + x_p$$

$$X_h = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_s t + \varphi_0)$$

$$A = A(\omega)$$

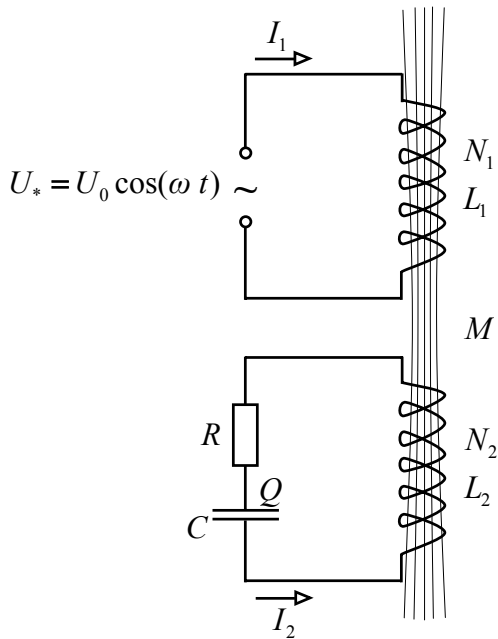
A tranziens szakasz után, állandósult állapotban gyakorlatilag  $x = x_p$ -vel, és ez

$$Q = Q_p = B \cos(\omega t - \delta)$$

$$x_p = A \cos(\omega t - \delta)$$



**Szorosan csatolt transzformátor állandósult állapota ohmos és kapacitív terhelés esetén**



Szoros csatolás: a primer és a szekunder tekercs menetfluxusa egyenlő

$L_1$  – a primer kör önindukciós együtthatója

$L_2$  – a szekunder kör önindukciós együtthatója

$M$  - a két kör kölcsönös indukciós együtthatója

A primer kör ohmos ellenállása elhanyagolható.

A feladat: határozzuk meg a primer és a szekunder áram csúcsértékének arányát.

Szoros csatolás:

$$\Phi_1 = N_1 \Phi_m, \quad \Phi_2 = N_2 \Phi_m, \quad a = \frac{N_2}{N_1} : \text{áttétel}$$

Emlék:  $\Phi_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} I_{ik}$

primer fluxus:  $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$

szekunder fluxus:  $\Phi_2 = M I_1 + L_2 I_2$

Megnézzük, hogy szoros csatolás esetén milyen összefüggés van  $L_1$ ,  $L_2$ , és  $M$  között:

$$I_1 = 0 : \quad \begin{array}{l} N_1 \Phi_m = M I_2 \\ N_2 \Phi_m = L_2 I_2 \end{array} \quad / \text{II} : \text{I} \quad \underline{\quad \quad \quad} \quad a = \frac{L_2}{M} \quad \text{(a)}$$

$$I_2 = 0 : \quad \begin{array}{l} N_1 \Phi_m = L_1 I_1 \\ N_2 \Phi_m = M I_1 \end{array} \quad / \text{II} : \text{I} \quad \underline{\quad \quad \quad} \quad a = \frac{M}{L_1} \quad \text{(b)}$$

Az (a) és (b) egyenletet összeszorozzuk:  $a^2 = \frac{L_2}{L_1} \rightarrow L_2 = a^2 L_1$

Szoros csatoláskor a kölcsönös indukció mértani középértéke a két önindukciós együtthatónak:

$$L_1 L_2 = M^2 \rightarrow M^2 = L_1^2 a^2 \rightarrow M = a L_1$$

Emlék:  $\sum_{i=1} L_i \dot{I}_i + R I_i + \frac{1}{C} Q_i = U^*$  - általános hurokegyenletek

A primer kör differenciálegyenlete:

$$L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 = U_0 \cos(\omega t) \quad / \frac{d}{dt}$$

A szekunder kör differenciálegyenlete:

$$M \dot{I}_1 + L_2 \dot{I}_2 + R I_2 + \frac{Q}{C} = 0 \quad / \frac{d}{dt}, \quad \dot{Q} = I_2$$

Most a mechanikában tanult módszerrel a zavaró tagot exponenciális alakúvá alakítjuk:

$$+ \underline{L_1 \ddot{I}_1 + M \ddot{I}_2 = -U_0 \omega \sin(\omega t)} \quad / \cdot \left( -\frac{i}{\omega} \right)$$

$$+ \underline{M \ddot{I}_1 + L_2 \ddot{I}_2 + R \dot{I}_2 + \frac{1}{C} I_2 = 0} \quad / \cdot \left( -\frac{i}{\omega} \right)$$

$\bar{Q}$  - komplex töltés:  $\bar{Q} = Q - \frac{i}{\omega} I_2$  : a komplex töltés időderiváltja a komplex szekunder áram:

$$\bar{I}_2 = \dot{\bar{Q}} = I_2 - \frac{i}{\omega} \dot{I}_2 ; \quad \bar{I}_1 - \text{komplex primer áram: } \bar{I}_1 = I_1 - \frac{i}{\omega} \dot{I}_1$$

$$(1) \quad L_1 \dot{\bar{I}}_1 + M \dot{\bar{I}}_2 = U_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) = U_0 e^{i\omega t}$$

$$M \dot{\bar{I}}_1 + L_2 \dot{\bar{I}}_2 + R \bar{I}_2 + \frac{1}{C} \bar{Q} = 0 \quad / \frac{d}{dt}$$

$$(2) \quad M \ddot{\bar{I}}_1 + L_2 \ddot{\bar{I}}_2 + R \dot{\bar{I}}_2 + \frac{1}{C} I_2 = 0$$

Partikuláris megoldás:  $\bar{I}_1 = \bar{I}_{10} e^{i\omega t}$ ,  $\bar{I}_2 = \bar{I}_{20} e^{i\omega t}$

$\bar{I}_{10}$  - primer komplex áramamplitúdó,  $\bar{I}_{20}$  - szekunder komplex áramamplitúdó.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{I}}_1 &= \bar{I}_{10} i \omega e^{i\omega t} & \dot{\bar{I}}_2 &= \bar{I}_{20} i \omega e^{i\omega t} \\ \ddot{\bar{I}}_1 &= i^2 \omega^2 \bar{I}_{10} e^{i\omega t} & \ddot{\bar{I}}_2 &= i^2 \omega^2 \bar{I}_{20} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$L_1 i \omega \bar{I}_{10} + \underbrace{M}_{aL_1} i \omega \bar{I}_{20} = U_0$$

$$\underbrace{M}_{aL_1} i^2 \omega^2 \bar{I}_{10} + \underbrace{L_2}_{a^2 L_1} i^2 \omega^2 \bar{I}_{20} + R i \omega \bar{I}_{20} + \frac{1}{C} \bar{I}_{20} = 0 \quad / : i \omega$$

$$\left. \begin{aligned} X_L &= \omega L_1 \quad \text{induktív} \\ X_C &= \frac{1}{\omega C} \quad \text{kapacitív} \end{aligned} \right\} \text{reaktancia } [\Omega]$$

$$i X_L \bar{I}_{10} + i a X_L \bar{I}_{20} = U_0$$

$$i a X_L \bar{I}_{10} + (i a^2 X_L + R - i X_C) \bar{I}_{20} = 0$$

Ez inhomogén, lineáris algebrai egyenlet az  $\bar{I}_{10}$  és  $\bar{I}_{20}$  ismeretlen amplitúdókra.

$$\bar{I}_{10} = \frac{D_1}{D} \quad D_1 = \begin{vmatrix} U_0 & i a X_L \\ 0 & i(a^2 X_L - X_C) + R \end{vmatrix} = U_0 [R + i(a^2 X_L - X_C)]$$

$$\bar{I}_{20} = \frac{D_2}{D} \quad D_2 = \begin{vmatrix} i X_L & U_0 \\ i a X_L & 0 \end{vmatrix} = -i U_0 a X_L$$

$$\frac{\bar{I}_{10}}{\bar{I}_{20}} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{[R + i(a^2 X_L - X_C)] i}{a X_L} = \frac{X_C - a^2 X_L + i R}{a X_L}$$

$|\bar{I}_{10}|$  primer áramamplitúdó:  $I_{1\max}$ ,  $|\bar{I}_{20}|$  szekunder áramamplitúdó:  $I_{2\max}$ .

$$\frac{I_{1\max}}{I_{2\max}} = \frac{|X_C - a^2 X_L + i R|}{a X_L} = \frac{\sqrt{R^2 + (X_C - a^2 X_L)^2}}{a X_L}$$

## Az áramsűrűség differenciálegyenlete

Homogén, nem ferromágneses vezető (fogyasztó):  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ . Ha a vezető homogén,  $\gamma$  nem függ a helytől, feltesszük, hogy az időtől sem függ.  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad \rightarrow \text{Ampère-féle gerjesztési törvény} \quad / \cdot \mu_0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \text{Faraday indukciótörvénye} \quad / \text{rot}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \nu(n\ddot{u}) = \frac{1}{\mu_0 \gamma} : \text{mágneses viszkozitás} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

$$\vec{E} = \mu_0 \nu \vec{j}$$

$$\mu_0 \nu \text{rot rot } \vec{j} = -\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

(A rotációképzés [helykoordináták szerinti deriválás] és az idő szerinti deriválás sorrendje felcserélhető.)

$$\nu \text{rot rot } \vec{j} = -\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \quad \text{rot rot } \vec{j} = \nabla \times (\nabla \times \vec{j}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{j}) - \nabla^2 \vec{j} = \text{grad div } \vec{j} - \nabla^2 \vec{j}$$

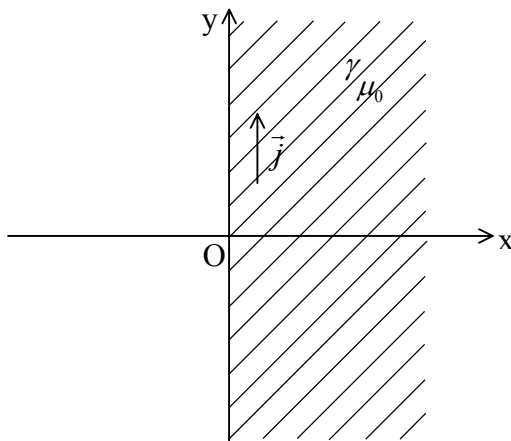
Vegyük a gerjesztési törvény divergenciáját:  $\frac{\text{div rot} \vec{H}}{\nabla(\nabla \times \vec{H})=0} = \text{div } \vec{j} = 0$ , így

$$\boxed{\nu \nabla^2 \vec{j} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}} \quad \text{másodrendű, lineáris, homogén} \\ \text{parciális differenciálegyenlet}$$

## A szkinneffektus

Az  $x > 0$  féltérlet homogén, nem ferromágneses vezető tölti ki, az  $x < 0$  féltérlet szigetelő. A vezetõben, a z tengellyel párhuzamosan váltakozó áram folyik, körfrekvenciája  $\omega$ .

Hogyan változik az áramsűrűség a hely és idő függvényében?



$$\vec{j} = (0, 0, j_z)$$

$$j_z = j_z(x, t)$$

$$\nu \frac{\partial^2 j_z}{\partial x^2} = \frac{\partial j_z}{\partial t}$$

$j_z$ -t komplex alakban keressük, s e mennyiség valós része adja a keresett áramsűrűséget.

