# Bevezetés a számításelméletbe 1.

Jegyzet mérnök-informatikus hallgatók részére

Készítette: Kriván Bálint

dr. Wiener Gábor és dr. Simonyi Gábor előadásai alapján

2009. szeptember - 2010. január 5.

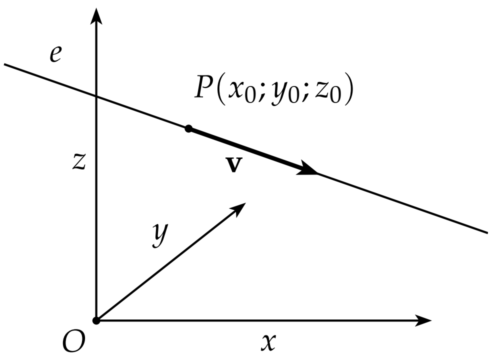
# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Lineáris algebra

## 1.1. Koordináta geometria

### 1.1.1. Egyenes egyenlete



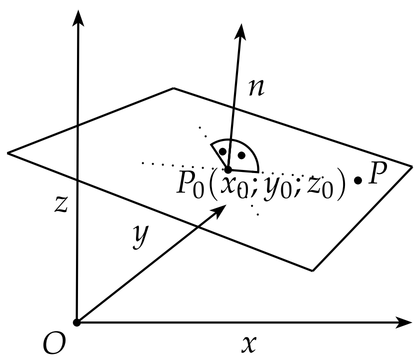

Az $e$ minden $E(x;y;z)$ pontjára, és csak is ezekre a pontokra teljesül, hogy ($t \in \mathbb{R}$):

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& x_0 + ta \\ y &=& y_0 + tb \\ z &=& z_0 + tc \end{array}\right\}$$

Ahol $a$, $b$, illetve $c$ az egyenes $\mathbf{v}(a;b;c)$ irányvektorának koordinátái. Ezeket $t$-re rendezve, kapjuk, hogy:

$$\boxed{t = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}} \qquad a,b,c \neq 0$$

### 1.1.2. Sík egyenlete




**Lemma**: $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$

$P(x;y;z)$ rajta van az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkon $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P} \perp n$. Tehát a fenti lemma alapján:

$$(x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = 0$$

$$\boxed{ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0} = \text{konst.}$$

## 1.2. Vektortér v. lineáris tér

**Definíció 1.1** Vektorok egy $V$ halmaza a vektorokon értelmezett összeadás és valós számmal való szorzás műveletére $\mathbb{R}$ feletti **vektorteret** alkot, ha teljesülnek a következők:

| | | |
|---|---|---|
| (ö0): | $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ | $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ |
| (ö1): | $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ | $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ |
| (ö2): | $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ | $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ |
| (ö3): | $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{u} \in V$ | $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ |
| (ö4): | $\forall \mathbf{u} \in V : \exists (-\mathbf{u})$ | $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ |
| −− | | |
| (s0): | $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u} \in V$ | $\lambda \mathbf{u} \in V$ |
| (s1): | $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ | $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ |
| (s2): | $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u} \in V$ | $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{u}$ |
| (s3): | $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u} \in V$ | $\lambda(\mu \mathbf{u}) = (\lambda \mu)\mathbf{u}$ |
| (s4): | $\forall \mathbf{u} \in V$ | $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ |

*Példák*:

1. Valós 1-;2-;3-dimenziós vektorok $\mathbb{R}$ feletti vektorteret alkot a szokásos műveletekkel.

2. Rendezett valós szám $k$-asok

$$(x_1; \ldots; x_k) + (y_1; \ldots; y_k) := (x_1 + y_1; \ldots; x_k + y_k)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x_1; \ldots; x_k) := (\lambda x_1; \ldots; \lambda x_k)$$

3. $\leqslant k$-ad fokú valós együtthatójú polinomok (polinom összeadásra és valóssal való szorzásra)

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Tulajdonságok:

- $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \to$ nem kell zárójelezni
- $\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1 \to$ sorrend nem számít
- $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \Leftrightarrow \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \to$ van kivonás
- $\lambda \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} \mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{u}_2}{\lambda}$

Néhány egyszerű következménye az axiómáknak:

1. $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v} \quad / - 0 \cdot \mathbf{v}$$
$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$$

2. $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$$\lambda \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0} \quad / - \lambda \cdot \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}$$

3. $(-1)\mathbf{v} = (-\mathbf{v})$

$$(1 + (-1))\mathbf{v} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v}$$
$$(1 + (-1))\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} \quad \overset{\text{(ö4)}}{\Longrightarrow} \quad (-1)\mathbf{v} = (-\mathbf{v})$$

4. $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
   $\Leftarrow \checkmark$ lásd (1) ill. (2).
   $\Rightarrow$ ha $\lambda \neq 0$, akkor:
$$\frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbf{v}) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0}$$
$$\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
   Tehát, vagy $\lambda = 0$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\checkmark$

### 1.2.1. Altér

**Definíció 1.2** $(V, +, \cdot)$ vektortér, $U \subseteq V$. $U$ **altér**, ha maga is vektortér ugyanazon műveletekkel.

Például: $S : \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Altere-e a $V : \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$-nek?
Ellenőrizzük az axiómákat... $\checkmark$
Észrevehetjük, hogy ö1, ö2, illetve s1-s4-et nem kell ellenőrizni, hiszen egy részhalmazra mindenképpen teljesülnek.

**Tétel 1.1** $U \subseteq V, U \neq \emptyset$:

$$\boxed{U \text{ altér } \Leftrightarrow \text{ ha } U \text{ zárt az összeadásra és szorzásra}}$$

**Bizonyítás 1.1**
$\Rightarrow \checkmark$ (Definíció szerint)
$\Leftarrow$ ö0, s0 $\checkmark$, ö1, ö2, s1-s4 $\checkmark$
ö3: $0 \cdot \mathbf{u} \in U$ (hiszen zárt) $\Rightarrow \mathbf{0} \in U \checkmark$
ö4: $(-1)\mathbf{u} \in U$ (hiszen zárt) $\Rightarrow (-\mathbf{u}) \in U \checkmark$ $\square$

**Triviális alterek**:

1. önmaga (hiszen minden halmaz önmagának részhalmaza
2. $\{\mathbf{0}\}$

**Alterek a síkban**

- triviális alterek (sík összes pontjához tartozó helyvektor, illetve csak az origóhoz tartozó helyvektor)
- origón átmenő egyenesekhez tartozó pontok helyvektorai (ellenőrzés a fenti tétel használatával: összeadásnál és szorzásnál is benne maradunk az egyenesben)

Ha az egyenesen lévőkhöz hozzá veszünk egy rajta kívül lévő ponthoz tartozó helyvektort, akkor így a sík összes pontjához tartozó helyvektort megkaphatjuk (lásd lineáris kombináció)

### 1.2.2. Lineáris kombináció

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$
$$\rightarrow \boxed{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n}$$

### 1.2.3. Generátum (generált altér)

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Például:

$$\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = \{\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$$

**Tétel 1.2** $\forall$ generátum altér.

**Bizonyítás 1.2** Hiszen zárt a szorzásra és az összeadásra. □

Ha $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v} \to \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbb{R}^2$.

**Definíció 1.3** *Generátorrendszer* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V)$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = V$$

Vagyis, ha egy $V$ vektortér egy vektorrendszerének generált altere megegyezik $V$-vel, akkor őket generátorrendszernek hívjuk.

**Definíció 1.4** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ együtt függetlenek[1]. (Két féle definíció:)

1. $\nexists \mathbf{v}_i$, ami a többiek lineáris kombinációjaként előáll.

2. Ha $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow$
   $\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ (triviális lin. kombináció)

Bizonyítsuk be, hogy a két definíció ekvivalens.
(1) $\Rightarrow$ (2) Indirekt, Tfh: $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ és $\lambda_1 \neq 0$

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 = -\lambda_2 \mathbf{v}_2 - \ldots - \lambda_n \mathbf{v}_n \quad / : \lambda_1$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{-\lambda_2 \mathbf{v}_2}{\lambda_1} - \ldots - \frac{\lambda_n \mathbf{v}_n}{\lambda_1} \quad \lightning$$

Hiszen (1) alapján egyik sem áll elő a többi lin. kombinációjaként.
(2) $\Rightarrow$ (1) Indirekt, Tfh: $\mathbf{v}_1 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$

$$\mathbf{0} = -\mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n \quad \lightning$$

Hiszen $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, így ez nem triviális lin. kombináció (pedig (2) pont ezt mondja).

**Definíció 1.5** *Bázis*: független generátorrendszer.
Például: $\langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

**Definíció 1.6** *Dimenzió*: A vektortér tetszőleges bázisának elemszáma.

**Tétel 1.3** Egy $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszer $V$-ben *bázis*t alkot $\Leftrightarrow \forall \mathbf{v} \in V : \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

felírás egyértelmű.

[1] Tehát ez nem egy vektorra értendő tulajdonság, hanem vektorok egy halmazára

**Bizonyítás 1.3**
$\Rightarrow$

$$\mathbf{v} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \mu_n\mathbf{v}_n$$

A kettőt egymásból kivonva:

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{v}_n$$

Mivel $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ független (hiszen bázis), ezért ez csak a triviális lineáris kombinácó lehet, tehát $\lambda_i = \mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. ✓

$\Leftarrow$
Mivel $\mathbf{v} \in V$ előáll $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineáris kombinációjaként, ezért $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ generátorrendszer, de tegyük fel, hogy nem független. Tehát van olyan $\mathbf{v}_i$ (legyen ez az egyszerűség kedvéért $\mathbf{v}_1$), ami előáll a többi lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v}_1 = \kappa_2\mathbf{v}_2 + \kappa_3\mathbf{v}_3 + \ldots + \kappa_n\mathbf{v}_n$$

De ez ellentmondás, hiszen $\mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1$, ami az előzőtől különböző felírás, de feltettük, hogy minden $V$-beli vektor egyértelműen felírható a $\mathbf{v}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ vektorokkal. Tehát $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ független generátorrendszer, vagyis bázis. ✓ □

**Definíció 1.7**

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n \qquad \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\},\ \mathbf{v} \in V \quad (\mathcal{B} \text{ bázis } V\text{-ben})$$

A $\mathbf{k} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ vektor a $\mathbf{v}$-nek a $\mathcal{B}$ bázisban vett **koordináta-vektora**.
*Megjegyzés*: A fenti tétel alapján adott bázisban felírt koordináta-vektor egyértelmű.

**Tétel 1.4** $\boxed{\text{Kicserélési tétel}}$

$$\begin{array}{rl} F = \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n & \text{független } V\text{-ben} \\ G = \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_k & \text{generátor rendszer } V\text{-ben} \end{array}$$

Állítás: $\forall i$-hez $\exists j$, hogy

$$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{i-1}, \mathbf{f}_{i+1}, \ldots, \mathbf{f}_n, \mathbf{g}_j$$

független legyen (magyarul, bármelyik $\mathbf{f}$-et lecserélve egy bizonyos $\mathbf{g}$-vel független rendszer marad $V$-ben).

**Bizonyítás 1.4**
Indirekt, tfh: $\mathbf{f}_1$ nem cserélhető le semelyik $\mathbf{g}_j$-re, azaz a cserélésnél nem marad független:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \\ \mathbf{g}_2, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \\ \vdots \\ \mathbf{g}_k, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \end{array}\right\} \text{nem függetlenek}$$

Azaz felhasználva a függetlenség (2) definícióját:

$$\lambda_1\mathbf{g}_j + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{f}_n = \mathbf{0} \quad \text{úgy, hogy nem triviális komb.}$$

Tehát van olyan $\lambda$ ami $\neq 0$. Azt is tudjuk, hogy $\lambda_1 \neq 0$, hiszen ha $\lambda_1 = 0$, akkor a többi $\lambda$ közül kéne valamelyiknek nem nullának lenni, ahhoz hogy ne legyenek függetlenek, viszont akkor $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \ldots, \mathbf{f}_n$ nem lenne független, ami ellent mond az állításnak (ha $F$ független rendszer $V$-ben akkor ennek részhalmaza is az). Tehát:

$$\lambda_1 \mathbf{g}_j = -\lambda_2 \mathbf{f}_2 - \ldots - \lambda_n \mathbf{f}_n \quad / : \lambda_1 \quad (\lambda_1 \neq 0)$$
$$\mathbf{g}_j = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{f}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{f}_n$$
$$\mathbf{g}_j \in \langle \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \rangle$$

Tehát a számszorosaik is benne vannak, azaz ezek lineáris kombinációja is:

$$\lambda_1 \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \mathbf{g}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{g}_k \in \langle \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \rangle$$
$$\underbrace{V = \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_k \rangle}_{\text{hiszen } G \text{ generátorrendszer}} \quad \subseteq \quad \langle \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \rangle$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $\langle \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \rangle$ a $V$ összes vektorát generálja, így $\mathbf{f}_1$-t is. Ez viszont ellentmondásra vezet, hiszen $F$ független a feltétel szerint. □

*Következmény*: Ha $F$ független rendszer és $G$ generátorrendszer $V$-ben, akkor $|F| \leqslant |G|$. Hiszen minden $\mathbf{f}$ helyére írhatunk egy $\mathbf{g}$-t és így is független marad (tehát nincs két egyforma).

**Tétel 1.5** Bármely két azonos vektortérhez tartozó bázisnak ugyanannyi eleme van. (Tehát a dimenzió jól definiált)

**Bizonyítás 1.5**
Ehhez felhasználjuk a fenti **kicseréléses tétel** következményét:
$B_1$ és $B_2$ bázisok $V$-ben $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |B_1| \leqslant |B_2| \\ |B_2| \leqslant |B_1| \end{array}\right\} |B_1| = |B_2| \checkmark$$

*Megjegyzés*: Nem elfelejteni a bázis definícióját (**független generátor**rendszer), tehát a fenti következmény használatakor egyszer $B_1$-et tekintjük független rendszernek és $B_2$-őt generátorrendszernek, másodszor pedig fordítva. □

## 1.3. Lineáris egyenletrendszerek

Általánosan egy egyenletrendszer így néz ki:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

Ezt a következő képpen írhatjuk fel egyszerűbben:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array}$$

Megnevezések: A vonalig hívjuk *együtthatók mátrixá*nak, az egészet pedig *kibővített mátrix*nak.

Elemi ekvivalens átalakítások: (Milyen lépések megengedettek?)

1. Egy egyenletet lehet $\lambda \neq 0$-val szorozni
2. Egy egyenlethez hozzá lehet adni a másik $\mu$-szörösét
3. Két egyenlet sorrendjét meg lehet változtatni
4. A kibővített mátrix „csupa 0” sora törölhető

*Algoritmus*:

1. A bal felső ($a_{11}$) elem $\neq 0$?
   IGAZ $\to$ osztjuk az első sort ezzel az elemmel.
   HAMIS $\to$ $\exists$ sor amivel cserélhető úgy, hogy ekkor a bal felső elem $\neq 0$?
      IGAZ $\to$ cseréljük
      HAMIS $\to$ jobbra lépünk és ez lesz a vizsgálandó elem
2. Az első sor $a_{21}$-szeresét kivonjuk a 2-ből, $a_{31}$-szeresét kivonjuk a 3-ból, ...

3. Ha az algoritmussal elértük a jobb szélét vagy az alját az együtthatók mátrixának akkor végeztünk.
   - Ha találunk olyan sort, ahol csupa nulla van, azt elhagyhatjuk.
   - Ha találunk olyan sort, ahol csak az utolsó (a vonal mögötti) nem nulla, akkor ezt *tilos sor*nak nevezzük. Ekkor **nincs** megoldása az egyenletrendszernek!

Nézzünk meg konkrét példákat:

*1. példa*:
$$\underbrace{\begin{array}{ccc|c} 2&4&6&8\\ 3&6&11&10\\ 5&12&19&20\end{array}}_{\substack{\text{első sort leoszt-}\\ \text{juk 2-vel}}} \to \underbrace{\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 3&6&11&10\\ 5&12&19&20\end{array}}_{\substack{\text{levonjuk az első sort az}\\ \text{alatta lévőkből ahányszor kell}}} \to \underbrace{\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&0&2&-2\\ 0&2&4&0\end{array}}_{\substack{\text{az éppen „aktuális” bal}\\ \text{felső elem} = 0 \to \text{csere}}} \to$$

$$\to \underbrace{\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&2&4&0\\ 0&0&2&-2\end{array}}_{\text{osztjuk az aktuális sort}} \to \underbrace{\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&\boxed{1}&2&0\\ 0&0&2&-2\end{array}}_{\substack{\text{alatta végig 0,}\\ \text{megyünk jobbra, le}}} \to \underbrace{\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&\boxed{1}&2&0\\ 0&0&\boxed{1}&-1\end{array}}_{\text{utolsó sort is leosztottuk}}$$

Innen szépen visszakövethetjük, hogy mik a megoldások. Az átlóban bekeretezett egyeseket **vezéregyesek**nek hívjuk. Az utoljára megkapott mátrixot **lépcsős alak**nak (LA) nevezzük. Amennyiben nem akarjuk kézzel visszakövetni, hogy akkor most ténylegesen mik a megoldások, mechanikusan tovább csinálhatjuk, ugyanazt amit eddig, csak visszafelé (felfelé).

$$\underbrace{\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&4\\ 0&1&2&0\\ 0&0&\boxed{1}&-1\end{array}}_{\substack{\text{az utolsó sort kivonjuk}\\ \text{a fentiekből ahányszor kell}}} \to \underbrace{\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&7\\ 0&\boxed{1}&0&2\\ 0&0&\boxed{1}&-1\end{array}}_{\substack{\text{az utolsó előtti sort kivonjuk}\\ \text{a fentiből ahányszor kell}}} \to \underbrace{\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&0&0&3\\ 0&\boxed{1}&0&2\\ 0&0&\boxed{1}&-1\end{array}}_{\text{Redukált lépcsős alak (RLA)}}$$

Ezzel készen vagyunk, leolvashatjuk, hogy $x = 3, y = 2$ és $z = -1$.

*2. példa*: $\left.\begin{array}{ccc|c} 2&4&6&8\\ 3&6&11&10\\ 5&10&19&20\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&4\\ 3&6&11&10\\ 5&10&19&20\end{array}\right. \to \underbrace{\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&0&2&-2\\ 0&0&4&0\end{array}\right.}_{\substack{\text{mindegyik nulla,}\\ \text{jobbra lépünk}}} \to \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&4&0\end{array}\right. \to$

$\to \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&0&\boxed{1}&-1\\ 0&0&0&\mathbf{4}\end{array}\right.$ $\to$ *Tilos sor*, tehát nincs megoldás!

*3. példa*: $\left.\begin{array}{ccc|c} 2&4&6&8\\ 3&6&11&12\\ 5&10&19&20\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&4\\ 3&6&11&12\\ 5&10&19&20\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&0&2&0\\ 0&0&4&0\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&0&1&0\\ 0&0&4&0\end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&3&4\\ 0&0&\boxed{1}&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right.$

Redukált lépcsős alakra hozzuk: $\left.\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&2&0&4\\ 0&0&\boxed{1}&0\end{array}\right.$

Látható, hogy a második oszlopban nincs vezér egyes, ez azt jelenti, hogy van **szabad paraméter** (nyílván, ha több ilyen oszlop van, akkor több szabad paraméterrel operálunk): $x = 4 - 2p_1, y = p_1$ és $z = 0$. Tehát végtelen sok megoldás van.

Minden ismeretlent ki lehet fejezni a jobb oldali számmal és a szabad paraméterek segítségével.

### 1.3.1. Összefoglalás

Ha RLA-ra hoztuk, akkor:

1. $\exists$ megoldás $\iff \nexists$ tilos sor.
2. Minden sorban pontosan 1 vezéregyes van (az előtte lévők nullák). Ha $\forall$ oszlopban van vezéregyes, akkor a megoldás **egyértelmű**.
3. Ha **nem** minden oszlopban van vezéregyes, akkor **nem** egyértelmű a megoldás $\to$ végtelen sok megoldás van.

A közhiedelemmel ellentétben csak a következő állítás igaz a hasonló jellegű állítások közül (ami az ismeretlenek és az egyenletek számát kapcsolja össze):
*Állítás*: Ha több ismeretlen van, mint egyenlet, akkor nincs egyértelmű megoldás.

Tehát mikor van egy $n \times n$-es lineáris egyenletrendszernek ($n$ db egyenlet, $n$ db ismeretlen) megoldása?

- ha a nem keletkezik csupa 0 sor
- illetve, ha nem lesz tilos sor

Hogy lehet megállapítani?

$$\left.\begin{array}{ll} ax + by = e & / \cdot c \\ cx + dy = f & / \cdot a \end{array}\right\} \ominus \quad \to \quad cby - ady = ec - af \quad \Rightarrow \quad y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Tehát, ha $ad - bc \neq 0$, akkor $\exists$ egyértelmű megoldás, különben nem!
Erre példa: $(a, b)$ és $(c, d)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe $|ad - bc|$.

## 1.4. Determináns

Minek van determinánsa?

- $n \times n$-es $M$ mátrixnak értéke: $\det M$.

**Definíció 1.8** Legyen $A = \{1, 2, \dots, n\}$, ekkor az $f : A \to A$ bijektív függvényt *permutáció*nak hívjuk. Azaz minden $1, 2, \dots, n$ számhoz kölcsönösen egyértelműen egy $1, 2, \dots, n$ számot rendelünk.

Példa: $1, 2, 3, 4, 5$ egy tetszőleges permutációja: $5, 3, 1, 2, 4$
$\sigma$ legyen egy hozzárendelési függvény, mely megmutatja, hogy az adott pozíción melyik szám áll:

- $\sigma(1) = 5$
- $\sigma(2) = 3$
- $\sigma(3) = 1$
- $\sigma(4) = 2$
- $\sigma(5) = 4$

**Definíció 1.9** *Inverziószám*: egy tetszőleges permutációhoz tartozó szám, mely azt fejezi ki, hogy az összes lehetséges számpárt vizsgálva, mennyi pár áll inverzióban (fordított sorrend; csökkenő).

Példa: $5, 3, 1, 2, 4$. Tehát az inverziószám ez esetben 6.

- legkisebb inverziószám: 0 (ha, az elemek sorrendben (növekvő) vannak)
- legnagyobb inverziószám: $\frac{n(n-1)}{2}$ (ha, teljesen megfordult a sorrendje az eredeti permutációhoz képest)
- páros permutáció: a permutáció inverziószáma páros
- páratlan permutáció: a permutáció inverziószáma páratlan

**Definíció 1.10** *„Bástyaelhelyezés”*: Ha egy $n \times n$-es „sakktáblára” úgy helyezünk le $n$ bástyát, hogy semelyik kettő sem ütik egymást, akkor azt bástyaelhelyezésnek hívjuk (minden sorban és oszlopban csak egy bástya van).

Ha jól meggondoljuk a *bástyaelhelyezés*ekhez *permutáció*kat tudunk rendelni; legyen az adott permutáció $\sigma$, ekkor az $i$. bástyát az $i$. sor, $\sigma(i)$. oszlopába rakjuk (Ez a hozzárendelés visszafelé is megfogalmazható, tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a bástyaelhelyezés és a permutáció között). Ennek megfelelően egy permutáció *inverziószám*át megfeleltethetjük annak, hogy az adott bástyaelhelyezésben hány olyan bástyapár van, ami ÉK-DNY elhelyezkedésű, hiszen ekkor van az, hogy a permutációban egy magasabb szám előrébb áll egy kisebb számnál (inverzióban vannak).

**Definíció 1.11** *Determináns*: $I(\sigma) :=$ a $\sigma$ permutáció inverziószáma.

$$\boxed{\det A := \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}}$$

Tulajdonképpen vesszük az összes *bástyaelhelyezést* (jelen esetben egy $n \times n$-es mátrixon helyezgetjük a bástyákat), és összeszorozzuk azokat a számokat, ahova raktunk bástyát, majd attól függően, hogy az adott permutáció páros vagy páratlan (másképp megfogalmazva: páros vagy páratlan ÉK-DNY elhelyezkedésű bástyapár van), annak függvényében pozitív vagy negatív előjellel vesszük, végül összeadjuk ezeket a szorzatokat.

*Példa 1*: $\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =?$

1. Permutációk felírása, illetve ezek inverziószáma: $\begin{matrix} 1\,2 \to 0 \\ 2\,1 \to 1 \end{matrix}$
2. Tehát definíció alapján: $\det A = (-1)^0 \cdot a \cdot d + (-1)^1 \cdot b \cdot c = ad - bc$

*Példa 2*: $\det B = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =?$

1. Permutációk felírása, illetve ezek inverziószáma:
$$\begin{array}{c|c} 1\,2\,3 \to 0 & 2\,3\,1 \to 2 \\ 1\,3\,2 \to 1 & 3\,1\,2 \to 2 \\ 2\,1\,3 \to 1 & 3\,2\,1 \to 3 \end{array}$$
2. Tehát definíció alapján: $\det B = (-1)^0 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 + (-1)^1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 8 + (-1)^1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 + \ldots$

*Megjegyzés*: Későbbiekben nem a definíciót fogjuk használni a determináns kiszámítására, mert hosszadalmas.

### 1.4.1. Tulajdonságok

1. Ha a főátló alatt (felső háromszög mátrix) v. fölött (alsó háromszög mátrix) minden elem 0, akkor a determináns a főátlóban lévő elemek szorzata.

   *Bizonyítás*: Egyetlen permutáció (az $1, 2, 3, \ldots, n$) van, ahol nincs a szorzatban 0. Tehát az összeg csak ebből az egy szorzatból – a főátlóban lévő elemek szorzatából – áll.

2. Ha egy sorban vagy oszlopban minden elem 0, akkor a determináns 0.

   *Bizonyítás*: Minden sorból és minden oszlopból pontosan 1 elem szerepel mindegyik szorzatban, tehát ha egy oszlop v. sor csupa 0, akkor minden szorzatban lesz 0; ezek összege is 0 lesz.

3. Ha egy sorban v. oszlopban minden elemet megszorzunk egy $\lambda$-val, akkor a determináns a $\lambda$-szorosára változik.

4. $$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & \ldots & a_{1n}+a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   *Bizonyítás*: Definíció alapján könnyedén bizonyítható.