$\bar{j}_z = \bar{J}(x) e^{i\omega t} \rightarrow$  próbafüggvény

$$\frac{\partial \bar{j}_z}{\partial x} = \frac{d\bar{J}}{dx} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{j}_z}{\partial x^2} = \frac{d^2 \bar{J}}{dx^2} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial \bar{J}_z}{\partial t} = i\omega \bar{J} e^{i\omega t}$$

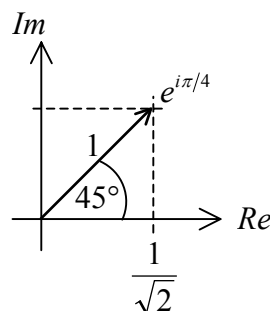
$$\nu \frac{d^2 \bar{J}}{dx^2} = i\omega \bar{J} \quad \bar{J} = J_0 e^{rx} \rightarrow \frac{d\bar{J}}{dx} = rJ_0 e^{rx}, \quad \frac{d^2 \bar{J}}{dx^2} = r^2 J_0 e^{rx} = r^2 \bar{J}$$

$$\nu r^2 = i\omega$$

$$r^2 = \frac{\omega}{\nu} e^{i\pi/2} \rightarrow r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} e^{i\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1+i) = \pm \frac{1}{\delta} (1+i),$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad [m]$$

$$e^{r_1 x} = e^{\frac{x}{\delta}} e^{\frac{i}{\delta} x}, \quad \text{ha } x \rightarrow \infty : e^{r_1 x} \rightarrow \infty$$



$e^{r_1 x}$  nem szerepelhet az áramsűrűség kifejezésében.

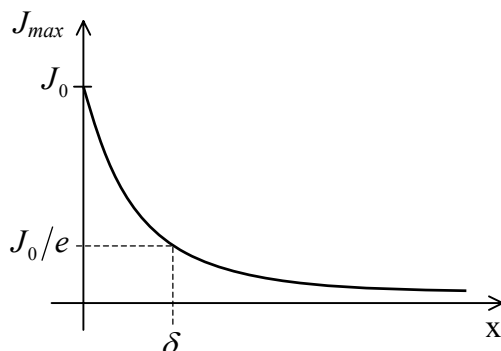
$$e^{r_2 x} = e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-\frac{ix}{\delta}}$$

$$\bar{J} = J_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-\frac{ix}{\delta}}$$

$$\bar{j}_z = J_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \rightarrow \boxed{j_z = \underbrace{J_0}_{J_{\max}} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

Tehát az áramsűrűséget olyan  $\omega$  körfrekvenciájú rezgés írja le egy adott helyen, melynek amplitúdója,  $J_{\max}$  és fáziskésése,  $x/\delta$  függ a helytől.

Behatolási mélység ( $\delta$ ): az a távolság, amelyen  $-x$  irányban haladva – az áramsűrűség amplitúdója  $e$ -ad részére csökken.



Jó vezető:  $\gamma \sim 10^7 \Omega m$ ,  $\mu_0 \sim 10^{-6} Vs / Am$

$$\nu \sim \frac{1}{10^{-6} \cdot 10^7} \sim 0,1 \frac{m}{s^2}$$

Legyen:  $\omega \sim 100 kHz$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{10^{-1}}{10^5}} \sim 1 mm$$

Tehát az ilyen nagy frekvenciájú áram a jó vezetőnek mindössze néhány milliméter vastag felületi rétegében központosul, ez a szkinneffektus. A nagy frekvenciájú áramot hordozó vezető nem tömör henger, hanem vékony cső, annál vékonyabb, minél jobb a vezető, és minél nagyobb a frekvencia.

**Az Ampère–Maxwell - féle gerjesztési törvény**

emlék:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0$       töltésmegmaradás  
 $\vec{J} = \rho \vec{v} + \vec{j}$   
 $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$       Ampère-törvény      / div  
 $\underbrace{\text{div rot} \vec{H}}_0 = \text{div} \vec{J}$

Stacionárius esetben ez összhangban áll a töltésmegmaradással, de instacionárius esetben ellentmond neki. Tehát az Ampère-törvény instacionárius esetben nem lehet jó, kiegészítésre szorul.

JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879, skót fizikus)

$\text{div} \vec{D} = \rho$       /  $\frac{\partial}{\partial t}$   
 $\frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$       / a divergenciaképzés (helykoordináták szerinti deriválás) és az idő szerinti deriválás sorrendje felcserélhető

$\text{div} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

töltésmegmaradás:  $\text{div} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0$

Ha tehát a gerjesztési törvény jobb oldalát kiegészítjük a  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  taggal, akkor a jobb oldal is divergencia-mentessé válik, és így az ellentmondás feloldódik.

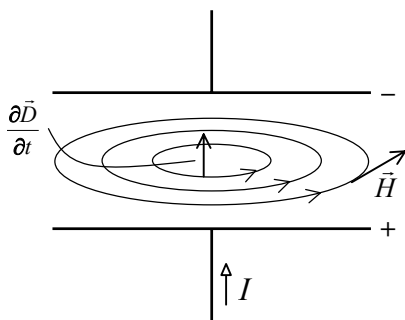
$\boxed{\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$  Ampère–Maxwell - féle gerjesztési törvény, lokális alak

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  : eltolási áramsűrűség

Az eltolási áram a szó eredeti értelmében nem áram, hiszen általában nem kapcsolódik rendezett töltésmozgáshoz. Mágneses teret azonban éppúgy gerjeszt, mint a valóságos áram.

Az Ampère–Maxwell - féle eltolási áramsűrűség arra mutat rá, hogy mágneses mezőt az időben változó elektromos mező is gerjeszthet, nem csak áramok vagy permanens mágnesek. Ez a jelenség a Faraday-féle indukció szimmetrikus párja.

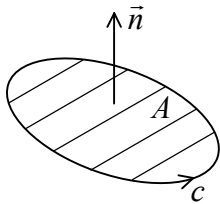
Időben változó mágneses mező elektromos mezőt indukál, (Faraday).  
 Időben változó elektromos mező mágneses mezőt gerjeszt, (Maxwell).



Emlék:  $\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Anti-Lenz szabály: ha jobb kezünk hüvelykujját az elektromos mező változási gyorságának irányába nyújtjuk ki, akkor behajlított ujjaink mutatják a gerjesztett mágneses mező erővonalainak irányát.

Integráljuk a lokális alakot egy irányított, rögzített, nyílt  $A$  felületre:



$$\int_A \text{rot} \vec{H} d\vec{A} = \underbrace{\int_A \vec{j} d\vec{A}}_{I_A} + \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{A}$$

Stokes:  $\int_A \text{rot} \vec{H} d\vec{A} = \oint_c \vec{H} d\vec{s}$

Mivel  $A$  rögzített, a rá vonatkozó felületi integrálás és az idő szerinti deriválás sorrendje felcserélhető.

$$\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{A} = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_A \vec{D} d\vec{A}}_{\Psi_A}$$

$$\boxed{\int_c \vec{H} d\vec{s} = I_A + \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} d\vec{A}}$$
 Ampère–Maxwell - féle gerjesztési törvény, integrális alak

$$K_C = I_A + \frac{d\Psi_A}{dt}$$

Az Ampère–Maxwell - féle gerjesztési törvény szavakban:

**Irányított, rögzített, zárt felületre az elektromos áramerősségnek és az elektromos fluxus változási gyorsaságának az összege egyenlő a felület peremvonalára számított mágneses körfeszültséggel.**

$$\left. \begin{array}{l} \text{fő-} \\ \text{egyenletek} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{Maxwell-egyenletek, az elektromágnesség axiómái}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{kiegészítő} \\ \text{egyenletek} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{D} = \rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

**A vezetési és az eltolási áramsűrűség aránya jó vezetőkben**

$$\gamma \sim 10^7 \Omega m, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad / j: \text{vezetési áramsűrűség}$$

$$\vec{j}_* = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad / \text{ az elektromos mező változási gyorsasága, eltolási áramsűrűség}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \rightarrow \vec{j}_* = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{i} \sin \omega t \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \vec{j} = \overbrace{\gamma E_0}^{j_0} \vec{i} \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi f \\ \rightarrow \vec{j}_* = \frac{\omega}{4\pi k} E_0 \vec{i} \cos \omega t = \underbrace{\frac{f E_0}{2k}}_{j_0^*} \vec{i} \cos \omega t \end{array} \right.$$

$$\frac{j_0}{j_0^*} = \frac{2k\gamma}{f} \sim \frac{10^{10} \cdot 10^7}{f} = \frac{10^{17}}{f(\text{Hz})}$$

Az előző előadáson tárgyalt szkinnefektus  $10^5$  Hz nagyságrendű frekvenciáján tehát a vezetési áramsűrűség amplitúdója 12 nagyságrenddel nagyobb az eltolásiénál.

Az eltolási áramsűrűség nem hanyagolható el:

- szigetelőkben, ott ugyanis nincs vezetési áram,
- ha az elektromos mező frekvenciája eléri vagy meghaladja az ultraibolya frekvenciatartományt ( $\sim 10^{15}$  Hz)

Ha például egy fém alkatrészt ipari röntgensugárázással vizsgálnak, már az eltolási áramsűrűség a nagyobb.

**ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK**

A közeg:

- töltetlen szigetelő ( $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}, \mu = \mu_0$ ),
- az anyag homogén – elektromos permittivitása nem függ a helytől, izotrop - irányfüggetlen, követi a lineáris anyagegyenletet ( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\epsilon$  nem függ a helytől),
- $\epsilon$  az időtől sem függ.

$$\text{Maxwell I.: } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell III.: } \text{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{Maxwell II.: } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell IV.: } \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{A Maxwell II. egyenletnek vesszük a rotációját: } \text{rot} \text{rot} \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B})$$

$$\text{A } \text{rot} \vec{B} \text{ helyére az I. egyenletet írjuk: } \text{rot} \text{rot} \vec{E} = -\epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E})}_{\text{div} \vec{E}=0} - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

**elektromos hullámegyenlet**, homogén, lineáris, másodrendű vektori differenciálegyenlet

A Maxwell I. egyenletnek vesszük a rotációját:  $\text{rot rot } \vec{B} = \text{rot} \left( \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{E})$

A  $\text{rot } \vec{E}$  helyére az II. egyenletet írjuk:  $\text{rot rot } \vec{B} = -\varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{B})}_{\text{div } \vec{B} = 0} - \nabla^2 \vec{B}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad \text{mágneses hullámegyenlet}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} &= \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \text{6 differenciálegyenlet}$$

**Hullámról akkor beszélünk, ha a fizikai állapotváltozás a térben tovaterjed (homogén közegben a terjedés állandó sebességgel zajlik). Az elektromágneses hullám vákuumban is terjed.**

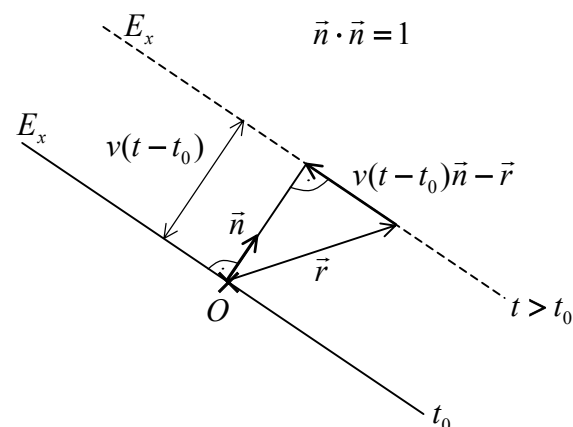
A vákuum nem azt jelenti, hogy a térben nincs semmi, csak azt, hogy ott kémiai anyag nincs (mezőanyag viszont van).

### Hullámfelület (fázisfelület)

Az a nem materiális (geometriai) felület, amely mentén a fizikai állapotot leíró mennyiségek értéke állandó. Ez a felület önmagára merőlegesen mozog, mozgásának sebességét nevezzük a hullám terjedési sebességének.

A hullámok egy lehetséges osztályozása a fázisfelületek alakjai szerint történik. Van például sík- (térben terjed, a fázisfelület sík!), gömb-, hengerhullám.