5. Ha két sor v. két oszlop azonos, akkor a determináns 0.

   *Bizonyítás:* Legyen az $i$. és a $j$. sor azonos. Vegyük az $S$ permutációt, amire $\sigma(i) = k$, illetve $\sigma(j) = l$, illetve az $S'$ permutációt, amire $\sigma(i) = l$, illetve $\sigma(j) = k$, az összes többi azonos. Ha jól meggondoljuk, akkor ezekhez tartozó szorzatok abszolútértékben egyenlőek, hiszen a szorás kommutatív. De mi a helyzet az előjelükkel?

| | 1 | 2 | ... | $i$ | ... | $j$ | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | ... | ... | ... | $k$ | ... | $l$ | ... | ... |
| $S'$ | ... | ... | ... | $l$ | ... | $k$ | ... | ... |

Ahhoz, hogy $S$-ből $S'$-t kapjunk, először el kell mozgatnunk $k$-t az $i$. pozícióról az $j$-be, mégpedig úgy, hogy mindig a mellette levővel kicseréljük. Egy szomszédos csere 1-el változtatja meg az inverziószámot, hiszen csak az egymáshoz való viszonyuk változik. Tehát, ha $k$-t $j$. pozícióba visszük, akkor $j-i$ csere szükséges. Ekkor az $l$ a $j-1$. pozícióban lesz, hiszen a végén $k$ helyet cserélt vele. Tehát, hogy őt elmozgassuk az $i$. pozícióba $j-i-1$ lépés szükséges. Tehát összesen, hogy $S$-ből $S'$-t kapjunk $2(j-i)-1$ cserét hajtottunk végre, azaz páros inverziószámból páratlant, páratlanból párosat csinál, vagyis $S$-hez és $S'$-höz tartozó szorzat előjele ellentétes. Az összes lehetséges permutációt hasonlóan párosíthatjuk, tehát a determináns 0.

6. Ha egy oszlophoz v. sorhoz egy másik oszlop v. sor $\lambda$ szorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

*Bizonyítás*: Az előző, illetve a 4-es tulajdonságot felhasználva következik:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=0}$$

*Megjegyzés*: A fenti példa azt mutatja, ha az első sorhoz a második sor $\lambda$-szorosát adjuk, természetesen tetszőleges két sorra, ugyanígy működik a dolog.

7. Ha kicserélünk két sort v. oszlopot, akkor a determináns a $-1$-szeresére változik.

*Bizonyítás:* Tekintsük az $i$. és a $j$. sort. Adjuk hozzá az $i$-hez a $j$. sort, majd ezt vonjuk ki a $j$-ből. Végül adjuk hozzá ezt az $i$-hez. Ekkor az $i$-ben lesz az eredetileg $j$. sor, a $j$-ben pedig az eredeti $i$ sor $-1$-szerese. Eddig a determináns nem változott, de ahhoz, hogy tényleg a két sort felcseréljük a $j$-et meg kell szorozni $-1$-el. Tehát a determináns valóban a $-1$-szeresére változik:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

### 1.4.2. További azonosságok

Az $A$ egy $n \times n$-es mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$$

**Tétel 1.6** $\boxed{\text{Determinánsok szorzás-tétele}}$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

*Megjegyzés*: Nyílván, ha $A$ és $B$ négyzetes mátrix, illetve ha értelmezhető a szorzatuk.

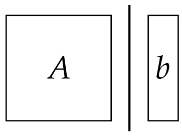
# 1.5. Mátrixok

Tehát tudjuk, hogy a Gauss-elimináció lépései, hogyan hatnak a determinánsra. Ha sikerül LA-ra hozni a mátrixot, akkor annak a determinánsa a főátlók szorzata (1 v. 0), de nem felejtjük el, hogy időközben a determináns értéke megváltozott.

De miért is jó, hogy tudjuk, hogyan kell kiszámolni egy determinánst?

## 1.5.1. Mire jó a determináns?

Segítségével meg tudjuk határozni, hogy egy $n \times n$-es egyenletrendszernek, mikor van megoldása.



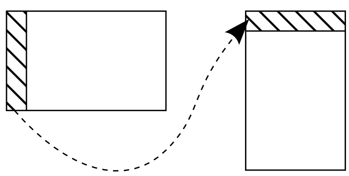

$\rightarrow \quad A|b$

**Tétel 1.7** $\boxed{\exists! \text{ mo} \Leftrightarrow \det \text{A} \neq 0}$

**Bizonyítás 1.7** Akkor és csak akkor létezik egyértelmű megoldás, ha a lépcsős alakban minden oszlopban van vezéregyes:
$\Rightarrow$ Amikor előáll a lépcsős alak (Gauss-elmináció lépései), akkor a determináns értéke változik, de a *nulla mivolta **nem***!
Tehát, ha a lépcsős alakban minden oszlopban van 1-es tehát a lépcsős alakra hozott mátrix determinánsa $1 \neq 0$, azaz $\det A \neq 0 \quad \checkmark$.

$\Leftarrow$ A lépcsős alakra hozás után megtudjuk, hogy $\det A \neq 0$. Tehát a főátlóban nem volt 0, azaz minden oszlopban van vezéregyes. ✓ □

**Definíció 1.12** *Transzponált*: Az $A(k \times n)$-es mátrix transzponáltja $A^T$, ami egy $n \times k$-s mátrix, amit úgy kapunk, hogy minden oszlopból a megfelelő sorrendben sort csinálunk:



Ha $n \times n$-es mátrixunk van, akkor ez egy egyszerű főátlóra való tükrözéssel megvalósítható.

**Tétel 1.8**

$$\boxed{\det A = \det A^T} \qquad A(n \times n)$$

**Bizonyítás 1.8**

$$\begin{array}{ccc} A & & A^T \\ \boxed{\phantom{XXX}} & & \boxed{\phantom{XXX}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{itt rendesen a Gauss-} & & \text{ugyanazt csináljuk csak} \\ \text{elimináció lépéseit csináljuk} & & \text{nem sorokon, hanem oszlopokon} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{felső háromszög mátrix} & & \text{alsó háromszög mátrix} \\ & \nwarrow \text{ főtáló elemei egyelőek } \nearrow & \\ & \Downarrow & \end{array}$$

$$\det A = \det A^T$$

□

**Definíció 1.13** *Előjeles aldetermináns*: $A_{ij}(n-1 \times n-1)$, ha $A(n \times n)$. Ez az $a_{i,j}$-hez tartozó előjeles aldetermináns, melyet úgy kapunk, hogy az $A$-ból elhagyjuk az $i$. sort és a $j$. oszlopot, vesszük ennek a mátrixnak a determinánsát, majd megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

**Tétel 1.9** $\boxed{\text{Kifejtési-tétel}}$
Ha vesszük a mátrix egy sorát vagy oszlopát, akkor az itt álló elemeket megszorozva a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánssal, majd ezeket összegezve, megkapjuk a mátrix determinánsát:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot \underbrace{(-1)^{i+j} A_{ij}}_{\text{előjeles aldet.}}} \quad \text{(ez az } i\text{. sor szerinti kifejtés)}$$

**Bizonyítás 1.9** Bizonyítani csak egy sor kifejtését fogjuk, hiszen ha transzponáljuk, akkor az oszlopok helyett továbbra is sorokkal dolgozhatunk tovább, viszont a fenti tétel alapján $\det A = \det A^T$.

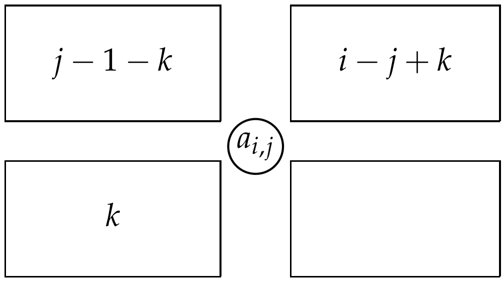
Ha megvizsgáljuk a fenti szummát, akkor észrevehetjük, hogy ha az előjeleket nem nézzük, csak magukat a szorzatokat, akkor ezek megegyeznek a determináns definíciójában lévő szorzatokkal, hiszen mind a két felírásban tulajdonképpen vesszük az összes lehetséges bástyaelhelyezést - permutációt. Kérdés, hogy az előjelekkel mi a helyzet? Vizsgáljunk meg egy-egy szorzatot mindkét összegből (amik bástyaelhelyezésben azonosak); tfh, hogy a kifejtés során az $i$. sor $j$. oszlopában tartunk, ekkor a szorzat a következő:

$$a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} A_{ij}$$

A determináns definíciója alapján pedig:

$$(-1)^{I(\sigma)} \cdot a_{1,\sigma 1} \cdot \ldots \cdot a_{i,j} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma n}$$

Azt előzőekben tárgyaltuk, hogy abszolútértékben a két szorzat megegyezik, kérdés, hogy $(-1)^{I(\sigma)} \stackrel{?}{=} (-1)^{i+j}$.




Tegyük fel, hogy $a_{i,j}$-től DNY-ra $k$ bástya van. Mivel $a_{i,j}$ a $j$. oszlopban van, ezért előtte $j-1$ bástya van, tehát $a_{i,j}$-től ÉNY-ra $j-1-k$ darab. Továbbá mivel $a_{i,j}$ az $i$. sorban van, ezért felette $i-1$ bástya van, tehát tőle ÉK-re $i-1-(j-1-k) = i-j+k$ darab bástya van. Ha jól megnézzük, akkor egy ilyen permutációban $a_{i,j}$-re helyezett bástya $k+i-j+k$ darab bástyával van ÉK-DNY elhelyezkedésben. Ez $k$ választásától függetlenül akkor páratlan, ha $i-j$ páratlan, ami pontosan akkor páratlan, ha $i+j$ páratlan. Ezzel beláttuk, hogy az adott permutáció inverziószámának páratlansága megegyezik $i+j$ páratlanságával, tehát:

$$(-1)^{I(\sigma)} = (-1)^{i+j}$$ □

**Definíció 1.14** *$n \times n$-es egységmátrix*: minden elem nulla, kivéve a főátló, ahol csupa 1-es van:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Jele: $I_n$, $E_n$, $E$.

### 1.5.2. Mátrix-műveletek

**Összeadás, kivonás**

Két azonos alakú mátrixot összeadhatunk, kivonhatjuk egymásból: megfelelő elemeket összeadjuk/kivonjuk.
$A+B = B+A \qquad (A+B)+C = A+(B+C)$

**$\lambda$-val való szorzás**

Minden elemet megszorzunk $\lambda$-val.

**Szorzás**

Két mátrixot csak akkor szorozhatunk össze egymással, ha az első! mátrix oszlopainak száma megegyezik a második! mátrix sorainak számával. Nem mindegy a sorrend: a szorzás mátrixok között **nem kommutatív**.

$$A(k \times n) \cdot B(n \times l) = C(k \times l)$$

$$[A \cdot B]_{ij} = C_{ij} := (A\ i.\ \text{sorvektora}) \cdot (B\ j.\ \text{oszlopvektora}) =$$

$$= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}) = \sum_{m=1}^{n} a_{im} \cdot b_{mj}$$

*Példa*:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 17 & 22 \\ 21 & 26 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Szorzás tulajdonságai**:

- $0 \cdot A = 0$
- $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$
- $\left.\begin{array}{rcl} A \cdot (B \cdot C) & = & (A \cdot B) \cdot C \\ A \cdot (B + C) & = & AB + AC \\ (A + B) \cdot C & = & AC + BC \end{array}\right\}$ ha ezek a műveletek elvégezhetőek

Szorozzunk meg balról egy oszlopvektort, nézzük meg mit kapunk:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Ha jól megnézzük egy „egyenletrendszer kezdeményt” látunk. Tehát pl. a következő egyenletrendszert:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 & = & 5 \\ 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 8 \end{array}\right. \qquad \text{vagy röviden:} \quad A|b = \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \end{array}$$

Felírhatjuk így is:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vagyis tulajdonképpen:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

*Kicsit kalandozzunk el*:
Legyen $A(n \times n)$. Tegyük fel, hogy létezik „inverze” $(A^{-1})$. Elvárjuk, hogy $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$. Nézzük csak meg mégegyszer a fenti egyenletet:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad / \cdot A^{-1} \text{ balról}$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Tehát, ha meg tudnánk határozni egy mátrix inverzét, akkor az egyenletrendszerek megoldását egy szimpla mátrix szorzással ki tudnánk számolni.

### 1.5.3. Inverz mátrix

Nem minden mátrixnak van, pl:

- nullmátrix
- egy olyan $A$ mátrixnak, melyhez $\exists B \neq 0$, hogy $AB = 0$.