### Síkhullám



$$[v(t-t_0) \cdot \vec{n} - \vec{r}] \cdot \vec{n} = 0$$

$$vt - vt_0 = \vec{n} \cdot \vec{r}$$

$$t_0 = t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v} = t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{v}$$

$t_0$ : az az időpont, amikor a kiválasztott fázisfelület éppen átmegy az origón

$\vec{n}$ : a fázisfelület normális egységvektora, a terjedés irányába mutat

$v$ : terjedési sebesség,  $v = \text{const.}$

$t_0$  a helykoordináták és az idő homogén lineáris függvénye



Bármely  $t_0$  időértékhez tartozik egy és csakis egy  $E_x$ , tudniillik az, amely a  $t_0$  időpillanatban az  $O$ -n áthaladó fázisfelület mentén érvényes. Így tehát függvénykapcsolat áll fenn  $t_0$  és  $E_x$  között:

$$\underline{E_x} = f(t_0) = f\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}\right)$$

Bebizonyítjuk, hogy a síkhullámot leíró függvény kielégíti az elektromágneses hullámegyenletet, ha  $f$  legalább kétszer deriválható  $t_0$  szerint, és a  $v$  konstans értékét alkalmasan választjuk meg.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{df}{dt_0} \cdot \frac{\partial t_0}{\partial x} = -\frac{n_x}{v}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -\frac{n_x}{v} \cdot \frac{d^2 f}{dt_0^2} \cdot \frac{\partial t_0}{\partial x} = \frac{n_x^2}{v^2} \frac{d^2 f}{dt_0^2}, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{n_y^2}{v^2} \frac{d^2 f}{dt_0^2}, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{n_z^2}{v^2} \frac{d^2 f}{dt_0^2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{df}{dt_0} \underbrace{\frac{\partial t_0}{\partial t}}_1, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{dt_0^2}$$

$$\frac{d^2 f}{dt_0^2} \overbrace{\frac{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}{v^2}}^1 = \varepsilon \mu_0 \frac{d^2 f}{dt_0^2}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}}$$

Speciális eset: vákuumbeli síkhullám terjedési sebessége

$$\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = \sqrt{9 \cdot 10^{16}} = \underline{\underline{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}} \quad (\text{fénysebesség vákuumban})$$

Ez erős érv mellett, hogy a fény is az elektromágneses hullámok közé tartozik.

$$\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon' \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}} = \frac{c}{\underline{\underline{\sqrt{\varepsilon'}}}}, \quad \boxed{\sqrt{\varepsilon'} = n} \quad \text{abszolút törésmutató}$$

**Egy anyag abszolút törésmutatója megadja, hányszor lassabban terjed a elektromágneses hullám az illető anyagban, mint vákuumban.**

### Monokromatikus síkhullám

Monokromatikus: egyszínű, egy frekvenciájú. Az  $f$  függvény harmonikus függvény (sin, cos).

$$E_x = E_{x0} \cos(\overbrace{\omega t_0 + \delta}^{\varphi})$$

$E_{x0}$  - amplitúdó, konstans

$\delta$  - fázisállandó, konstans

$\omega$  - körfrekvencia, pozitív állandó,  $\omega = 2\pi f$

$\varphi$  - fázis

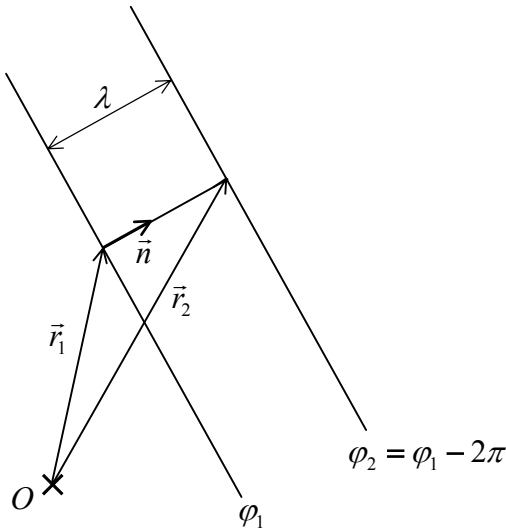
$$\varphi = \omega t_0 + \delta = \omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v} + \delta \right) = \omega \left( t - \frac{n_x}{v} x - \frac{n_y}{v} y - \frac{n_z}{v} z \right) + \delta$$

A hullám nem rezgés, az időn kívül a helykoordinátáknak is függvénye a fázis. A hullám közegehez kötődik, nem pontszerű testhez. A monokromatikus síkhullám mind térben, mind időben periodikus, ez a hullám valóban rezgés tovaterjedése.

Időbeli periódus:  $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

Térbeli periódus (hullámhosszúság):  $\lambda$

**A hullámhosszúság két olyan fázisfelület távolsága, melyek fáziskülönbsége  $2\pi$ .**



A terjedés irányában haladva a fázis csökken.

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \lambda \vec{n}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2}{v} \right) + \delta \\ \varphi_1 &= \omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1}{v} \right) + \delta \end{aligned} \right\} \text{II-I}$$

---


$$2\pi = \frac{\omega \vec{n} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{v} = \frac{\omega \lambda}{v}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{v}{f}}$$

A körfrekvencia mintájára szokás bevezetni a hullámszámot: megadja a  $2\pi$  hosszegységre jutó hullámok számát.

Skalár hullámszám:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

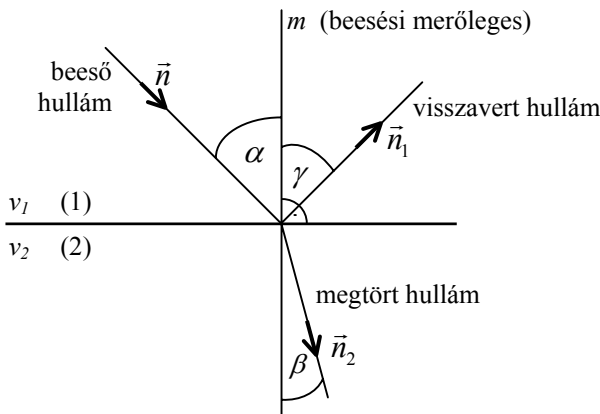
hullámszámvektor:  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$

$$\underline{\underline{\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta}}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos \varphi \\ E_y &= E_{y0} \cos \varphi \\ E_z &= E_{z0} \cos \varphi \end{aligned} \right. \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} B_x &= B_{x0} \cos \varphi \\ B_y &= B_{y0} \cos \varphi \\ B_z &= B_{z0} \cos \varphi \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}, \quad \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta \leftarrow \begin{array}{l} \text{a monokromatikus, elektromágneses} \\ \text{síkhullám leíró függvényei} \end{array}$$

# HULLÁMJELENSÉGEK

## I. A hullám két közeg határán: visszaverődés és törés



$\alpha$  : beesési szög  
 $\beta$  : törési szög  
 $\gamma$  : visszaverődési szög

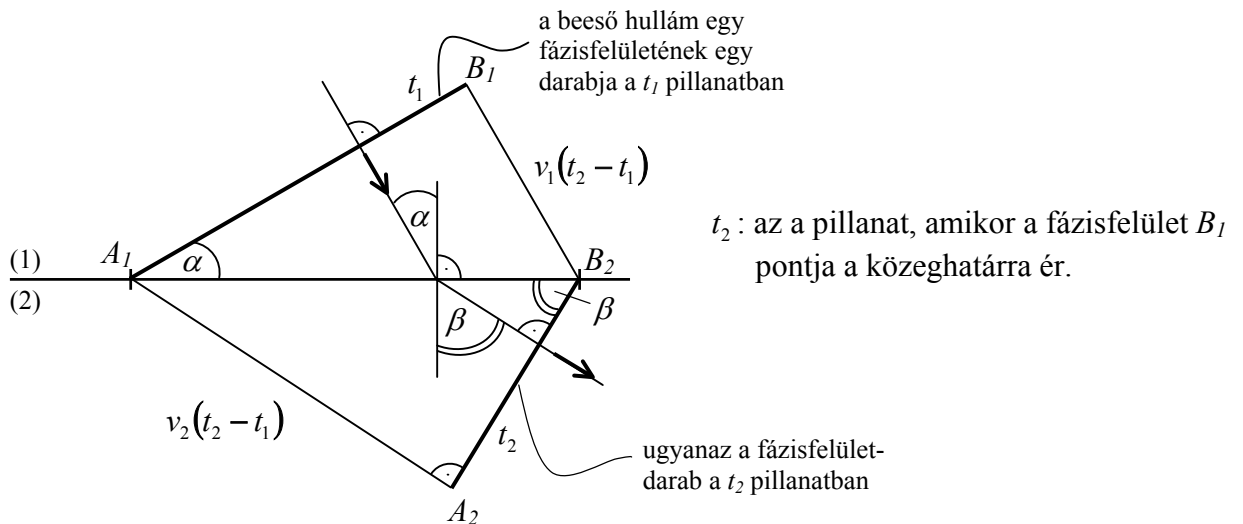
$\alpha = \gamma$  : a beesési és a visszaverődési szög egyenlő

Az  $\vec{n}$  és  $m$  meghatározta síkkal  $\vec{n}_1$  és  $\vec{n}_2$  vektor is párhuzamos. A hullám frekvenciája sem visszaverődéskor, sem töréskor nem változik meg! Következésképpen visszaverődéskor a hullámhossz változatlan marad, ám töréskor megváltozik.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{v_1}{f} \\ \lambda_2 &= \frac{v_2}{f} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_2} = \frac{n_2}{n_1} = \underline{\underline{n_{21}}} \end{aligned} \right\} \text{ - relatív törésmutató (a 2-es közegnek az 1-esre vonatkozó)}$$

1 – ahonnan jön } a fény  
 2 – ahová megy }

Két közeg közül azt nevezzük optikailag sűrűbbnek, amelyiknek nagyobb az abszolút törésmutatója. Ha a hullám optikailag sűrűbb közegről verődik vissza, akkor  $\pi$  fázisugrást szenved. Optikailag ritkább közegről való visszaverődéskor, illetőleg töréskor fázisugrás nincs.

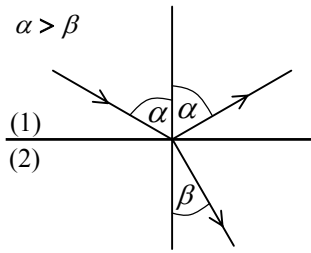


$t_1$  : a beeső hullám egy fázisfelületének egy darabja a  $t_1$  pillanatban  
 $t_2$  : az a pillanat, amikor a fázisfelület  $B_2$  pontja a közegethatárra ér.

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{v_1(t_2 - t_1)}{A_1B_2} \\ \sin \beta &= \frac{v_2(t_2 - t_1)}{A_1B_2} \end{aligned} \right\} \boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}} \quad \text{Snellius-Descartes – féle törési törvény (XVII. sz)}$$

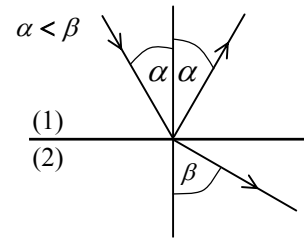
WILLEBORD VAN ROIJEN SNELL (SNELLIUS) (1580-1626, holland matematikus, csillagász)  
 RENÉ DESCARTES (1596-1650, francia filozófus, matematikus és csillagász)

a.)  $n_2 > n_1$  optikailag ritkábból sűrűbbe



A hullám a beesési merőlegeshez törik.

b.)  $n_1 > n_2$  optikailag sűrűbből ritkábbba



A hullám a beesési merőlegestől törik.

b) eset

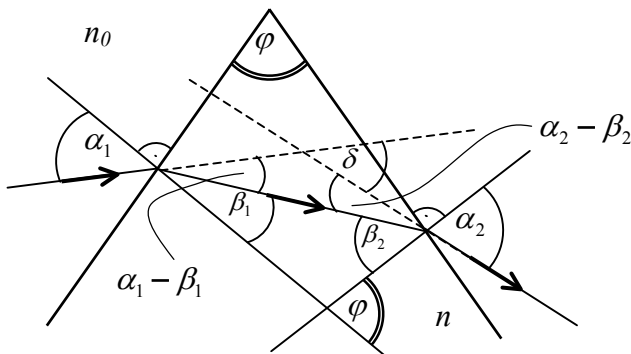
Határszögnek nevezzük és  $\alpha_*$ -gal jelöljük azt a beesési szöget, amelyhez a törési törvény  $\beta = 90^\circ$ -ot rendel.

$$\frac{\sin \alpha_*}{\sin 90^\circ} = n_{21} < 1 \rightarrow \alpha_* = \arcsin n_{21}$$

Amikor a beesési szöget 0-ról fokozatosan növeljük a határszögig a tört fénysugár energiája fokozatosan csökken, amikor elérjük  $\alpha_*$ -ot 0-vá válik, már  $\alpha_*$ -nál is teljesen visszaverődik. Olyan tört hullám nincs, amelynél  $\beta = 90^\circ$  lenne.  $\alpha \geq \alpha_* \rightarrow$  teljes visszaverődés.