**Definíció 1.15** *Balinverz*: $B$ mátrix az $A$ mátrix balinverze, ha $B \cdot A = E$.

**Definíció 1.16** *Jobbinverz*: $J$ mátrix az $A$ mátrix jobbinverze, ha $A \cdot J = E$.

**Tétel 1.10** Ha $A$-nak $B$ a balinverze és $J$ a jobbinverze, akkor $B = J$.

**Bizonyítás 1.10**

$$\begin{array}{l} B(AJ) = BI = B \\ (BA)J = IJ = J \end{array} \quad \text{mivel } B(AJ) = (BA)J \quad \Rightarrow \quad B = J$$

□

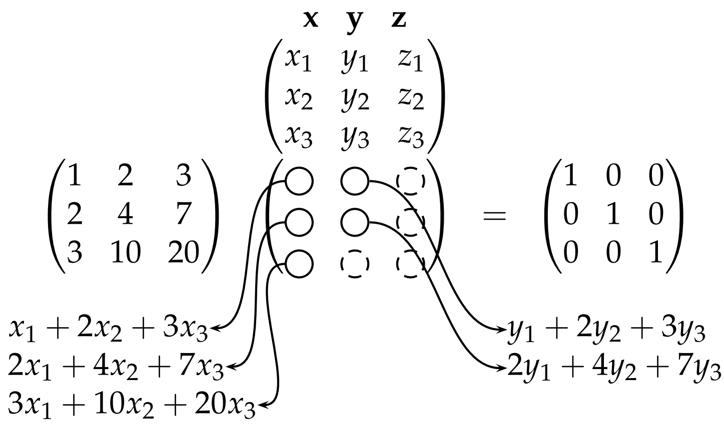
Ha $\mathbf{B} = \mathbf{J}$, akkor mindkettő egyértelmű, tehát **létezik inverze**. Már csak az a kérdés, hogy milyen mátrixnak van inverze?

**Tétel 1.11** Azoknak a mátrixoknak van jobbinverze, melyek determinánsa $\neq 0$. Tehát:

$$\boxed{\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A\text{-nak } \exists \text{ jobbinverze}}$$

**Bizonyítás 1.11**

$\Rightarrow$




Tulajdonképpen az $A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $A \cdot \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ egyenletrendszert kell megoldani. És az előzőekben tanultak alapján, ha $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists$ egyértelmű megoldás $\Rightarrow \exists$ jobbinverz.

Magát a tényleges megoldást, *Gauss-eliminációval* viszonylag könnyen kiszámíthatjuk. Vezessük végig a fenti konkrét példát. Ahhoz, hogy megkapjuk az $\mathbf{x}$-et, a következőt kell redukált lépcsős alakra hozni:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 10 & 20 & 0 \end{array}$$

Hasonlóan kell eljárni az **y**-al és **z**-vel is, azzal a különbséggel, hogy a vonaltól jobbra más áll. Vegyük észre, hogy a lépések során a bal oldal ugyanúgy változik, mind a 3 esetben, ezért az eliminációt „egyszerre" csinálhatjuk:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 20 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ha a fentiben elvégezzük a Gauss-elimináció lépéseit akkor a jobb oldalt fogjuk „megkapni" a mátrix jobbinverzét. Tehát:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 20 & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & -3 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{11}{4} & \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{4} & \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{-10}{4} & \frac{10}{4} & \frac{-2}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{19}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

Tehát az $A$ mátrix jobbinverze:

$$\begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{19}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{1}{4} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ Indirekt; Tfh: $\det A = 0$.
Ha a determináns 0, akkor a Gauss-elimináció közben lesz bal oldalon egy 0 sor. Ahhoz, hogy ne legyen ez a sor tilos sor, a vonaltól jobbra is csupa nullának kell lennie:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a jobbinverz determinánsa 0. Az viszont nem lehet hiszen mint tanultuk a Gauss-elimináció közben a determináns nulla mivolta nem változhat. Mivel kezdetben egységmátrix volt jobboldalt, aminek a determinánsa 1 ($\neq 0$), így ellenmondásba ütköztünk.

*Megjegyzés*: $\Leftarrow$ másképp:

$$\det(A \cdot J) = \det A \cdot \det J \qquad \text{(lásd determinánsok szorzástétele)}$$

$$A \cdot J = E \quad \Rightarrow \quad \det E = 1$$

$$\text{ha } \det A = 0, \text{akkor } 1 = 0 \ \lightning$$

□

**Lemma 1.1** *$A$ és $B$ $n \times n$-es mátrixok:*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

**Bizonyítás 1.1**

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$[AB]_{j,i} = \left[B^T \cdot A^T\right]_{i,j}$$

Tehát baloldalt az $A$ mátrix $j$. sorának és a $B$ mátrix $i$. oszlopának, jobb oldalt pedig a $B^T$ mátrix $i$. sorának és az $A^T$ mátrix $j$. oszlopának a skaláris szorzata. Mivel a transzponálás „megcseréli" a sorokat és az oszlopokat (a főátlóra tükrözünk) ezért a két oldal valóban egyenlő (a vektorok skaláris szorzata kommutatív). □

**Tétel 1.12** Minden $n \times n$-es $A$ mátrixnak, aminek van jobbinverze, annak van balinverze is.

**Bizonyítás 1.12**

$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det A^T \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^T\text{-nek van jobbinverze } (J_t)$$

$$A^T \cdot J_t = E$$

$$(A^T \cdot J_t)^T = E^T = E$$

$$J_t^T \cdot A^{T^T} = E$$

$$J_t^T \cdot A = E$$

Tehát $J_t^T$ az $A$ mátrix balinverze (tehát egy mátrix balinverze a mátrix transzponáltjának jobbinverzének transzponáltja). □

Következmény:

**Tétel 1.13** $\boxed{A\text{-nak létezik inverze} \Leftrightarrow \det A \neq 0.}$

**Tétel 1.14**

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

**Bizonyítás 1.14**

$$(AB) \cdot (AB)^{-1} = E \qquad / \cdot A^{-1} \text{ balról}$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1} \qquad / \cdot B^{-1} \text{ balról}$$

$$(B^{-1} \cdot B) \cdot (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

□

### 1.5.4. Rang

**Definíció 1.17** *Sorrang* $s(A)$: A lineárisan független sorok számának maximuma.

**Definíció 1.18** *Oszloprang* $o(A)$: A lineárisan független oszlopok számának maximuma.

**Definíció 1.19** *Determinánsrang* $d(A)$: Legnagyobb olyan $k$ hogy $A$ egy $k \times k$-as aldeterminánsa (kiválasztunk tetszőleges $k$ sort és $k$ oszlopot és a sorok és oszlopok metszéspontjában tekintjük az elemeket) nem nulla.

**Tétel 1.15**

$$\boxed{s(A) = d(A) \quad \Rightarrow \quad s(A) = d(A) = o(A) \quad \forall A}$$

**Bizonyítás 1.15** $d(A) = d(A^T)$, hiszen minden aldeterminánsnak megvan a párja (egyenlőek), tehát ha az egyik $\neq 0$, akkor a másik se. Ebből:

$$\underbrace{o(A) = s(A^T)}_{\text{o.} \rightarrow \text{sor}} = d(A^T) = d(A)$$

□

**Tétel 1.16**

$$\boxed{\forall A : \quad d(A) = s(A)}$$

**Bizonyítás 1.16** Legyenek a sorvektorok: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ ($\mathbb{R}^n$-beli vektorok). A sorvektorok által generált altér dimenziója a sorrang (a definíció egy értelmezése):

$$\dim\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = s(A) := s$$

Rendezzük úgy a vektorokat, hogy az első $s$ vektor független legyen, ekkor:

$$\langle \underbrace{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s}_{\text{tehát ez bázis}} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$$

Hiszen, tegyük fel, hogy ez nem igaz, akkor $\mathbf{v}_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_k$ között van olyan vektor, ami nem áll elő az első $s$ vektor lineáris kombinációjaként, tehát ezt hozzá véve szintén független rendszert kapunk, ami ellentmondás ($s$ dimenziójú térben nem lehet $s+1$ elemű független rendszer).

Ha belátjuk, hogy

$$\dim\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = d(A)$$

akkor kész vagyunk.

A Gauss-elimináció nem változtatja meg a sorvektorok által generált altér dimenzióját, hiszen a megváltozott sorok ugyanazt az alteret fogják generálni $\Rightarrow$ nem változik a dimenzió.

Vajon a determináns rang változik-e? Az világos, hogy a Gauss-elimináció műveletei közül a sorcsere és egy sor $\lambda \neq 0$-val való szorzás nem változtat a determináns nullaságán, tehát a determináns rang nem változik. De mi a helyzet egy sorhoz egy másik sor $\lambda$-szorosának hozzáadásával? Tegyük fel, hogy ekkor tudunk növelni a determinánsrangon (ha nőhet, akkor csökkenhet is - tehát változhat, így elég csak azt belátnunk, hogy nem nőhet), tehát találunk egy $k \times k$-asnál nagyobb nem 0 aldeterminánst. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az 1. sor érintett a kiválasztott aldeterminánsban, a második nem, de ennek a $\lambda$ szorosát adjuk az elsőhöz:

$$\left|\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{①+\lambda②} \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right| = \underbrace{\left|\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{①} \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right|}_{=0} + \lambda \cdot \underbrace{\left|\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{②} \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right|}_{=0} = 0$$

A jobb oldali két aldetermináns biztosan nulla, hiszen az eredeti mátrixban nem találtunk $k \times k$-asnál nagyobb nem nulla aldeterminánst (a Gauss-elmininánció előtt a mátrix rangja $k$), így viszont a 2. sor $\lambda$-szorosának hozzáadása után se találunk $k \times k$-asnál nagyobb nem 0 aldeterminánst, tehát nem lehet növelni a determinánsrangon!

Vagyis, ha Gauss-elimináljuk a mátrixot és kapunk egy $A'$ mátrixot, melyben legyen az első $l$ sor, amiben van vezéregyes, a maradék pedig csupa nulla sor. Ekkor ebben az $A'$ mátrixban van egy $l \times l$-es nem nulla aldetermináns (egységmátrix), ennél nagyobb viszont nincs, tehát $d(A') = l$. Viszont ez az $l$ darab sorvektor független rendszer is, hiszen nem állnak elő egymás lineáris kombinációjaként, tehát: $d(A') = l = s(A')$. Viszont, ahogy az előbbiekben láttuk a Gauss-elimináció nem változtatja meg sem a determinánsrangot sem a sorrangot, tehát: $d(A) = s(A)$.
Tehát az eddigi tételekből következik, hogy $\forall A$ mátrixra $d(A) = s(A) = o(A) = \mathbf{r}(\mathbf{A})$. Ezt hívjuk **rang**nak. ☐

**Mire használhatjuk?**

Ha egy adott vektorrendszer által generált altér dimenzióját megkaphatjuk úgy, hogy a vektorokat mátrixba rendezzük, majd meghatározzuk ennek a rangját (amit Gauss-eliminációva könnyen kiszámolhatunk). Példa:

$$\dim\langle(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(10,11,12)\rangle = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -9 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sorrangja 2, azaz } \overbrace{\text{a mátrix rangja 2}}$$

Illetve egy hasznos tétel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{pmatrix} \end{array} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tehát tulajdonképpen, ha $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mátrixegyenletünk van, akkor $\mathbf{b}$ az $A$ oszlopainak egy lineáris kombinációját adja.

**Tétel 1.17**

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ megoldható} \quad \Leftrightarrow \quad r(A|b) = r(A)}$$

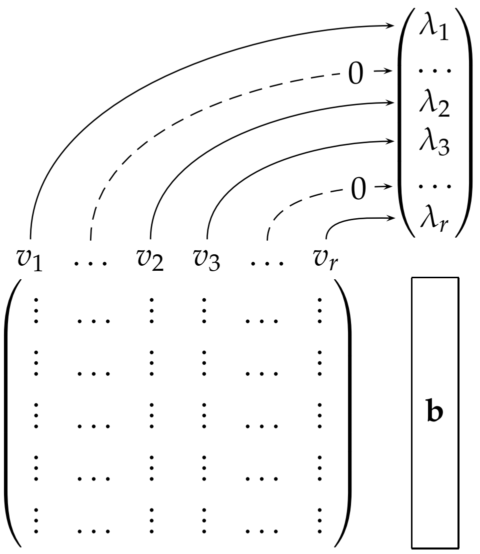
**Bizonyítás 1.17**

$\Rightarrow$ $\exists \mathbf{x}$, tehát $\exists A$ oszlopainak olyan lineáris kombinációja, ami $\mathbf{b}$-t adja, tehát ha $r(A) = r$, akkor $r(A|b) = r$ hiszen hozzávéve az oszlopvektorokhoz a $\mathbf{b}$-t nem nő a dimenzió.

$\Leftarrow$ $r(A|b) = r(A) = r$. Vegyük az $A$ oszlopvektorait; ezekhez hozzávéve $b$-t nem nő a vektorok által generált tér dimenziója, tehát $b$ előáll az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként (mivel $r$ az $A$ mátrix oszloprangja, ezért csak azt az $r$ vektort választjuk ki, akik bázist alkotnak):

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r$$

Tehát ha $\mathbf{x}$-et úgy választjuk, hogy $i$. sorba írunk $\lambda_i$-t, ha az $A$ mátrixban az $i$. oszlopban van bázist alkotó vektor, többi helyre 0-át, akkor $\mathbf{x}$ kielégíti a kérdéses mátrixegyenletet.




□

# 1.6. Lineáris leképezések

**Definíció 1.20** $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ **lineáris leképezés**, ha:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1$-re: $\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v})$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in V_1$-re: $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{u})$

## 1.6.1. Példák

(1) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$. Legyen $\mathcal{A}$, olyan, hogy az adott vektort az $x$ tengelyre vetítjük, tehát $\mathcal{A}((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\mathbf{x}, 0)$. Lineáris leképezés-e?