### Optikai prizma

Két egymással nem párhuzamos sík felülettel határolt fénytörő test. A beágyazó homogén közeg abszolút törésmutatója  $n_0$ , a szintén homogén prizmaé  $n$ .



$\varphi$ : törőszög  
 $\delta$ : eltérítési szög

A határoló síklapok metszésvonala a törőél, a közöttük lévő szög a törőszög.

A háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2$$

$$\underline{\underline{\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi}}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{n}{n_0}, \quad \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} = \frac{n_0}{n}$$

Kis törőszögű prizma kis szögben beeső hullám eltérése:

$\varphi, \alpha_1$  kicsi  $\rightarrow \beta_1, \beta_2, \alpha_2$  kicsi

$$\sin \alpha_1 \sim \alpha_1$$

$$\sin \alpha_2 \sim \alpha_2$$

$$\sin \beta_1 \sim \beta_1$$

$$\sin \beta_2 \sim \beta_2$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ : radiánban

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \approx \frac{n}{n_0}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} \approx \frac{n_0}{n}$$

$$\underline{\underline{\delta = \beta_1 \frac{n}{n_0} + \beta_2 \frac{n}{n_0} - \varphi = \frac{n}{n_0} \underbrace{(\beta_1 + \beta_2)}_{\varphi} - \varphi = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \varphi}}$$

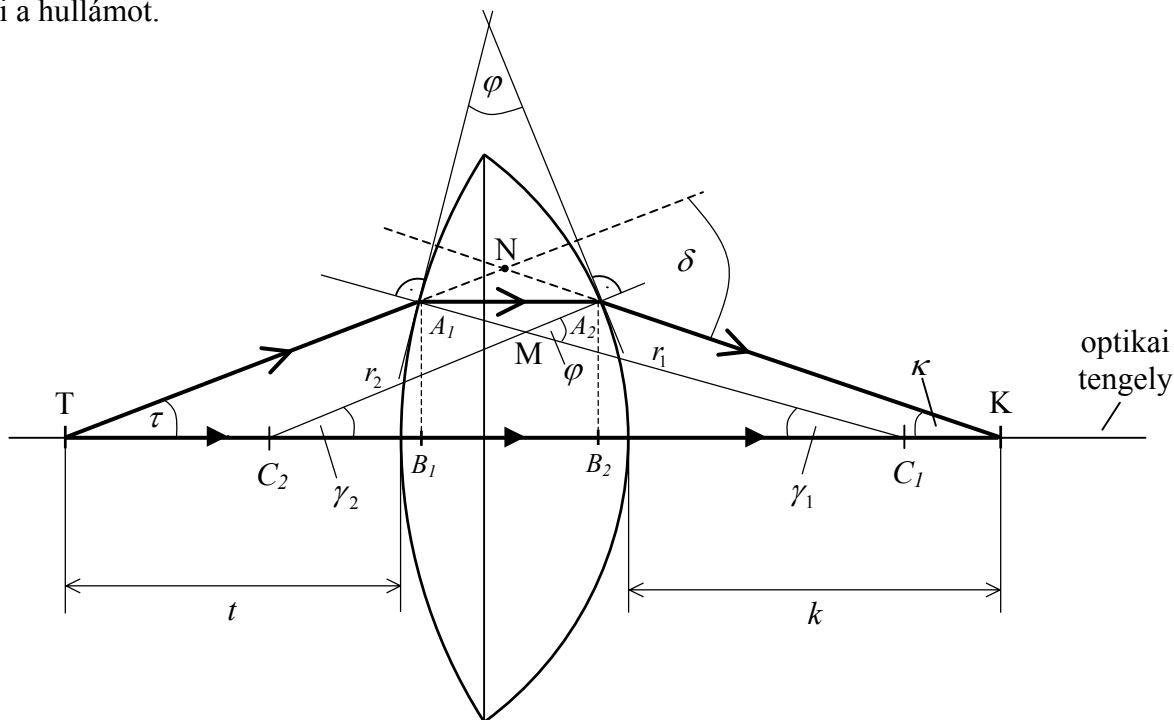
Optikai lencsék

Optikai lencse két göbbsüvegfelülettel határolt fénytörő eszköz. A két göbbsüveg egyike síklappal is helyettesíthető. Feltesszük, hogy a lencse anyaga és a beágyazó közeg optikailag homogén.

$n$ : a lencse abszolút törésmutatója

$n_0$ : a beágyazó közeg törésmutatója

A lencse forgástest, forgástengelyét optikai tengelynek is szokás nevezni. A lencse mind a két felületével megtöri a hullámot.



$C_1$  : előoldali görbületi középpont,  
 $C_2$  : hátoldali görbületi középpont,

$r_1$  : előoldali görbületi sugár,  
 $r_2$  : hátoldali görbületi sugár.

A felső sugár számára a lencse  $\varphi$  törőszögű prizmaként viselkedik. A  $C_1MC_2$   $\Delta$ -ben alkalmazzuk a külsőszögtételt:  $\varphi = \gamma_1 + \gamma_2$ , a  $TNK$   $\Delta$ -ben hasonlóan:  $\delta = \tau + \kappa$ .

Kikötések:

- vékony lencse: a  $\varphi$  törőszög kicsi,
- paraxiális (tengelyközele) sugarak:  $\tau$  kicsi.

Mivel  $\varphi$  kicsi, és a beesési szög is az, alkalmazzuk a prizmánál tanult közelítést:

$$\delta = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \varphi$$

$$\tau + \kappa = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) (\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$A_1B_1 \approx A_2B_2 = h^{jel.}$$

$$TB_1 \approx t$$

$$KB_2 \approx k$$

Az  $A_1B_1C_1$   $\Delta$ -re  $\sin \gamma_1 = \frac{h}{r_1} \approx \gamma_1$

(Kicsiny szög szinusza is, tangense is jó közelítéssel megegyezik a szög ívmértékével.)

Az  $A_2B_2C_2$   $\Delta$ -re  $\sin \gamma_2 = \frac{h}{r_2} \approx \gamma_2$

A  $TA_1B_1$   $\Delta$ -re  $\operatorname{tg} \tau = \frac{h}{t} \approx \tau$

A  $KA_2B_2$   $\Delta$ -re  $\operatorname{tg} \kappa = \frac{h}{k} \approx \kappa$

$$\frac{h}{t} + \frac{h}{k} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \left( \frac{h}{r_1} + \frac{h}{r_2} \right)$$

A  $k$  értéke független attól, hogy a  $T$  pontból milyen  $\tau$  szöggel indul ki a sugár. Tehát a lencse a  $T$ -ből kiinduló sugarakat egy pontba,  $K$ -ba gyűjti össze.

$T$ : tárgy pont,  $t$ : tárgytávolság,  $K$ : képpont,  $k$ : képtávolság.

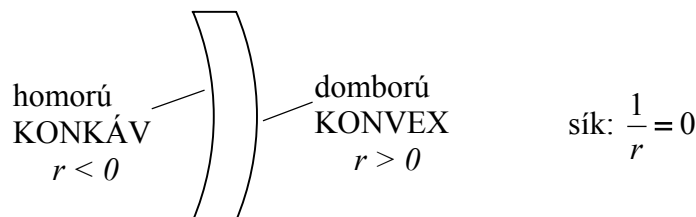
Hová gyűjti össze a lencse az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat?

Ezt a pontot fókuszának, a lencsétől mért távolságát fókusz távolságnak hívjuk.

$\tau \rightarrow 0, t \rightarrow \infty : k \rightarrow f$

$$\boxed{\frac{1}{f} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

Mivel a képlet az (1) és (2) indexekben szimmetrikus, a balról és jobbról érkező tengellyel párhuzamos sugarak számára a fókusz távolság egyenlő.



$f$  két esetben lehet negatív:

- 1.) a lencse közepe vékonyabb, mint a széle, és a lencse optikailag ritkább közegbe merül,
- 2.) a lencse közepe vastagabb, mint a széle, és a lencse optikailag sűrűbb közegbe merül.

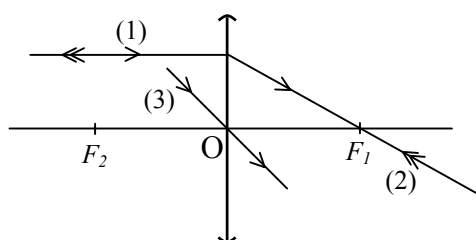
$f > 0$  : gyűjtőlencse, valóságos fókusz,  $f < 0$  : szórólencse, virtuális fókusz.

$$\boxed{\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}} \text{ távolságtörvény}$$

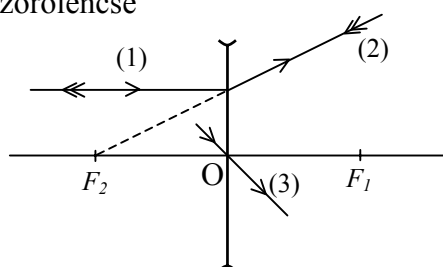
$k > 0$  valós kép,  $k < 0$  virtuális kép.

### Nevezetes sugármenetek

a.) gyűjtőlencse



b.) szórólencse



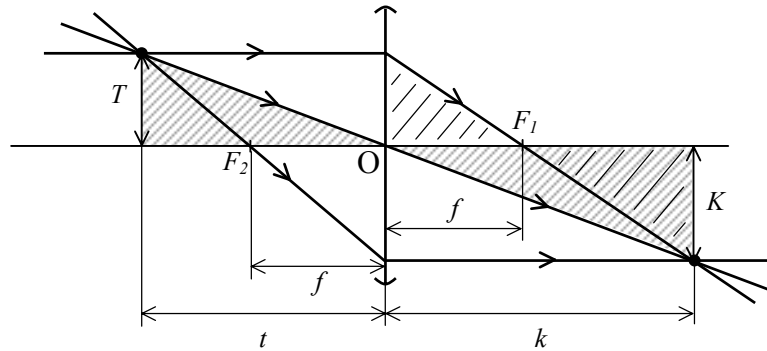
a.) A törési törvényben  $\alpha$ -t és  $\beta$ -t illetve  $n_1$ -et és  $n_2$ -t egymással felcserélve változatlan alakot nyerünk, ezért a fénysugár iránya megfordítható.

Mivel a lencse közepénél  $\varphi = 0$ , ezért a lencse közepe felé tartó sugarak irányváltozást nem szenvednek.

b.) A párhuzamosan beeső sugár olyan irányban lép ki, hogy tartóegyenese átmegy az előoldali fókuszpon.

Az olyan sugár, amely a túlóldali fókusz irányában esik be, a tengellyel párhuzamosan lép ki.

**Lineáris nagyítás**



$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t} = \frac{k-f}{f}$$

↳ a ritkán vonalkázott háromszögek hasonlóságából

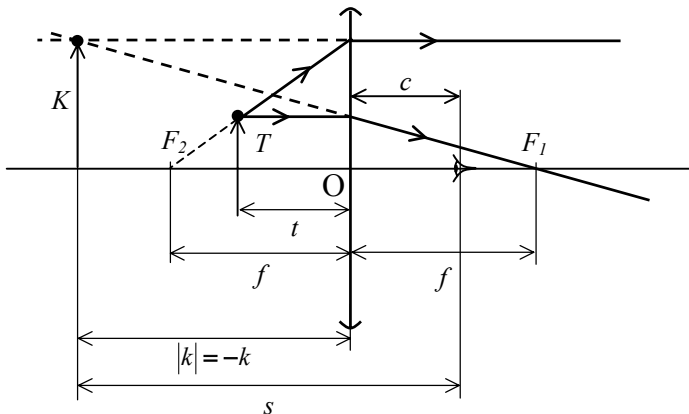
↳ a sűrűn vonalkázott háromszögek hasonlóak, így a megfelelő oldalak aránya megegyezik

$K < 0, N < 0$ : virtuális kép, kicsinyített képről akkor beszélünk, ha  $|N| < 1$ .

**Lencsék alkalmazása**

**1) Kézi nagyító (LUPE)**

Gyűjtőlencse, nagyított virtuális képet alkot.



$$N = \frac{k-f}{f} = \frac{k}{f} - 1 = \frac{-(s-c)}{f} - 1$$

$$|N| = \frac{s-c}{f} + 1$$

Tiszta látás távolsága: az a szemünktől mért távolság, amelyben élesen látunk.

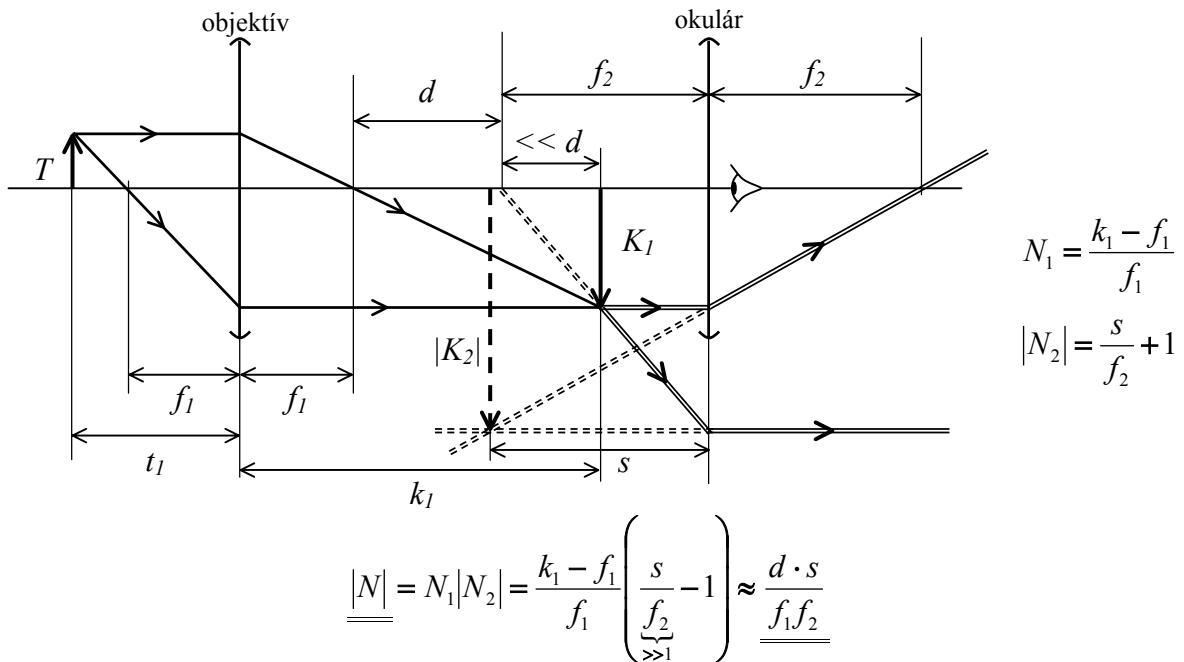
s (a tiszta látás távolsága) ~20-30cm ép szemnél

$$c = 0: |N| = |N|_{\max} = \frac{s}{f} + 1$$

$$D = \frac{1}{f [m]} : \text{dioptria}$$

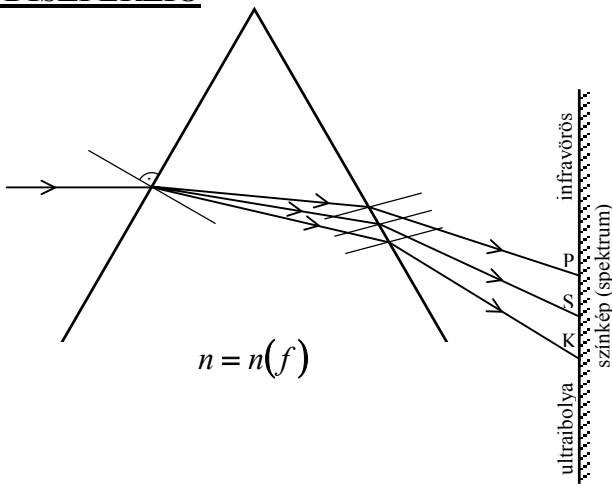
## 2) Mikroszkóp

Két közös optikai tengelyű gyűjtőlencséből áll. A tárgyhoz közelebbi lencsét tárgylencsének, más szóval objektívnek nevezzük. A megfigyelő szeméhez közelebbit szemlencsének, más szóval okulárnak nevezzük. Az objektív a tárgyról nagyított valós képet alkot, ezt nézzük az okulárral, mint kézi nagyítóval.



$d$ : optikai tubushossz,  $d \cong k_1 - f_1$

## II. DISZPERZIÓ



$\dots 10^4 \text{ Hz}$	váltakozó áram
$10^4 \dots 10^{11} \text{ Hz}$	rádióhullámok
$10^{11} \dots 10^{14} \text{ Hz}$	infravörös
$4 \cdot 10^{14} \dots 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	látható fény
$10^{15} \dots 10^{17} \text{ Hz}$	ultraibolya
$10^{17} \dots 10^{20} \text{ Hz}$	röntgensugarak
$10^{20} \text{ Hz} \dots$	$\gamma$ -sugárzás

A prizmára keskeny, párhuzamos nyalábban fehér fényt bocsátunk, a nyaláb már az első töréskor legyezőszerűen szétnyílik (a 2. törés ezt még csak fokozza), és a legyezőben egymásba folyamatosan átmenő színek láthatók. A fehér fény nem monokromatikus, benne különböző frekvenciájú hullámok folytonos sokasága terjed tovább.

A prizma tehát a különböző frekvenciájú hullámokat különböző mértékben töri meg, azaz az abszolút törésmutató függ a hullám frekvenciájától, ezt a jelenséget diszperzióknak vagy színszórásnak nevezzük.

Mi az oka a törésmutató frekvenciafüggésének?

$$n = \sqrt{\epsilon'}$$

$$P = \kappa \epsilon_0 E = (\epsilon' - 1) \epsilon_0 E = (n^2 - 1) \epsilon_0 E$$

↳ az elektromos polarizációvektor abszolút értéke



A szigetelőanyag molekuláiban az elektronok a hullám szinuszosan váltakozó elektromos mezőjének hatására gerjesztett rezgéseket végeznek.

A gerjesztett rezgés amplitúdója függ a gerjesztő frekvenciától. Ha tehát a hullám frekvenciája megváltozik, megváltozik a molekula (+) és (-) töltésközéppontja közötti távolság maximuma, vagyis megváltozik a molekula dipólusnyomatéka, ezzel együtt a polarizációvektor s vele a törésmutató.

Ha a hullám frekvenciája közel jár a molekula, mint oszcillátor valamelyik sajátfrekvenciájához, akkor a törésmutató nagy értéket vesz fel.

Ha a hullám frekvenciája sokkal kisebb, mint a szigetelőmolekula legkisebb sajátfrekvenciája, akkor a sztatikában megismert  $\epsilon'$ -vel számíthatjuk a törésmutatót. Ha viszont a frekvenciája sokkal nagyobb a molekula legnagyobb sajátfrekvenciájától, akkor a törésmutató gyakorlatilag 1.

### Longitudinális és transzverzális hullámok

Ha a fizikai állapotot leíró vektor a hullám terjedési irányával párhuzamos, akkor longitudinális, ha a leíró vektor a terjedési irányra merőleges, akkor transzverzális hullámról beszélünk. Pl.: a gázban terjedő hanghullámok tiszta longitudinális hullámok.

Milyen fajta hullám a szigetelőben terjedő elektromágneses hullám?

emlék:  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \varphi$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \varphi$ ,  $\vec{E}_0, \vec{B}_0 = \text{állandó}$ ,  $\varphi = \omega t - \frac{\omega}{v}(n_x x + n_y y + n_z z)$

Gauss törvénye:  $\text{div} \vec{E} = 0$

$$\nabla \cdot (\vec{E}_0 \cos \varphi) = 0$$

$$\vec{E}_0 \cdot \nabla (\cos \varphi) = \vec{E}_0 \cdot \text{grad}(\cos \varphi) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\cos \varphi)}{\partial x} &= \frac{d(\cos \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sin \varphi \cdot \left(-\frac{\omega}{v} n_x\right) = \frac{\omega}{v} n_x \sin \varphi, \\ \frac{\partial(\cos \varphi)}{\partial y} &= \frac{\omega}{v} n_y \sin \varphi, \quad \frac{\partial(\cos \varphi)}{\partial y} = \frac{\omega}{v} n_y \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{grad}(\cos \varphi) = \frac{\omega}{v} \vec{n} \sin \varphi$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{n} \frac{\omega}{v} \sin \varphi = 0 \rightarrow \boxed{\vec{E}_0 \cdot \vec{n} = 0} \quad \vec{E}_0 \perp \vec{n}$$

Mágneses Gauss törvény:  $\vec{B}_0 \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \vec{B}_0 \perp \vec{n}$

Mindkét leíró vektor merőleges a terjedés irányára, tehát a hullám transzverzális.

A most vizsgált elektromos hullámban a terjedésre merőleges irányok között is van kitüntetett:  $\vec{E}_0$  iránya. Adott helyen a térerősségvektor végpontja egy egyenesszakasz mentén rezeg, melynek iránya  $\vec{E}_0$ -ével párhuzamos, a rezgési amplitúdó  $|\vec{E}_0|$ .

Az ilyen hullámot lineárisan poláros hullámnak nevezzük.

Tapasztalat szerint a természetes fény nem ilyen: benne a terjedésre merőleges irányok mind egyenértékűek.

**Elliptikusan poláros hullám**

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \varphi, \quad \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta : \text{lineárisan poláros}$$

Hogyan lehet leírni olyan monokromatikus elektromos síkhullámot, amelyben a terjedési irányra merőleges minden irányban történik rezgés?