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}((\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{u},\mathbf{v})) = \mathcal{A}((\mathbf{x}+\mathbf{u}, \mathbf{y}+\mathbf{v})) = (\mathbf{x}+\mathbf{u}, 0) \\ \mathcal{A}((\mathbf{x},\mathbf{y})) + \mathcal{A}((\mathbf{u},\mathbf{v})) = (\mathbf{x}, 0) + (\mathbf{u}, 0) = (\mathbf{x}+\mathbf{u}, 0) \end{aligned}\right\} \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \mathcal{A}((\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y})) = (\lambda\mathbf{x}, 0) \\ \lambda\mathcal{A}((\mathbf{x},\mathbf{y})) = \lambda(\mathbf{x}, 0) = (\lambda\mathbf{x}, 0) \end{aligned}\right\} \checkmark$$

(2) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$. Az adott vektornak a képe legyen az $\mathbf{y}$ tengelyre vett tükörképe, tehát $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (-\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Lineáris leképezés-e?

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}((\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{u},\mathbf{v})) = \mathcal{A}((\mathbf{x}+\mathbf{u}, \mathbf{y}+\mathbf{v})) = (-(\mathbf{x}+\mathbf{u}), \mathbf{y}+\mathbf{v}) \\ \mathcal{A}((\mathbf{x},\mathbf{y})) + \mathcal{A}((\mathbf{u},\mathbf{v})) = (-\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (-\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-(\mathbf{x}+\mathbf{u}), \mathbf{y}+\mathbf{v}) \end{aligned}\right\} \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \mathcal{A}((\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y})) = (-\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) \\ \lambda\mathcal{A}((\mathbf{x},\mathbf{y})) = \lambda(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) \end{aligned}\right\} \checkmark$$

### 1.6.2. Tulajdonságok

1.

$$\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{A}(\underbrace{\mathbf{0}+\mathbf{0}}_{\mathbf{0}}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) + \mathcal{A}(\mathbf{0}) \qquad / - \mathcal{A}(\mathbf{0})$$

$$0 = \mathcal{A}(\mathbf{0}) \quad \checkmark$$

2.

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k) = \mathcal{A}(\mathbf{u}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{u}_2) + \ldots + \mathcal{A}(\mathbf{u}_k)$$

Először $\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k)$-ra alkalmazzuk a definíciót, majd $\mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_3 + \ldots + \mathbf{u}_k)$-ra és így tovább.

3.

$$\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{u}_k) = \lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{u}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{u}_2) + \ldots + \lambda_k\mathcal{A}(\mathbf{u}_k)$$

Először alkalmazzuk a fenti tulajdonságot, majd a definíciót.

Vegyük a következőt: $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{x}$. Erről könnyen beláthatjuk, hogy nem lineáris leképezés, hiszen nem telejesül a fenti (1)-es tulajdonság, miszerint: $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, hiszen mi esetünkben ez $\mathbf{0} + \mathbf{x}$.

Felhasználva a lineáris leképezés definícióját, ha egy $V_1$ vektortér vektorait szeretnénk $V_2$-be transzformálni $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ segítségével, akkor elég, ha tudjuk, hogy a $V_1$ egy bázisának vektoraival mi történik. Hiszen:

$$\underbrace{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n}_{\text{bázis } V_1\text{-ben}} \in V_1 \quad : \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad : \quad \underbrace{\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n}_{\text{egyértelmű felírás}}$$

És tudjuk, hogy:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) + \ldots + \lambda_n\mathcal{A}(\mathbf{b}_n)$$

**Definíció 1.21** $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis $V_1$-ben, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k\}$ bázis $V_2$-ben.

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [[\mathcal{A}(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}}[\mathcal{A}(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \ldots [\mathcal{A}(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}}]$$

Tehát veszünk 1-1 bázist a két vektortérben, ekkor az $\mathcal{A}$ *leképzés mátrixa* a fenti mátrix: vesszük a kiinduló vektortér egy bázisát ($\mathcal{B}$), a vektoroknak ($\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$) vesszük a képét, majd ezeknek a koordináta-vektorát a $\mathcal{C}$ bázisban. Ezek a koordináta-vektorok alkotják az $\mathcal{A}$ leképzés mátrixának oszlopait.

Nézzünk erre egy példát: $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A leképezés legyen olyan, hogy a síkbeli vektorokat az $x$ tengely egyenesére vetítjük. Mivel ugyanabba a vektortérbe (síkvektorok) képezünk le, ezért közös bázist vegyünk fel: $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$.

$$\mathcal{A} \text{ mátrixa a standard bázison} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hiszen $(1,0)$-nak a képe $(1,0)$, ennek önmagában vett koordináta-vektora $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $(0,1)$-nek $(0,0)$, ennek pedig $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ a koordináta-vektora.
Szeretnénk ezt a „leképezés mátrixot” másra is használni, például egy vektornak a képének a meghatározásához:

**Tétel 1.18** $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$

$$[\mathcal{A}(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \qquad \mathcal{B}, \mathbf{v} \in V_1, \mathcal{C} \in V_2$$

**Bizonyítás 1.18** $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \left( \boxed{[\mathcal{A}(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}}} \boxed{[\mathcal{A}(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}}} \dots \boxed{[\mathcal{A}(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}}} \right) \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \dots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot [\mathcal{A}(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{C}} \right)$$

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot [\mathcal{A}(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{C}} \right) = \left( \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i \mathcal{A}(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{C}} \right) = \left( \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{A}(\lambda_i \cdot \mathbf{b}_i)]_{\mathcal{C}} \right) = \left[ \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(\lambda_i \cdot \mathbf{b}_i) \right]_{\mathcal{C}} =$$
$$= \left[ \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathbf{b}_i \right) \right]_{\mathcal{C}} = [\mathcal{A}(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$$

□

### 1.6.3. Lineáris leképezések szorzata

$\mathcal{A} : V_1 \to V_2, \mathcal{B} : V_2 \to V_3$. Ha $\mathbf{v} \in V_1$, akkor $\mathcal{A}(\mathbf{v}) \in V_2$, illetve $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{v})) \in V_3$.

**Definíció 1.22** Lineáris leképezések szorzata: $(\mathcal{B}\mathcal{A}) : V_1 \to V_3$.

$$(\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathbf{v}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{v}))$$

**Tétel 1.19** Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ lineráris leképezés. Ekkor $(\mathcal{B}\mathcal{A})$ is lineáris leképezés.

**Bizonyítás 1.19** Ellenőrizzük, hogy lineráis leképezés:

① $(\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{u})) + \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{v})) = (\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathbf{u}) + (\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathbf{v})$ ✓

② $(\mathcal{B}\mathcal{A})(\lambda\mathbf{u}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\lambda\mathbf{u})) = \mathcal{B}(\lambda\mathcal{A}(\mathbf{u})) = \lambda \cdot \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{u})) = \lambda \cdot (\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathbf{u})$ ✓ □

**Tétel 1.20** $\mathcal{A} : V_1 \to V_2, \mathcal{B} : V_2 \to V_3$. $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ legyen $V_1$-ben, $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_k\}$ legyen $V_2$-ben és $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_l\}$ legyen $V_3$-ban bázis.

$$[\mathcal{B}\mathcal{A}]_{\mathcal{C},\mathcal{E}} = [\mathcal{B}]_{\mathcal{D},\mathcal{E}} \cdot [\mathcal{A}]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$$

**Bizonyítás 1.20**
$[\mathcal{B}]_{\mathcal{D},\mathcal{E}}$ egy $l \times k$-as mátrix hiszen $l$ sora van, mivel $\mathcal{E}$ dimenziója $l$, és $k$ oszlopa, hiszen $\mathcal{D}$ dimenziója $k$. $[\mathcal{A}]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ egy $k \times n$-as mátrix hiszen $k$ sora van, mivel $\mathcal{D}$ dimenziója $k$, és $n$ oszlopa, hiszen $\mathcal{C}$ dimenziója $n$. Hasonlóan kapjuk, hogy $[\mathcal{BA}]_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ egy $l \times n$-es mátrix, és $[\mathcal{B}]_{\mathcal{D},\mathcal{E}} \cdot [\mathcal{A}]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ szorzat létezik és $l \times n$-es mátrix, tehát az egyenlet két oldala két azonos méretű mátrix. Kérdés, hogy az elemek egyeznek-e?

Tehát a szorzat: $[\mathcal{B}]_{\mathcal{D},\mathcal{E}} \cdot [\mathcal{A}]_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = [\mathcal{B}]_{\mathcal{D},\mathcal{E}} \cdot \Big[[\mathcal{A}(\mathbf{c}_1)]_{\mathcal{D}}[\mathcal{A}(\mathbf{c}_2)]_{\mathcal{D}} \dots [\mathcal{A}(\mathbf{c}_n)]_{\mathcal{D}}\Big]$

Vizsgáljuk meg a szorzat első oszlopát: $[\mathcal{B}]_{\mathcal{D},\mathcal{E}} \cdot [\mathcal{A}(\mathbf{c}_1)]_{\mathcal{D}}$. Ha jól megnézzük, akkor a már tanultak alapján ez az $\mathcal{A}(\mathbf{c}_1)$ vektor transzformálása $\mathcal{B}$-vel a $\mathcal{D}$ bázisból az $\mathcal{E}$ bázisba. Tehát:

$$[\mathcal{B}]_{\mathcal{D},\mathcal{E}} \cdot [\mathcal{A}(\mathbf{c}_1)]_{\mathcal{D}} = [\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{c}_1))]_{\mathcal{E}} = [\mathcal{BA}(\mathbf{c}_1))]_{\mathcal{E}}$$

Ami viszont megegyezik $[\mathcal{BA}]_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ első oszlopával, hiszen annak első oszlopba a $\mathbf{c}_1$ vektor $\mathcal{BA}$-val transzformált vektor $\mathcal{E}$-beli koordináta-vektora.

Tehát az egyenlet jobb oldalán lévő mátrix első oszlopba megegyezik az egyenlet bal oldalán álló mátrix első oszlopával, ugyanígy az összes többi $n-1$ oszlopot is megvizsgálhatjuk. □

Nézzünk meg egy példát: $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Bázisnak mindig a $\mathcal{C}$ standard bázist válasszuk. $\mathcal{A}$ leképezés az $x$, $\mathcal{B}$ leképezés pedig az $y$ tengelyre való tükrözés legyen.

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{B}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fenti tétel alapján:

$$[\mathcal{BA}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = [\mathcal{B}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \cdot [\mathcal{A}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

És valóban ezt várnánk, hiszen két derészkögű tengelyre való tükrözés egy centrális tükrözés. Tehát $(\mathcal{BA})(x, y) = (-x, -y)$.

### 1.6.4. Képtér és magtér

Legyen $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés.

**Definíció 1.23** **$\mathcal{A}$ képtere**

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V_1\} \subseteq V_2$$

**Definíció 1.24** **$\mathcal{A}$ magtere**

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{v} \in V_1 \mid \mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subseteq V_1$$

**Tétel 1.21** $\boxed{\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \text{ altér } V_2\text{-ben}}$

**Bizonyítás 1.21** Ahhoz, hogy használhassuk az 1.1 tételt (altér-e?) két dologról fontos megemlékezni: $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \subseteq V_2$ és, hogy $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \neq \emptyset$ (hiszen nullvektor képe nullvektor). Tehát csak azt kell belátnunk, hogy zárt az összeadásra és szorzásra:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \text{ kéne, hogy } \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \text{ és } \lambda\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$$

$$x, y \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \in V_1 : \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{x} \text{ és } \exists \mathbf{v} \in V_1 : \mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathcal{A}(\mathbf{u})+\mathcal{A}(\mathbf{v})=\mathcal{A}(\underbrace{\mathbf{u}+\mathbf{v}}_{\in V_1})\in \operatorname{Im}\mathcal{A} \quad \checkmark$$

$$\lambda\mathbf{x}=\lambda\mathcal{A}(\mathbf{u})=\mathcal{A}(\underbrace{\lambda\mathbf{u}}_{\in V_1})\in \operatorname{Im}\mathcal{A} \quad \checkmark$$

□

**Tétel 1.22** $\boxed{\text{Ker}\,\mathcal{A} \text{ altér } V_1\text{-ben}}$

**Bizonyítás 1.22** Hasonlóan az előzőhöz, ahhoz, hogy használhassuk az 1.1 tételt (altér-e?) két dologról fontos megemlékezni: $\operatorname{Ker}\mathcal{A}\subseteq V_1$ és, hogy $\operatorname{Ker}\mathcal{A}\neq\emptyset$ (hiszen nullvektor tuti benne van). Tehát csak azt kell belátnunk, hogy zárt az összeadásra és szorzásra:

$$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\operatorname{Ker}\mathcal{A} \text{ kéne, hogy } \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\operatorname{Ker}\mathcal{A} \text{ és } \lambda\mathbf{u}\in\operatorname{Ker}\mathcal{A}$$

$$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\operatorname{Ker}\mathcal{A} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}(\mathbf{u})=\mathbf{0} \text{ és } \mathcal{A}(\mathbf{v})=\mathbf{0}$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathcal{A}(\mathbf{u})+\mathcal{A}(\mathbf{v})=\mathbf{0} \quad \checkmark$$

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{u})=\lambda\mathcal{A}(\mathbf{u})=\mathbf{0} \quad \checkmark$$