- Szuperponálunk két egyirányban terjedő, azonos frekvenciájú síkhullámot, melyekben a rezgési amplitúdók egymásra merőlegesek.

$$\vec{n} = \vec{e}_z \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} = z$$

$$\vec{E}_x = E_{x0} \vec{e}_x \cos \left( \underbrace{\omega t - \frac{\omega}{v} z}_{\varphi} \right)$$

Az időmérés kezdetének alkalmas megválasztásával az egyik összetevő hullám fázisállandója 0-vá tehető.

$$\vec{E}_y = E_{y0} \vec{e}_y \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v} z + \delta \right)$$

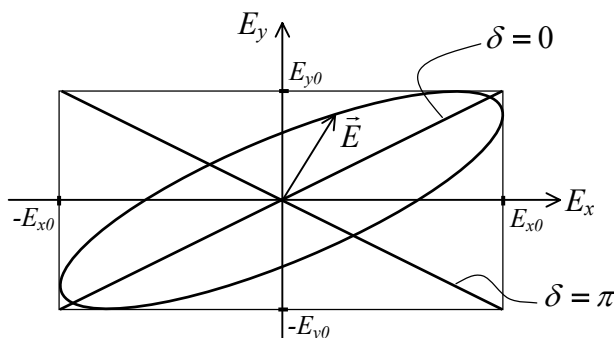
$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y \rightarrow \begin{cases} E_x = E_{x0} \cos \varphi \\ E_y = E_{y0} \cos(\varphi + \delta) \end{cases} \rightarrow \cos \varphi = \frac{E_x}{E_{x0}} \rightarrow \sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2}$$

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta = \frac{E_x}{E_{x0}} \cos \delta \mp \sqrt{1 - \left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2} \sin \delta$$

$$\left[ 1 - \left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2 \right] \sin^2 \delta = \left( \frac{E_x}{E_{x0}} \cos \delta - \frac{E_y}{E_{y0}} \right)^2$$

$$\sin^2 \delta = \underbrace{\left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2 \sin^2 \delta + \left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2 \cos^2 \delta}_{\left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2} - 2 \frac{E_x}{E_{x0}} \frac{E_y}{E_{y0}} \cos \delta + \left( \frac{E_y}{E_{y0}} \right)^2$$

A kifejezés másodfokú függvényt ír le, ennek képe kúpszelet, mivel azonban teljes egészében a végesben fekszik, csak ellipszis lehet, vagy annak elfajulása (kör, egyenesszakasz). A lineáris tagok hiánya azt mutatja, hogy az ellipszis középpontja az origó.

**Elliptikusan poláros hullám**

elliptikus: a térerősségvektor hegye ellipszist ír le

poláros: a terjedési irányra merőleges irányok nem egyenértékűek

Speciális esetek:

$$\delta = 0 \text{ vagy } \pi$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 \mp 2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}} + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}} \mp \frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 0 \rightarrow E_y = \pm \frac{E_x}{E_{x0}} E_{y0}, \text{ egyenesszakaszok} \rightarrow \text{lineárisan poláros hullám}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta = \frac{\pi}{2} \text{ vagy } \frac{3\pi}{2} \\ E_{x0} = E_{y0} = E_0 \end{aligned} \right\} \left(\frac{E_x}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_0}\right)^2 = 1, \text{ kör} \rightarrow \text{cirkuláris hullám}$$

### III. POLARIZÁCIÓ

**A polarizáció az az eljárás, amellyel a cirkuláris vagy elliptikusan poláros hullámból lineárisan poláros hullámot állítunk elő.**

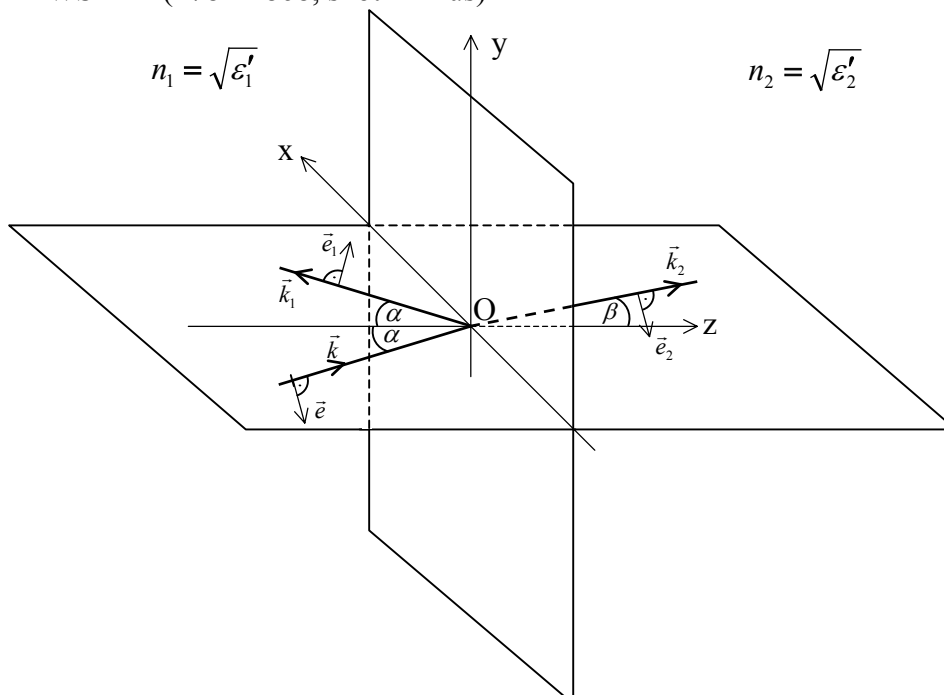
*Polarizáció kizárólag transzverzális hullámmal végezhető!!!*

Polarizációkor ugyanis a terjedésre merőleges irányokból egyet kitüntetünk. Mivel longitudinális hullámban a terjedésre merőlegesen nincs is rezgés, a semmiből nem lehet egyet kiválasztani.

Elektromágneses hullám polarizálására számos eljárás ismeretes. Az egyik lehetőség, hogy a hullámot alkalmas szögben két közeg határfelületére ejtjük be, s ekkor a visszavert hullám lineárisan poláros lesz. Az alkalmas beesési szöget a polarizáció szögének nevezzük, és  $\alpha_p$ -vel fogjuk jelölni.

#### Brewster törvénye

Sir DAVID BREWSTER (1781-1868, skót fizikus)



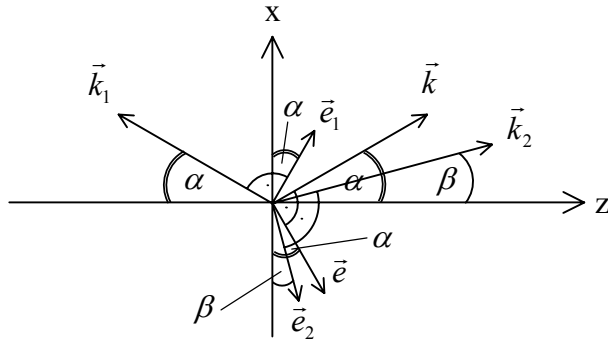
Az xy sík két közeg határfelülete, az xz síkot a beesési merőleges (z) és a beeső hullám terjedési iránya ( $\vec{k}$ ) feszíti ki.

$\vec{k}$  : a beeső hullám hullámszámvektora

$\vec{k}_1$  : a visszavert hullám hullámszámvektora

$\vec{k}_2$  : a megtört hullám hullámszámvektora

A hullámokban (beeső, visszavert, megtört) van rezgés  $\vec{e}$ , illetve  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  és  $\vec{e}_y$  irányban is, ha azonban a beesési szöget jól választjuk meg, akkor a visszavert hullámban  $\vec{e}_1$  irányú rezgés nincs, vagyis ez a hullám már lineárisan poláros, a rezgés iránya  $\vec{e}_y$ .



$\vec{e}$ ,  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  : egységvektorok

$$\vec{e} = -\cos \alpha \cdot \vec{e}_x + \sin \alpha \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_1 = \cos \alpha \cdot \vec{e}_x + \sin \alpha \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_2 = -\cos \beta \cdot \vec{e}_x + \sin \beta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = E\vec{e} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad : \text{ a beeső hullám } \vec{e} \text{ irányú komponense}$$

$$\vec{E}_1 = E_1\vec{e}_1 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \quad : \text{ a visszavert hullám } \vec{e}_1 \text{ irányú komponense}$$

$$\vec{E}_2 = E_2\vec{e}_2 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \quad : \text{ a megtört hullám } \vec{e}_2 \text{ irányú komponense}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon'_2}{\epsilon'_1}}, \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n_{21}}$$

A  $z < 0$  féltérben a beeső és a visszavert hullám szuperponálódik, ott tehát a térerősség  $\vec{E} + \vec{E}_1$ , a  $z > 0$  féltérben csak a tört hullám van jelen, ott a térerő tehát  $\vec{E}_2$ .

Az elektromos térerősség tangenciális összetevője – itt az x irányú összetevőt jelenti – a közegetáron ugrást nem szenved. Az elektromos indukcióvektor normális összetevője – itt a z irányú komponens – a határfelületen ugrást nem szenved, mert nincs felületi töltés.

peremfeltételek: 
$$\begin{aligned} E_x(\vec{0}) + E_{1x}(\vec{0}) &= E_{2x}(\vec{0}) \\ D_z(\vec{0}) + D_{1z}(\vec{0}) &= D_{2z}(\vec{0}) \end{aligned}, \quad \vec{D} = \epsilon' \epsilon_0 \vec{E}$$

$$-E \cos \alpha \cos(\omega t) + E_1 \cos \alpha \cos(\omega t) = -E_2 \cos \beta \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad E_2 = (E - E_1) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\epsilon'_1 \epsilon_0 E \sin \alpha \cos(\omega t) + \epsilon'_1 \epsilon_0 E_1 \sin \alpha \cos(\omega t) = \epsilon'_2 \epsilon_0 E_2 \sin \beta \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad E_2 = \frac{\epsilon'_1}{\epsilon'_2} (E + E_1) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$(E - E_1) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{(E + E_1)}{n_{21}}$$

$$n_{21}(E - E_1) \cos \alpha = (E + E_1) \cos \beta \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{E_1 = \frac{n_{21} \cos \alpha - \cos \beta}{n_{21} \cos \alpha + \cos \beta} E}}$$

Ha lineárisan poláros a visszavert hullám, akkor a jobb oldali tört számlálóját eltűnik:

$$n_{21} \cos \alpha_p = \cos \beta_p \quad /^2$$

$$n_{21}^2 \cos^2 \alpha_p = \cos^2 \beta_p = 1 - \sin^2 \beta_p = 1 - \frac{\sin^2 \alpha_p}{n_{21}^2} \quad / : \cos^2 \alpha_p$$

$$n_{21}^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_p - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_p}{n_{21}^2}$$

$$n_{21}^2 - 1 = \frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2} \operatorname{tg}^2 \alpha_p \quad / : n_{21}^2 - 1$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_p = n_{21}} \quad \text{Brewster törvénye}$$

### Összefüggés az elektromos és a mágneses amplitúdó között

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos \varphi \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos \varphi \end{aligned} \quad \varphi = \omega t - \frac{\omega}{v} (n_x x + n_y y + n_z z)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{: Faraday törvénye}$$

$$\nabla \times (\vec{E}_0 \cos \varphi) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}_0 \cos \varphi)$$

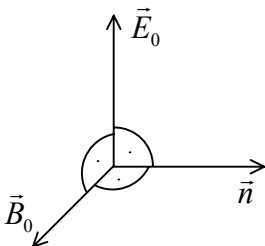
$$(\nabla \cos \varphi) \times \vec{E}_0 = -\vec{B}_0 \frac{\partial (\cos \varphi)}{\partial t}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (\cos \varphi)}{\partial x} &= \frac{d(\cos \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} v_x \sin \varphi \\ \frac{\partial (\cos \varphi)}{\partial y} &= \frac{\omega}{v} v_y \sin \varphi \\ \frac{\partial (\cos \varphi)}{\partial z} &= \frac{\omega}{v} v_z \sin \varphi \end{aligned} \right\} \operatorname{grad}(\cos \varphi) = \frac{\omega}{v} \sin \varphi \vec{n}$$

$$\frac{\partial (\cos \varphi)}{\partial t} = \frac{d(\cos \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \sin \varphi$$

$$\frac{\omega}{v} \sin \varphi \vec{n} \times \vec{E}_0 = \vec{B}_0 \omega \sin \varphi$$

$$\boxed{\vec{B}_0 = \frac{\vec{n} \times \vec{E}_0}{v}} \quad \rightarrow B_0 = \frac{E_0}{v}$$



Az elektromos és a mágneses amplitúdók egymásra merőlegesek,  $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{n}$  a mondott sorrendben jobbhármast alkot.

## Energiaviszonyok a hullámban

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} : \text{elektromos energiasűrűség}$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} : \text{mágneses energiasűrűség}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \cos \varphi$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos \varphi$$

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v} \right)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}$$

$$B^2 = B_0^2 \cos^2 \varphi = \frac{E_0^2}{v^2} \cos^2 \varphi = \varepsilon\mu_0 E_0^2 \cos^2 \varphi$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} \varepsilon\mu_0 E_0^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = w_e$$

**A szigetelőben terjedő elektromágneses hullámban az elektromos és a mágneses energiasűrűség egyenlő bármely helyen és időben.**

$$w = w_e + w_m = \varepsilon E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ az elektromágneses energiasűrűség}$$

## Poynting-vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} : \text{Poynting-vektor}$$

Derítsük ki a Poynting-vektor fizikai jelentését!

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}_0 \times \vec{B}_0}{\mu_0} \cos^2 \varphi = \frac{\cos^2 \varphi}{v\mu_0} \underbrace{\vec{E}_0 \times (\vec{n} \times \vec{E}_0)}_{\substack{E_0^2 \vec{n} - (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \vec{E}_0 \\ 0}} = \begin{cases} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E^2 \vec{n} \\ = \frac{1}{\varepsilon v \mu_0} \underbrace{\varepsilon E^2}_w \vec{n} = \underbrace{w v \vec{n}}_{\vec{v}} = \underline{\underline{w \vec{v}}} \end{cases}$$

$$\vec{v} = v \vec{n} : \text{a hullám fázissebességének vektora}$$

$$\text{emlék: } \vec{j} = \rho \vec{v}$$

↳ tömegsűrűség

↳ tömeg-áramsűrűség

$\vec{S}$  az elektromágneses energia-áramsűrűség, abszolút értéke megadja a hullám terjedési irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt átáramló elektromágneses energiát, iránya megegyezik az energia terjedésének irányával.

A hullám intenzitása ( $I$ ) : a Poynting-vektor abszolút értékének az időátlaga.

$$I = \overline{|\vec{S}|} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \overline{E^2}, \quad E^2 = E_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad \varphi_0 : \text{nem függ az időtől}$$

$$\underline{\underline{I}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E_0^2 \overline{\cos^2(\omega t + \varphi_0)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2} \left[ 1 + \underbrace{\overline{\cos 2(\omega t + \varphi_0)}}_0 \right] = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E_0^2}}$$

**Az intenzitás arányos az elektromos amplitúdó négyzetével.**

#### IV. INTERFERENCIA

Interferenciajelenségről akkor beszélünk, ha hullámok találkozásakor a hullámtérben – geometriailag szabályos elrendezésben – maximális, illetve minimális intenzitású helyek figyelhetők meg, és ez a mintázat állókép (időben tartósan mozdulatlan).

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_{10} \cos\left(\overbrace{\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}}^{\varphi_1}\right) \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{10} \cos\left(\overbrace{\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \delta}^{\varphi_2}\right) \end{aligned} \right\} : \text{ a két találkozó részhullám, } \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \geq 0 \text{ ez mindig elérhető a } \delta \text{ fázisállandó alkalmas megválasztásával}$$

az eredő hullám:  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad /^2$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \quad / \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}, \text{ időátlagot képezünk}$$

$$I = I_1 + I_2 + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}_{I_{12} \text{ (interferenciatag)}}$$

matematika:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\} +$$

$$I_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \left[ \overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} + \overline{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \right]$$

---


$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

**Interferenciáról akkor beszélünk, ha az  $I_{12}$  interferenciatag nem azonosan nulla. Ebben az esetben az eredő intenzitás nem egyenlő a részintenzitások összegével: annál több is, kevesebb is lehet.**

$$\overline{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} = \overline{\cos\left[(\omega_1 + \omega_2)t - \underbrace{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \delta}_{\text{nem függ az időtől}}\right]} = 0$$

$$\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \overline{\cos\left[(\omega_1 - \omega_2)t - \underbrace{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - \delta}_{\text{nem függ az időtől}}\right]} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \cos(\varphi_1 - \varphi_2), & \text{ha } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

A két találkozó hullámot koherensnek nevezzük, ha az interferenciatag 0-tól különböző, tehát a két hullám interferenciaképes.

Koherenciafeltételek:

- 1.) a találkozó hullámok frekvenciája egyezzenek meg,
- 2.) a két hullám amplitúdóvektora ne legyen egymásra merőleges ( $\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \neq 0$ ).

Maximumhelyek:

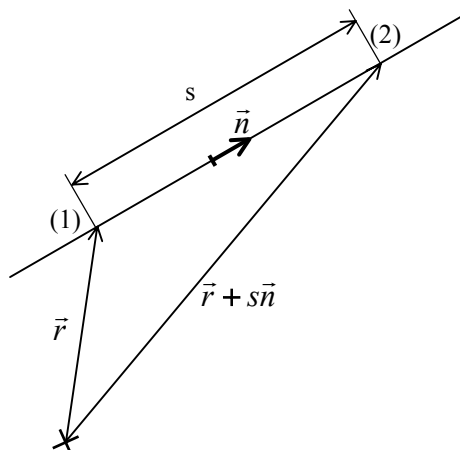
ott vannak, ahol  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$ , vagyis a két hullám fáziskülönbsége  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2m\pi$ ,  $m$  egész.

Minimumhelyek:

ott vannak, ahol  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ , vagyis a két hullám fáziskülönbsége:  $\varphi_1 - \varphi_2 = (2m + 1)\pi$ .

Az interferencia kimutatása egy jelenség hullámtermészetének döntő bizonyítéka.

A hullám terjedési irányában  $s$  elmozdulást végezve mekkora a fázis változása?



$$\varphi_1 = \omega t - \frac{\omega}{v} \vec{n} \cdot \vec{r}$$

$$\varphi_2 = \omega t - \frac{\omega}{v} \vec{n} \cdot (\vec{r} + s\vec{n})$$

vákuumbeli hullámhossz:  $\lambda = c/f$ ,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\omega}{v} s = -\frac{2\pi f}{\frac{c}{n}} s = -\frac{2\pi}{\lambda} ns = -\frac{2\pi}{\lambda} \sigma, \text{ optikai út: } \sigma = ns$$

A két találkozó hullám fáziseltérésének okai:

- 1.) maguk a hullámforrások nincsenek fázisban,
- 2.) a forrástól a találkozási helyig a két hullám optikai útja között különbség van,
- 3.) a hullámok egyike optikailag sűrűbb közegről illetőleg tükörről visszaverődik (ez  $\pi$  fázisugrással jár).

### A természetes fényre vonatkozó extra koherenciafeltételek

A természetes fény véletlenszerű atomi folyamatokból keletkezik. A hullámforrások (atomok) egymással nincsenek összehangolva. A kibocsátott hullám nem végtelen koszinusz hullám, hanem véges hullámvonulat (hullámimpulzus).

Emiatt a természetes fényre két további koherenciafeltétel állítható fel:

- 3.) A találkozó hullámok fáziskülönbsége időben tartósan állandó legyen. Emiatt két különböző természetes fényforrással interferenciát létrehozni nem lehet (az atomi fényforrások ugyanis nincsenek összehangolva, nagyon gyorsan változik a fáziskülönbség).

Természetes fényforrással úgy hozunk létre interferenciát, hogy a kibocsátott hullámot résznyalábokra bontjuk, ezeket különböző utakon vezetjük, majd összehozzuk.

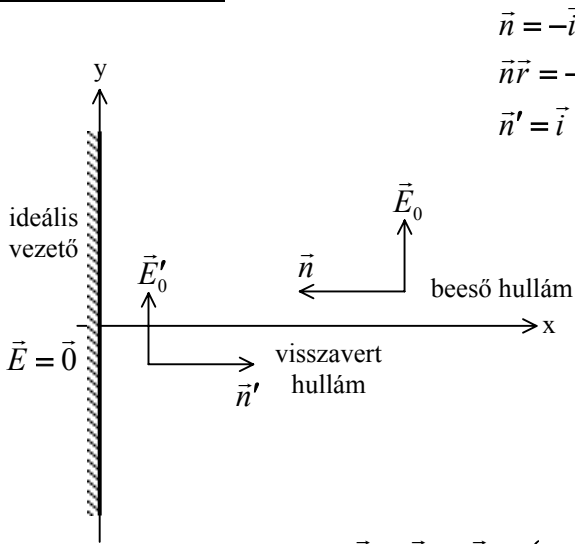
- 4.) Ha a két találkozó hullám optikai útkülönbsége túl nagy, a találkozási helyre később érkező hullámvonulat már nem tudja átfedni a korábban érkező hullámvonulatot, hiszen az teljesen lefutott. Azt az optikai útkülönbséget, amelynél nagyobb optikai útkülönbség esetén már nincs átfedés (tehát interferencia sem), koherenci hosszának ( $\sigma_k$ ) nevezzük.

Koherenciafeltételek:

- 1.)  $f_1 = f_2$
  - 2.)  $\vec{E}_{10} \not\perp \vec{E}_{20}$
  - 3.)  $\Delta\varphi$  időben állandó
  - 4.)  $\Delta\sigma < \sigma_k$
- } extra feltételek



## IV.1. Állóhullám



$$\begin{aligned}\vec{n} &= -\vec{i} \\ \vec{n}\vec{r} &= -x \\ \vec{n}' &= \vec{i} \rightarrow \vec{n}'\vec{r} = x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_0 \vec{j} \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c} x\right) \text{ beeső hullám} \\ \vec{E}'_1 &= E_0 \vec{j} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \text{ visszavert hullám}\end{aligned}$$

$$x > 0: \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}'_1 = (E_0 + E'_0) \vec{j} \left[ \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c} x\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \right]$$

A térerősség a két közeg határfelületéhez viszonyítva tangenciális, tehát a két közeg határán ugrást nem szenved.

$$0 = \underbrace{(E_0 + E'_0)}_0 \left[ \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c} \cdot 0\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cdot 0\right) \right]$$

$$E'_0 = -E \quad \vec{E}'_1 = E_0 \vec{j} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x + \pi\right)$$

Tehát a visszavert hullám amplitúdója megegyezik a beesőével, de visszaverődéskor  $\pi$  fázisugrás van.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \vec{j} \left[ \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c} x\right) - \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \right] = \\ &= E_0 \vec{j} \left[ \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) - \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) - \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) - \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) \right] = -2E_0 \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) \vec{j}\end{aligned}$$

Kiszámítjuk az eredő hullám intenzitását:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}, \quad \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \underbrace{\overline{\cos 2\omega t}}_0 = \frac{1}{2}$$

$$\underline{I} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 = 4E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sin^2\left(\frac{\omega}{c} x\right) \overline{\sin^2 \omega t} = \underline{\underline{2E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sin^2\left(\frac{\omega}{c} x\right)}}$$

Intenzitásmaximum-helyek:

$$I_{\max} = 2E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

$$\frac{\omega}{c} x = \frac{\pi}{2} (2m - 1)$$

$$\frac{2\pi f}{c} x = \frac{\pi}{2} (2m - 1) \rightarrow x = \frac{c}{4f} (2m - 1) = \frac{\lambda}{4} (2m - 1) \quad \text{ahol } m = 1, 2, \dots$$

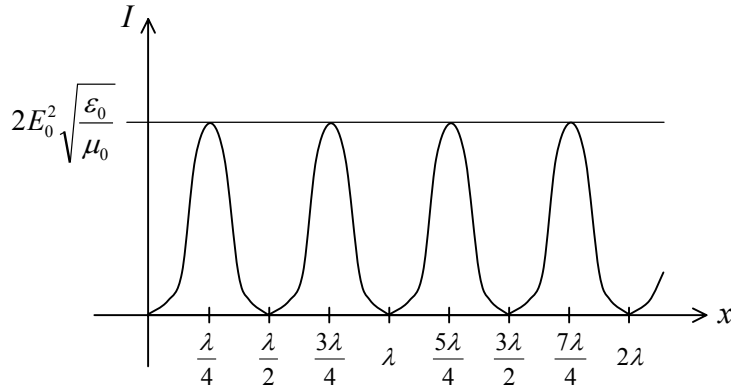
Intenzitásmaximumokat ott észlelünk, ahol az x koordináta a negyed hullámhossz páratlan többszöröse. Ezeket a síkokat duzzadósíkoknak nevezzük.