□

**Tétel 1.23** $\boxed{\text{Dimenzió-tétel}}$ $\quad \mathcal{A}: V_1\to V_2$

$$\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A})+\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A})=\dim V_1$$

**Bizonyítás 1.23** Legyen $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_k$ bázis $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$-ban, egészítsük ki úgy, hogy a vektorok bázist alkossanak $V_1$-ben (Legyen $\dim V_1=n$):

$$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_k,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots,\mathbf{c}_{n-k}$$

Igaz az állítás, ha sikerül belátnunk, hogy $\mathcal{A}(\mathbf{c}_1),\mathcal{A}(\mathbf{c}_2),\ldots,\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})$ bázist alkotnak $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban:

Először belátjuk, hogy $\mathcal{A}(\mathbf{c}_1),\mathcal{A}(\mathbf{c}_2),\ldots,\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})$ generálják $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-t. $\mathbf{x}\in\operatorname{Im}\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \exists\mathbf{v}: \mathcal{A}(\mathbf{v})=\mathbf{x}$.

$$\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{b}_1+\lambda_2\mathbf{b}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{b}_k+\mu_1\mathbf{c}_1+\mu_2\mathbf{c}_2+\ldots+\mu_{n-k}\mathbf{c}_{n-k}$$

$$\mathbf{x}=\mathcal{A}(\mathbf{v})=\underbrace{\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{b}_1)+\mathcal{A}(\lambda_2\mathbf{b}_2)+\ldots+\mathcal{A}(\lambda_k\mathbf{b}_k)}_{=\mathbf{0}}+\mathcal{A}(\mu_1\mathbf{c}_1)+\ldots+\mathcal{A}(\mu_{n-k}\mathbf{c}_{n-k})$$

$$\mathbf{x}=\mu_1\mathcal{A}(\mathbf{c}_1)+\mu_2\mathcal{A}(\mathbf{c}_2)+\mu_{n-k}\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})$$

Felírtunk egy tetszőleges $\mathbf{x}\in\operatorname{Im}\mathcal{A}$-t $\mathcal{A}(\mathbf{c}_1),\mathcal{A}(\mathbf{c}_2),\ldots,\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})$ lineáris kombinációjaként, tehát:

$$\langle\mathcal{A}(\mathbf{c}_1),\mathcal{A}(\mathbf{c}_2),\ldots,\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})\rangle=\operatorname{Im}\mathcal{A} \quad \checkmark$$

Már csak az a kérdés, hogy $\mathcal{A}(\mathbf{c}_1),\mathcal{A}(\mathbf{c}_2),\ldots,\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})$ lineárisan függetlenek-e? Ezt indirekt bizonyítjuk, tfh:

$$\lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{c}_1)+\lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{c}_2)+\ldots+\lambda_{n-k}\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})=\mathbf{0} \qquad \text{úgy, hogy nem } \forall\lambda_i=0$$

$$\mathcal{A}(\underbrace{\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2+\ldots+\lambda_{n-k}\mathbf{c}_{n-k}}_{\in\operatorname{Ker}\mathcal{A}})=\mathbf{0}$$

Tehát felírható $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_k$ bázisban. Tehát:

$$\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2+\ldots+\lambda_{n-k}\mathbf{c}_{n-k}=\mu_1\mathbf{b}_1+\mu_2\mathbf{b}_2+\ldots+\mu_k\mathbf{b}_k$$

$$\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2+\ldots+\lambda_{n-k}\mathbf{c}_{n-k}-\mu_1\mathbf{b}_1-\mu_2\mathbf{b}_2-\ldots-\mu_k\mathbf{b}_k=\mathbf{0}$$

A feltétel alapján $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_k,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots,\mathbf{c}_{n-k}$ bázis, tehát a fenti a bázis elemeiből egy nem triviális lineáris kombináció, amire $\mathbf{0}$-át kapunk $\Rightarrow$ bázis elemei nem függetlenek $\rightarrow$ ellentmondás, tehát $\mathcal{A}(\mathbf{c}_1),\mathcal{A}(\mathbf{c}_2),\ldots,\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})$ lineárisan függetlenek. Ezzel beláttuk az eredeti állítást is, hiszen $\mathcal{A}(\mathbf{c}_1),\mathcal{A}(\mathbf{c}_2),\ldots,\mathcal{A}(\mathbf{c}_{n-k})$ bázist alkotnak $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban. □

### 1.6.5. Sajátvektor, sajátérték

Legyen $\mathcal{A} : V \to V$, $\mathbf{v} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Definíció 1.25** **v sajátvektor**, ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $\exists \lambda$, hogy $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$

**Definíció 1.26** $\lambda$ **sajátérték**, ha $\exists \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, hogy $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$.

*Megjegyzés*: Nem csak leképezéseknek, hanem *négyzetes mátrixoknak is van sajátvektora, sajátértéke*: Ha $A$ egy $n \times n$-es mátrix, akkor annak $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sajátvektora ($n$ sorból álló oszlopvektor), $\lambda$ sajátértékkel, ha $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. A további tételek ugyanúgy igazak mindkettőre, ezért az egyszerűség kedvéért, csak a leképezések mátrixával foglalkozunk.

**Tétel 1.24** Az azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok és a **0** alteret alkotnak (ezt **sajátaltér**nek hívjuk)

**Bizonyítás 1.24** Nem üres ✓. Zárt-e az összeadásra, szorzásra?

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ sajátvektor } \lambda \text{ sajátértékre } \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}, \mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad \checkmark$$

$$\mathcal{A}(\mu \mathbf{u}) = \mu \lambda \mathbf{u} = \lambda(\mu \mathbf{u}) \quad \checkmark$$

□

Hogy találjuk meg $\mathcal{A} : V \to V$ sajátértékeit? Legyen $\mathcal{B}$ bázis $V$-ben. $\mathbf{v} \in V$. Tudjuk, hogy, ha $A = [\mathcal{A}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, akkor:

$$[\mathcal{A}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = A \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

Szeretnénk, ha **v** sajátvektor lenne, tehát:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

Vegyük mindkét vektornak $\mathcal{B}$-beli koordináta-vektorát:

$$[\mathcal{A}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [\lambda \mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

De tudjuk, hogy $[\mathcal{A}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = A \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, tehát:

$$A \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot I \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\lambda I) \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

$$(A - \lambda I) \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$$

Szeretnénk, ha lenne olyan **v**, hogy $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ nem csupa nulla (hiszen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), tehát a fenti egyenletnek legyen több megoldása, azaz $\det(A - \lambda I) = 0$. Tehát:

**Tétel 1.25**

$$\boxed{\lambda \text{ sajátérték} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0}$$

*Megjegyzés*: A fenti egyenlet egy $n$-edfokú polinomhoz vezet ($\lambda$ a változó), amit **karakterisztikus polinomnak** nevezünk. Ha meghatározunk egy sajátértéket, akkor a sajátvektorok meghatározásához a $A - \lambda I \,|\, 0$ egyenletrendszert (itt $\lambda$ már egy konkrét szám) kell megoldani.

Például: az $x$ tengelyre való vetítésnél $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-\lambda) = 0$$

Ennek a polinomnak a gyökeit kell meghatározni: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Sajátvektorok meghatározása:

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = (0, y)$$

$$\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = (x, 0)$$

## 1.7. Komplex számok

A valós számokat számegyenesen, a komplex számokat síkon tudjuk ábrázolni.

$$\boxed{a + b \cdot i \in \mathbb{C}} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$a$-t **valós rész**nek, a $b$-t **képzetes rész**nek hívjuk. Definíció alapján $\boxed{i^2 = -1}$.
A fenti alakot **algebrai alak**nak, vagy **kanonikus alak**nak nevezzük.

### 1.7.1. Műveletek

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bd \cdot i^2 + (bc + ad)i = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

### 1.7.2. Konjugált

**Definíció 1.27** Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$, akkor $\overline{z} = a - bi$. $\overline{z}$ a $z$ komplex szám **konjugált**ja.

Jó tudni a következő azonosságokat:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

### 1.7.3. Trigonometrikus alak

$z = a + bi$. Ekkor $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$ (a vektor hossza - minden komplex számot a síkon egy helyvektorral jellemezhetünk). Illetve:

$$a = \cos\alpha \cdot r$$

$$b = \sin\alpha \cdot r$$

A fentiek felhasználásával felírhatjuk a **trigonometrikus alak**ot:

$$\boxed{z = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)}$$

### 1.7.4. Szorzás, hatványozás, gyökvonás trigonometrikus alakban

Nagy előnye a trigonometrikus alakban, hogy könnyű kiszámolni két komplex szám szorzatát, illetve valós kitevőjű hatványát és gyökét. Ha $z = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i \cdot \sin\beta)$:

$$z \cdot w = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \cdot s(\cos\beta + i \cdot \sin\beta) =$$

$$= rs\Big[\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + \underbrace{(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)} \cdot i\Big] =$$

$$= \boxed{rs(\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta))}$$

Hatványozás a szorzás alapján:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos(n \cdot \alpha) + i \cdot \sin(n \cdot \alpha))}$$

Gyökvonás, már kicsit bonyolultabb: $\sqrt[n]{z} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = z$

$$x = t(\cos\gamma + i \cdot \sin\gamma)$$

$$x^n = t^n(\cos(n \cdot \gamma) + i \cdot \sin(n \cdot \gamma)) = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$$

Tehát:

$$t^n = r \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[n]{r}$$

$$\alpha - n \cdot \gamma = 2\pi \cdot k' \quad k' \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma = \frac{\alpha + 2\pi \cdot k}{n} \quad \Rightarrow \quad n \text{ darab gyök!}$$

Vagyis:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}\right)\right]} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

**Egységgyökök**

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

# 2. fejezet

# Kombinatorika - elemi leszámlálások

## 2.1. Ismétlés nélküli

### 2.1.1. Permutáció

$n$ darab vizsgát pontosan egyszer szeretnénk letenni. Hány féle sorrendben tehetjük meg?

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$

### 2.1.2. Variáció

$n$ darab vizsgából $k \leqslant n$ darabot teszünk le. Hány féle sorrendben tehetjük meg?

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1)}_{k \text{ darab}} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

### 2.1.3. Kombináció

$n$ darab vizsgából $k \leqslant n$ darabot teszünk le, de a sorrend nem számít. Hány féle képpen választhatunk ki $k$ vizsgát?

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \boxed{\binom{n}{k}}$$

*Megjegyzés*: a $k!$ azért kerül be, mert először megszámoljuk úgy, hogy a sorrend számít, de mindenféle kiválasztás $k!$-sor szerepel, csak mindig más sorrendben (lásd permutáció).

## 2.2. Ismétléses

Maradva a vizsgás analógiánál: Tegyük fel, hogy $n$ vizsgánk van, de ezek közül $n_1, n_2, \ldots n_k$ egyforma, ezeket nem különböztetjük meg, tehát mondjuk 3 db BSz, 1 db Mikmak, 2 db Anal és 1 db Prog (Tehát $n = 7, n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 2$ és $n_4 = 1$).

### 2.2.1. Permutáció

Hány féle képpen tehetjük sorba az $n$ vizsgát, amiből $n_1, n_2, \ldots n_k$ egyforma – tehát nem különböztetjük meg:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}}$$

*Megjegyzés*: Először sorbarakjuk, mintha mindegyik különböző lenne (lásd permutáció), majd megszámoljuk, hogy mit hányszor számoltunk (leosztunk az azonos típusú elemek permutációjával)

A fenti példát kiszámolva: $\frac{7!}{3! \cdot 2!}$

### 2.2.2. Variáció

$n$ viszga $k \leqslant n$ darab vizsgát teszünk le, de egy vizsgát többször is lehetetünk:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ darab vizsga}} = n^k$$

### 2.2.3. Kombináció

$n$ vizsgából $k$-t válaszunk ki, úgy, hogy a sorrend nem számít de akárhányszor bármelyiket kiválaszthatjuk:

$$\boxed{\frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}}$$

*Megjegyzés*: A logika a következő: Vegyünk fel $k$ darab bogyót és $n-1$ elválasztót. Minden egyes esetet megtudunk feleltetni az előző elemek egy-egy permutációjával, hiszen az első vizsgából annyit választunk, amennyi bogyó van az első elválasztó előtt, …, az utolsó vizsgából annyit választunk, amennyi az utolsó elválasztó után van. Ezek permutációja: $(n-1+k)!$ viszont a bogyók és az elválasztók nem számítanak különbözőnek, hiszen a sorrend nem számít (márpedig a permutáció miatt így vettük) ezért leosztunk $(n-1)!$-al és $k!$-al.

## 2.3. Binomiális együtthatók

Hasznos azonosságok, melyeket akár a képletből, akár a Pascal-háromszög alapján bebizonyíthatunk:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$$

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\ldots & & & & & & & & &
\end{array}$$

Pascal-háromszög

**Tétel 2.1** Binomiális-tétel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Ha $a = b = 1$, akkor:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Illetve, ha $a = 1, b = -1$, akkor:

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i$$

# 3. fejezet

# Halmazok

*Megjegyzés*: Sokat merítettem a `http://cs.bme.hu/~sali/halmaz.pdf` jegyzetből.

## 3.1. Halmazok számossága

**Definíció 3.1** $f$ **bijekció** (kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés), ha $a \in A \neq b \in B$, akkor $f(a) \neq f(b)$ és $c \in B : \exists a \in A$, hogy $f(a) = c$

**Definíció 3.2** $A$ és $B$ azonos számosságú ($|A| = |B|$) , ha $\exists$ bijekció a két halmaz között.

**Definíció 3.3** $|A| \leqslant |B|$, ha $\exists f : A \to B$, ami injektív, tehát $\forall a, b \in A$-ra, ha $a \neq b$, akkor $f(a) \neq f(b)$.
*Megjegyzés*: Úgy is meglehet a fentit fogalmazni, hogy $|A| \leqslant |B|$, ha $\exists B_1 \subseteq B$, amire $|A| = |B_1|$.

**Definíció 3.4** Egy halmaz *véges* számosságú, ha $\exists k$ véges szám, hogy $A$ és $\{1, 2, \ldots, k\}$ azonos számosságúak, ilyenkor: $|A| = k$.

**Tétel 3.1**

$$|A| = |B| \quad \Leftrightarrow \quad |A| \leqslant |B| \text{ és } |B| \leqslant |A|$$

**Bizonyítás 3.1**
$\Rightarrow$ ✓
$\Leftarrow$ Cantor-Bernstein tétel. ✓ □

**Definíció 3.5** $|A| < |B|$ ha $|A| \leqslant |B|$ és $|A| \neq |B|$.

### 3.1.1. Kis kitérő

#### 1 emeletes mókás szálloda

Amennyiben 1 szintű a szállodánk és véges sok ($k \in \mathbb{N}$) szoba van, akkor ha megtelik, akkor nem tudunk több szobát kiadni. De ha végtelen sok szobánk van, akkor vajon be tudunk-e költöztetni egy újabb embert, ha már végtelen sok szobában vannak? Ha minden ember egy szobával arréb költözik, akkor az első szobába be tudjuk költöztetni az új embert. Ha egyszerre $k \in \mathbb{N}$ ember jön, akkor hasonló logikával, mindenkit megkérünk, hogy $k$ szobával költözzön arrébb, így a felszabaduló $k$ szobába be tudjuk költöztetni őket.

Ha végtelen sok ember jön, akkor mi a helyzet? Nagyon egyszerű: megkérünk mindenkit, hogy a $2k$. szobába költözzön át (ahol $k$ annak a szobának a sorszáma, ahol éppen lakik), így végtelen sok hely felszabadul, viszont a bentlakóknak továbbra is marad szobájuk.

**Több emeletes szálloda**

Itt sincs különösebb nehézség, pusztán egy adott szisztéma alapján meg kell számoznunk a bentlakókat, és ezután őket egy megadott szabály szerint át lehet költöztetni, hogy új lakókat tudjunk elszállásolni.

Tehát láthatjuk, hogy $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ és $\{2, 3, 4, \ldots\}$ azonos számosságú, hiszen annyi történt, hogy mindegyik elemhez 1-et hozzáadtunk. Hasonlóan $\mathbb{N}$ és $\{2, 4, 6, \ldots\}$ is az, hiszen mindegyik elemet megszoroztuk 2-vel.

### 3.1.2. Megszámlálhatóan végtelen halmazok

**Definíció 3.6** Egy halmaz *megszámlálhatóan végtelen* (röviden: megszámlálható), ha a természetes számok $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ halmazával egyenlő számosságú. Tehát elemei sorbarendezetőek, hiszen ez éppen egy kölcsönös megfeleletetés a halmaz és $\mathbb{N}$ elemei között.
*Megjegyzés*: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (alef-null)

**Tétel 3.2** Egy $A$ megszámlálható és tőle diszjunkt $B$ véges halmaz uniója is megszámlálható.

**Bizonyítás 3.2** Mivel $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ sorbarendezhető, ezért $A \cup B$ a következőképp rendezhető sorba:

$$A \cup B = \{b_1, \ldots, b_k, a_1, a_2, \ldots\}$$

Tehát $A \cup B$ $i$. eleme $b_i$, ha $i \leqslant k$, illetve $a_{i-k}$, ha $i > k$. □

**Tétel 3.3** Véges sok ($k$) $A_i$ diszjunkt megszámlálható halmazok uniója is megszámlálható.

**Bizonyítás 3.3**

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$$

$$\vdots$$

$$A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots\}$$

Ekkor sorbarendezhetjük ezen elemeket például így:

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \{a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k1}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{k2}, \ldots\}$$

□

Vagyis először vesszük a halmazok első elemeit sorrendben, utána a második elemeit és így tovább...

**Tétel 3.4** Megszámlálhatóan sok $A_i$ diszjunkt megszámlálható halmazok uniója is megszámlálható.

**Bizonyítás 3.4**

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$$

$$\vdots$$

Ekkor ha ezeket felrajzoljuk, akkor egy képzeletbeli kígyóvonal mentén, sorrendbe rendezhetjük az elemeket:

$$\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[r] & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \arrow[r] & a_{14} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{21} \arrow[d] & a_{22} \arrow[ur] & a_{23} \arrow[dl] & \cdots & \\
a_{31} \arrow[ur] & a_{32} \arrow[dl] & \cdots \arrow[ur, dotted] & & \\
a_{41} \arrow[d] & \cdots \arrow[ur, dotted] & & & \\
a_{51} \arrow[ur] & \cdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Tehát:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23} \ldots\}$$

□

**Tétel 3.5** A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható.

**Bizonyítás 3.5** Bontsuk fel a $\mathbb{Q}$ halmazt megszámlálhatóan sok megszámlálható, diszjunkt halmazra. Ha ez sikerült, akkor a fenti tétel alapján ezek uniója is megszámlálható, tehát kész vagyunk.

$$A_1 = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

$$A_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots\right\}$$

$$A_3 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots\right\}$$

$$\vdots$$

Tehát $A_1$ tartalmazza az összes egész számot, $A_2$ az összes tovább nem egyszerűsíthető 2 nevezőjű racionális számot és így tovább… Ezek mindegyike megszámlálható (fel tudjuk sorolni az elemeket), tehát uniójuk is megszámlálható. □

### 3.1.3. Kontínuum számosságú halmazok

Felmerülhet, hogy vajon $|\mathbb{N}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{R}|$? Ez nem igaz:

**Tétel 3.6** A $(0, 1)$ intervallumba tartozó valós számok halmaza megszámlálhatónál nagyobb számosságú.

**Bizonyítás 3.6** Indirekt bizonyítjuk; tfh: $|\mathbb{N}| = |(0,1)|$. Írjuk fel az összes $(0,1)$ intervallumba eső valós számokat végtelen tizedestört alakban (ez így önmagában nem lenne egyértelmű, hiszen $0,001000\ldots = 0,000999\ldots$, ezért az utóbbi felírást zárjuk ki), majd rendezzük sorba (indirekt feltételünk alapján ezt megtehetjük):

$$1.\ 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$
$$2.\ 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$
$$3.\ 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$
$$\vdots$$
$$i.\ 0,a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots$$
$$\vdots$$

Vegyük a következő $w = 0,w_1w_2w_3\ldots$ számot, melynek jegyeit a következőképp kapjuk: $w_i := 2$, ha $a_{ii} \neq 2$ és $w_i := 1$, ha $a_{ii} = 2$. Ez a szám biztosan mindegyik fentebb felsorolt számtól legalább a tizedesvesszőtől mért $i$. jegyben különbözik. Tehát őt biztosan nem soroltuk fel, viszont kétségkívül $w \in (0,1)$, tehát ellentmondásra jutottunk. □

Fenti tételből következik, hogy $\mathbb{R}$ szintén nem megszámlálható, hiszen $(0,1)$ ennek egy részhalmaza. Ezt a számosságot **kontínuum** számosságnak nevezzük.

**Tétel 3.7** Egy $A$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz és egy tőle diszjunkt, kontínuum számosságú $B$ halmaz uniója is kontínuum számosságú, vagyis $|A \cup B| = |B|$

**Bizonyítás 3.7** Legyen $B_1$ a $B$-nek egy megszámlálhatóan végtelen részhalmaza, $B_2 := B \setminus B_1$. Ekkor a 3.3. tétel alapján tudjuk, hogy $|A \cup B_1| = |B_1|$, vagyis létezik $f$ függvény, ami $A \cup B_1$ elemeit kölcsönösen egyértelműen $B_1$-re képezi, ekkor:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ ha } x \in A \cup B_1 \\ x, \text{ ha } x \in B_2 \end{cases}$$

függvény $A \cup B$ elemeit kölcsönösen egyértelműen $B$-re képezi. □

**Tétel 3.8** Egy $(a,b)$ nyílt intervallumba eső valós számok halmaza kontínuum számosságú. $(b > a)$

**Bizonyítás 3.8** Adjunk meg egy kölcsönösen egyértelmű függvényt ami az $(a,b)$-t $\mathbb{R}$-be képezi. Először az $(a,b)$ intervallumot képezzük az $x \mapsto \frac{\pi(x-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2}$ kölcsönösen egyértelmű függvénnyel a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra, majd az $x \mapsto \operatorname{arctg}^{-1} x$ függvénnyel az $\mathbb{R}$-be. □

### 3.1.4. Hatványhalmaz

**Definíció 3.7** Egy $H$ halmaz hatványhalmaza $H$ összes lehetséges részhalmazának halmaza. $|P(H)| = 2^{|H|}$ (hiszen egy elem vagy benne van, vagy nincs egy részhalmazban).
*Példa*: $H = \{1,2,3\}$, $P(H) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

**Tétel 3.9** $\boxed{\text{Cantor-tétel}}$

$$|H| < |P(H)| \quad \forall H\text{-ra}$$

**Bizonyítás 3.9** 2 dolgot kell belátnunk: 1.) $|H| \leqslant |P(H)|$ 2.) $|H| \neq |P(H)|$ . Az első elég egyszerűen belátható, hiszen keresünk egy $f : H \to P(H)$ injektív függvényt: $\underset{x \in H}{f(x)} = \{x\}$.
A másodikat indirekt bizonyítjuk; tfh: $|H| = |P(H)|$, tehát $\exists g : H \to P(H)$ bijektív függvény. $G := \{h \in H \mid h \notin g(h)\}$. Nyílván $G \in P(H)$, illetve mivel $g$ bijektív, ezért $\exists j \in H$, hogy $g(j) = G$. Ekkor viszont $G$ definíciója alapján: $j \in G \Leftrightarrow j \notin g(j) = G$, ami ellentmondás. □

*Megjegyzés*: Fenti tételből az is következik, hogy nincs „legnagyobb" számosság, hiszen bármely számosságú halmaznál a hatványhalmaza nála nagyobb számosságú.

**Tétel 3.10** Megszámlálható halmaz hatványhalmaza kontínuum számosságú.

**Bizonyítás 3.10** Elég belátnunk, hogy $|(0,1)| = |P(\mathbb{N})|$. Írjuk fel a $[0,1)$ számokat végtelen kettedestört alakban (itt nem probléma, hogy $\frac{1}{4} = 0,01000\ldots = 0,011111\ldots$). Tehát minden $[0,1)$ közti számhoz hozzárendeltünk 1 vagy 2 végtelen kettedestört alakot. Mivel $[0,1)$ számossága kontínuum, így ezen sorozatok halmaza is kontínuum számosságú. Gondoljuk meg, hogy ezen sorozatok kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést biztosítanak $P(\mathbb{N})$ elemei között, hiszen egy adott sorozat $(0, a_1 a_2 a_3 \ldots)$ egyértelműen meghatározza $\mathbb{N}$ halmaz egy $X_a$ részhalmazát, hiszen $i \in X_a \Leftrightarrow a_i = 1$, illetve minden részhalmaz előáll ilyen sorozatként. Viszont $|[0,1)| = |(0,1)|$. □

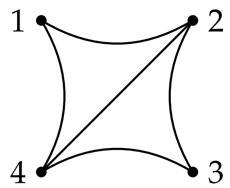
**Kontínuum-hipotézis**: Nincs olyan halmaz, aminek számossága nagyobb, mint $|\mathbb{Z}|$, de kisebb, mint $|\mathbb{R}|$. (Ezt se cáfolni, se bizonyítani nem lehet)

# 4. fejezet

# Gráfok

## 4.1. Gráf-fogalmak, definíciók

**Definíció 4.1** A $G = (V, E)$ pár egyszerű gráf, ha $V \neq \emptyset$, és $E := \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ elemei $V$ bizonyos kételemű részhalmazai. Például, az alábbi gráf:
$G = (V, E); V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$ a következőképpen rajzolható fel diagram segítségével:

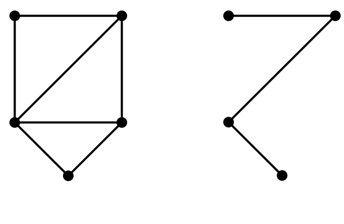



*Megjegyzés*: A gráfban lehetnek hurok (két végpont megegyezik), irányított és párhuzamos (két pont között több él) élek, ezt nem tudjuk a fenti definícióval megadni. Módosítani kéne az $E$ halmazt multihalmazra, illetve megkéne engedni, hogy a két végpont azonos lehessen, továbbá az irányításhoz jelölni kéne, hogy az él melyik csúcsból indul és hova érkezik. Nem törekedünk absztrakt formalizmusra.