Intenzitásminimum-helyek:

$$I_{\min} = 0$$

$$\frac{2\pi f}{c} x = l\pi \rightarrow x = \frac{\lambda}{2} l = \frac{\lambda}{4} 2l \quad \text{ahol } l = 0, 1, 2, \dots$$

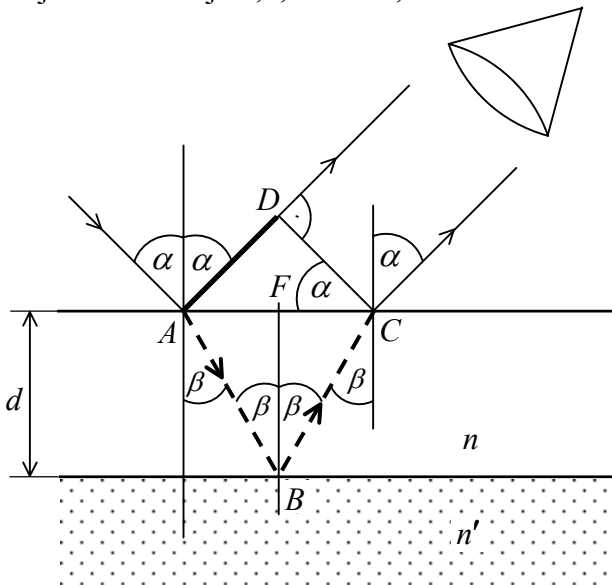
Intenzitásminimumot ott észlelünk, ahol az x koordináta a negyed hullámhossz páros többszöröse, ezeket a síkokat csomósíkoknak nevezzük.



Az állóhullám a beeső és a visszavert hullám interferenciájának az eredménye.

**IV.2. Interferencia planparalel lemezen**

Vízen  $50\mu m$  vastagságú olajfilm úszik, erre  $0,4\mu m$  hullámhosszú (kékeslila) fény esik. Melyik az a legkisebb beesési szög, amelynél a visszavert sugarak intenzitásminimumot hoznak létre? Az olaj törésmutatója 1,2, a vízé 1,33.



- $n' = 1,33$
- $n = 1,2$
- $d = 50\mu m$
- $\lambda = 0,4\mu m$

---


$$\cos \beta = \frac{d}{AB},$$

$$\sin \alpha = \frac{AD}{2AF},$$

$$tg \beta = \frac{AF}{d}$$

A szaggatott és a vastag vonallal jelölt rész hullámok között a fáziskülönbség a CD síkig már teljesen kialakul.

$$\varphi_D = \varphi_A + \pi - \frac{2\pi}{\lambda} AD \rightarrow \lambda \text{ a fény vákuumbeli hullámhossza}$$

$$\varphi_C = \varphi_A - \frac{2\pi}{\lambda} 2ABn + \pi$$

A vastag vonallal jelölt rész hullám A-ban, a szaggatott vonallal jelölt rész hullám B-ben optikailag sűrűbb közegről verődött vissza, tehát  $\pi$  fázisugrást szenvednek.

$$\varphi_D - \varphi_C = \frac{2\pi}{\lambda} (2nAB - AD) \quad / \quad AB = \frac{d}{\cos \beta}, \quad AD = 2AF \sin \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

$$\underline{\underline{\varphi_D - \varphi_C}} = \frac{2\pi d}{\lambda} \left( \frac{2n}{\cos \beta} - 2 \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha \right) = \frac{4\pi d}{\lambda \cos \beta} (n - \sin \beta \sin \alpha) =$$

$$= \frac{4\pi d (n^2 - \sin^2 \alpha)}{\lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \underline{\underline{\frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}}$$

Intenzitásminimum:

$$\varphi_D - \varphi_C = \overbrace{(2m-1)}^l \pi \quad m > 0, m \in N$$

$$\frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_l} = l\pi$$

$$n^2 - \sin^2 \alpha_l = \left( \frac{l\lambda}{4d} \right)^2, \quad \sin \alpha_l = \sqrt{n^2 - \left( \frac{l\lambda}{4d} \right)^2}$$

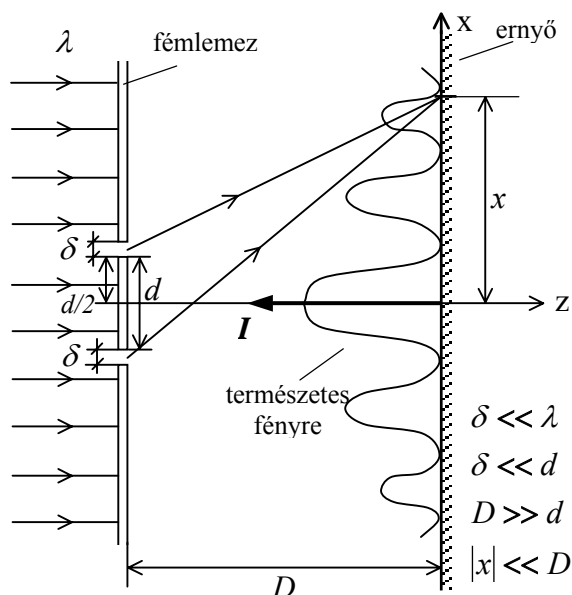
$$n \geq \frac{l\lambda}{4d} \rightarrow l \leq \frac{4nd}{\lambda} = \frac{4 \cdot 1,2 \cdot 50}{0,4} = 600 \rightarrow l_{\max} = 599 \text{ -hez tartozik a minimális } \alpha$$

$$\sin \alpha_{\min} = \sqrt{1,2^2 - \left( \frac{599 \cdot 0,4}{4 \cdot 50} \right)^2} = 0,06925 \rightarrow \underline{\underline{\alpha_{\min} = 3,97^\circ}}$$

### IV.3. Diffrakció (a kétréses interferométer)

CHRISTIAAN HUYGENS [hojhensz] (1629-1695, holland fizikus matematikus és csillagász)

AUGUSTIN JEAN FRESNEL [frenel] (1788-1827, francia mérnök, fizikus)



Huygens-Fresnel – elv:

A hullámter bármely pontja másodlagos hullámforrás, e másodlagos hullámforrásokból kiinduló hullámok interferenciája alakítja ki a megfigyelt intenzitásképet.

Az  $F_1, F_2$  hullámforrások fázisban vannak.

Egyetlen ok a fáziskülönbségre az útkülönbség.

$$(F_1P)^2 = D^2 + (x - d/2)^2$$

$$F_1P = D + \varepsilon_1 \quad \varepsilon_1 \ll D$$

$$(F_2P)^2 = D^2 + (x + d/2)^2$$

$$F_2P = D + \varepsilon_2 \quad \varepsilon_2 \ll D$$

$$(F_2P)^2 - (F_1P)^2 = 2dx$$

$$F_1P + F_2P \approx 2D$$

$$\underbrace{(F_2P - F_1P)}_s \underbrace{(F_2P + F_1P)}_{\approx 2D} = 2dx \rightarrow \underline{\underline{s = \frac{d}{D} x}}$$

maximum:  $\frac{d}{D}x = 2k \frac{\lambda}{2} \rightarrow x = k \frac{D}{d} \lambda$ , ahol  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

minimum:  $\frac{d}{D}x = (2k-1) \frac{\lambda}{2} \rightarrow x = \frac{D}{d} \lambda \left(k - \frac{1}{2}\right)$

**Diffrakció (hullámelhajlás): a hullám oda is eljut, ahová egyenes vonalú terjedéssel el nem jutna.**

Ezzel az eszközzel meg lehet határozni a hullámhosszt. Ha megmérjük az első maximum  $x_1$  helyét ( $k=1$ ), továbbá a  $D, d$  műszeradatokat, akkor a képlet segítségével  $\lambda$  számítható.

A maximumok intenzitásgyengülését az okozza, hogy az útkülönbség növekedtével a találkozó hullámvonulatok egyre kevésbé fedik át egymást. Olyan  $k$  esetén, amelyre  $k\lambda$  nagyobb a koherenciahossznál, maximum már nem alakul ki.

Ha a beeső fény fehér, akkor az ernyőn színeksorozatot figyelhetünk meg. Ahol például a fehér fény vörös komponense kioltódik, ott a vörös komplementer színét (a kéket) látjuk. Egy szín komplementerét úgy kapjuk, hogy a fehér fényből az illető színt kitakarjuk.

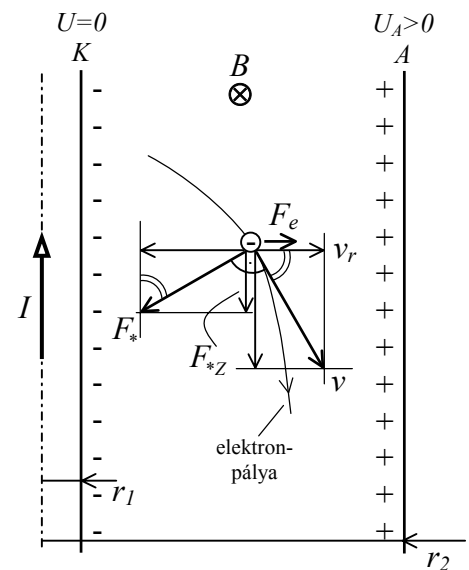
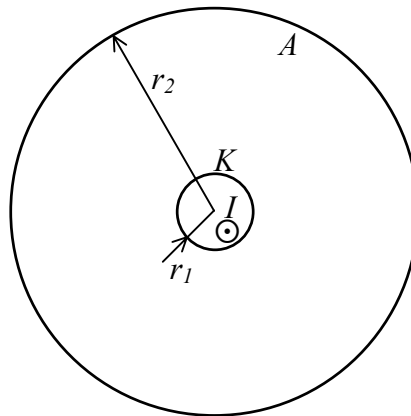
**Utolsó tantermi feladat: hengeres dióda**

$r_1 = 1mm$

$r_2 = 1cm$

$I = 13A$

$I$ : fűtőáram,  
a katód egyenes fémdrót,  
az anód fém hengerpalást,  
 $F_*$ : Lorentz-erő



Ha az anód és a katód közötti feszültség nem elég nagy, akkor nem folyik áram, a dióda zár.

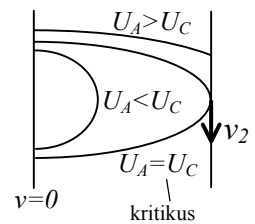
$$F_* = evB$$

Most felírjuk a mozgásegyenletet z irányban (ilyen irányú elektromos erő nincs):

$$m \frac{dv_z}{dt} = F_{*z}, \quad \frac{F_{*z}}{F} = \frac{v_r}{v} \rightarrow F_{*z} = \frac{e\psi B v_r}{\psi} = eB v_r = eB \frac{dr}{dt}$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = \frac{e\mu_0 I dr}{2\pi r dt}$$

$$\int_0^{v_2} dv_z = \frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \quad (\text{kritikus eset})$$



Anódáram csak akkor van, ha az anódfeszültség a kritikus értéket ( $U_C$ ) meghaladja,  $U_C$ -t fogjuk kiszámolni.

$$v_2 = \frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Energiamegmaradás:

$$0 = \frac{1}{2} m v_2^2 - e U_C \rightarrow U_C = \frac{m}{2e} v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \left( \frac{\mu_0 I \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi} \right)^2 = \frac{1,76 \cdot 10^{11}}{2} (2 \cdot 10^{-7} \cdot 13 \cdot \ln 10)^2 = \underline{\underline{3,15V}}$$

A fűtőáram mágneses terének köszönhető Lorentz erő miatt, ha az anód feszültsége kisebb  $U_C$ -nél, az elektron még az anód előtt visszafordul, és így a dióda áramköre nem zárul.