**Definíció 4.2** Egy csúcs **foka** a csúcsra állított élek száma (hurok él esetében 2x számoljuk). $v$ csúcs fokszáma. $d(v)$.

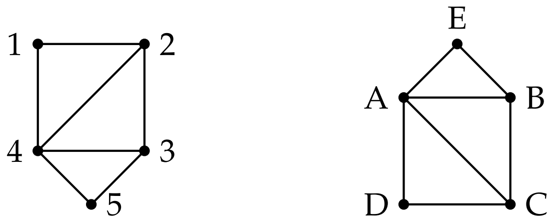
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \qquad \text{hiszen minden élnek 2 végpontja van}$$

**Definíció 4.3** $G = (V, E)$-nek $G' = (V', E')$ **részgráf**ja, ha $V' \subseteq V$, illetve $E' \subseteq E$ és az $E'$ beli élek végpontja benne vannak $V'$-ben. (Ilyet úgy kaphatunk, ha csúcsok törlése mellett éleket is törlünk)



**Definíció 4.4** $G = (V, E)$-nek $G' = (V', E')$ **feszített részgráf**ja, ha $V' \subseteq V$, illetve $E'$-ben az összes olyan $G$ beli él be van húzva, aminek végpontja benne van $V'$-ben. (Ilyet úgy kaphatunk, hogy letörlünk csúcsokat a gráfból)

**Definíció 4.5 Izomorfia**: 2 gráf mikor tekinthető gráfelméleti szempontból ugyanannak?

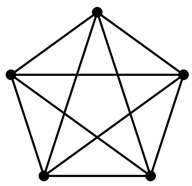



$G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ izomorf, ha $\exists$ köztük izomorfizmus: $f : V \to V'$, azaz:

- $f$ kölcsönösen egyértelműen
- $(x, y) \in E \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E'$
- $(x, y)$ $k$-szoros él $G$-ben $\Leftrightarrow$ $(f(x), f(y))$ $k$-szoros él $G'$-ben

*Megjegyzés*: A nem izomorfiát általában könnyebb ellenőrizni: összevetjük a tulajdonságokat és ha valamelyik nem egyezik, akkor nem izomorf (pl.: csúcsok száma, élek száma, fokszám sorozatok, stb.)

**Definíció 4.6 Teljes gráf**: Az összes lehetséges élt behúzzuk, úgy, hogy még egyszerű maradjon. Jelölése: $K_n$, ahol $n$ a csúcsok száma. Élek száma: $\binom{n}{2}$ (hány féle képpen tudunk 2 csúcsot kiválasztani?) Például a $K_5$ egy diagramja:



**Definíció 4.7 Komplementer gráf**: A $G$ egyszerű gráf komplementere: $\overline{G} := \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$. Tehát a csúcshalmaz azonos, az élhalmaz pedig azon élek a teljesgráf élhalmazából, amik nincsenek $E$-ben.

**Definíció 4.8 Üres gráf**: Csak csúcsokból áll, minden csúcsa izolált (fokszáma 0) pont.

**Definíció 4.9 Élsorozat** (séta): $(v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_n)$ sorozat, amire $e_i \in E$ és $e_i = v_i v_{i+1}$. Speciális élsorozatok:

- *út*: bármely csúcs max. csak egyszer fordul elő
- *zárt*: ha $v_0 \equiv v_n$
- *kör*: olyan zárt élsorozat, ahol $v_0 \equiv v_n$-et leszámítva nincs ismétlődés.

**Definíció 4.10 Összefüggő gráf**: Bármely két csúcsa között létezik élsorozat.

**Definíció 4.11** A gráf **komponensei** tartalmazásra nézve maximális összefüggő feszített részgráfjai. Azok a csúcsok tartoznak egy komponensbe, amik elérhetőek egymásból.

**Tétel 4.1** *$G$ összefüggő gráf, $C$ egy köre, akkor $C$-ből bármely élt elhagyva $G$ összefüggő marad.*

**Bizonyítás 4.1**
- ha az élsorozatot nem használtuk, akkor ✓
- ha használtuk, akkor az őt körré kiegészítő élsorozatot használjuk helyette. □

## 4.2. Fák és alaptulajdonságai

**Definíció 4.12** **Erdő**nek hívjuk a körmentes gráfot, **fá**nak pedig az összefüggő körmentes gráfot. (Tehát az erdő fák uniója)

**Definíció 4.13** $F$ **feszítőfa** olyan fa részgráfja $G$-nek, ami minden $G$-beli csúcsot tartalmaz.

**Tétel 4.2** $\boxed{G\text{-nek létezik feszítőfája} \Leftrightarrow G \text{ összefüggő}}$

**Bizonyítás 4.2**
$\Rightarrow$ Mivel a feszítőfa összefüggő (hiszen fa) ,ezért az eredeti gráf is az. ✓
$\Leftarrow$ ha körmentes, akkor az definíció alapján feszítőfa (összefüggő, körmentes), ha nem, akkor addig hagyunk el a körökből éleket, amíg van kör. □

**Tétel 4.3** Egy $n$ csúcsú körmentes gráf összefüggő $\Leftrightarrow$ ha éleinek száma $n-1$.

**Bizonyítás 4.3**
$\Rightarrow$ Építsük fel a gráfot $n$ pontú üresgráfból. Kezdetben nincsen él, tehát $n$ komponensből áll. Ahhoz, hogy ne legyen kör, egy új él behúzásakor csak két különböző kompnensbeli csúcsot köthetünk össze. Ha behúzunk egy élt, akkor az élek száma 1-el nő, a komponensek száma 1-el csökken, mivel végül a komponensek száma 1-re csökkent (összefüggő a gráfunk), ezért $n-1$ élt húztunk be.
$\Leftarrow$ Ha $n-1$ élt húztunk be, akkor $n-(n-1)=1$ komponensből fog állni a gráfunk, tehát összefüggő. □

**Tétel 4.4** $n$-pontú $(n-1)$-élű, összefüggő gráf $\Rightarrow$ körmentes.

**Bizonyítás 4.4** Hasonlóan az előző bizonyításnál, itt is üresgráfból induljunk ki. Ahhoz, hogy $n-1$ él behúzása után a gráfunk összefüggő marad, szükségszerűen csak két addigi komponens közé húzhattunk be élt, így végig körmentes marad a gráf. □

Az előző két tételből következik, hogy ha az alábbi tulajdonságokból 2-vel bír egy gráf, akkor a harmadikkal is így **fá**ról beszélünk:

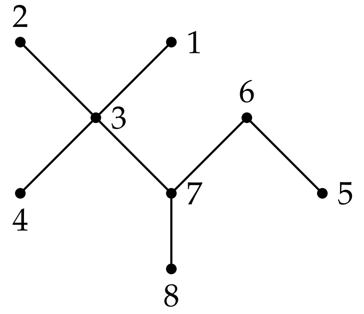
- $n-1$ darab él
- összefüggő
- körmentes

**Tétel 4.5** Minden fának (ami legalább 2 csúcsú) legalább 2 elsőfokú csúcs van (*levél*).

**Bizonyítás 4.5** Vegyük a maximális hosszúságú utat. Ennek 2 végpontja biztosan 1 fokszámú, hiszen ha az egyik nem lenne az, akkor létezne az imént kiválasztott útnál hosszabb út. □

Mielőtt rátérnénk a **Cayley-tétel**re, nézzük meg, hogy mi az a *Prüfer-kód*, szükségünk lesz rá.

**Definíció 4.14 Prüfer-kód**: Vegyük az $n$ csúcsú fagráfunkat. Letöröljük a legkisebb sorszámú levelet, majd felírjuk a szomszédját. Ezt addig folytatjuk, amíg az utolsó előtti csúcsot is letöröltük, ennek is leírtuk a szomszédját: a legnagyobb sorszámú csúcsot. Tehát egy $n$ csúcsú fagráfból kapunk egy $n-1$ hosszú *Prüfer-kód*ot. Mivel az utolsó jegy minden esetben $n$ (legnagyobb sorszám), ezért szokás csak az első $n-2$ számot a Prüfer-kódnak tekinteni, mi is így cselekszünk.



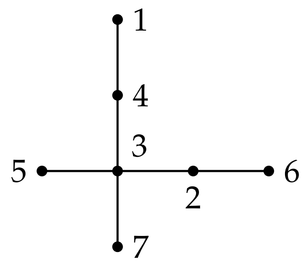

Az ábrán látható fagráf Prüfer-kódja a következő: 333767.
Visszakódolásra is nézzünk egy példát: 43323. Ebből építsük fel a gráfot: Mivel $n-2$ hosszú a kód, ezért tudjuk, hogy 7 csúcsú gráfunk van, írjuk be őket egy táblázatba, de a táblázat végére rakjuk oda a legnagyobb sorszámú csúcsot is:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | **7** |
| | | | | | |

A táblázat alsó sorába írjuk azokat az elemeket, amiket akkor töröltünk le, amikor a felette lévő csúcsot leírtuk. Legyen a felső sor elemei $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, n$, az alsó sor elemei (amiket keresünk): $b_1, b_2, \ldots b_{n-2}, b_{n-1}$. $b_1$-et letöröltük, leírtuk $a_1$-et. Adott $b_i$ csúcs az a csúcs, amit most törlünk le, ő biztosan nem lehet egyenlő a következőkkel: $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$, hiszen őket már letöröltük, illetve $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}, n$-el, hiszen őket még le fogjuk írni, tehát nem töröltük még le. Így a megmaradt számokból keressük a legkisebbet és ez lesz $b_i$. Ez alapján a kitöltés:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | **7** |
| **1** | **4** | **5** | **6** | **2** | **3** |

Vegyük észre, hogy ilyenkor az alsó sor és a felső sor utolsó eleme tartalmazza mind az $n$ csúcsot. Egymás alatt lévő csúcsok között élek mennek, hiszen amikor egy csúcsot törlünk, akkor a szomszédját írjuk le. Tehát az élpárok: $(4,1), (3,4), (3,5), (2,6), (3,2), (7,3)$. Érdemes azt is meggondolni, hogy a Prüfer-kód alapján tudjuk, hogy melyik csúcsnak mennyi a fokszáma, hiszen a leveleket sose írtuk le, a 2 fokszámúakat egyszer, és így tovább. Tehát ha egy szám $d$-szer szerepel, akkor annak fokszáma $d+1$. Praktikus okokból az élpárokon visszafelé haladva építjük fel a gráfot:




**Tétel 4.6** $\boxed{\text{Minden fához kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetünk egy } \textit{Prüfer-kód}\text{ot.}}$

**Bizonyítás 4.6** Tehát azt kell belátni, hogy (1) különböző fákhoz különböző Prüfer-kódok tartoznak, illetve (2) minden Prüfer-kódhoz (tetszőleges $n-2$ hosszúságú $1, 2, \ldots, n$ számokat tartalmazó sorozatohoz) létezik olyan fa, aminek ez a Prüfer-kódja.
*(1)-es bizonyítása*: A fenti példa kifejtése alapján következik, hogy adott Prüfer-kód sorozatot egyértelműen meg tudunk feleltetni egy fagráffal, ezalapján viszont különböző fákhoz, különböző kód tartozik.

*(2)-es bizonyítása*: Használjuk a fent már taglalt jelölésrendszert, tehát a táblázatunk így néz ki:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\dots$ | $a_i$ | $a_{i+1}$ | $\dots$ | $a_{n-2}$ | $n$ |
| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\dots$ | $b_i$ | $b_{i+1}$ | $\dots$ | $b_{n-2}$ | $b_{n-1}$ |

Már említettük, de továbbra is fontos, hogy a $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, n$ szám $n$ darab különböző szám (1-1 csúcs sorszám).

$T_{n-1}$ legyen az $(n, b_{n-1})$ élből és a két csúcsból álló gráf.
$T_{n-2}$ legyen $T_{n-1}$-hez hozzávéve a $b_{n-2}$ csúcsot és a hozzá tartozó élt $(b_{n-2}, a_{n-2})$.

$$\vdots$$

$T_i$ legyen a $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, n$ csúcsokból és a megfelelő élekből álló gráf.

*Állítások*:

a) $\forall i$-re $T_i$ fa $\Rightarrow$ $T_1$ is fa, tehát a Prüfer-kódból visszakódolt gráfunk fa.
b) $\forall i$-re $b_i$ elsőfokú $T_i$-ben.
c) $\forall i$-re $b_i$ a legkisebb indexű levél $T_i$-ben.

Ha a fentieket belátjuk, akkor bizonyítottuk (2)-őt, hiszen ezen állítások együttese biztosítja, hogy a visszakódolt gráfunk fa, aminek a kódja valóban az éppen vizsgált Prüfer-kód.
a)-t és b)-t egyszerre bizonyítjuk, teljes indukcióval:
$T_{n-1}$-re igaz az állítás, hiszen 2 csúcsunk van, köztük egy él; ez fa, és mindkét csúcs elsőfokú. Tegyük fel, hogy $T_{i+1}$-re igaz az állítás, bizonyítsuk be, hogy ekkor $T_i$-re is: Tehát adott egy fa, amihez hozzáveszünk 2 csúcsot és a köztük futó élt. Amit szeretnénk: az egyik csúcs már szerepeljen a gráfban, de a másik ne: ekkor elérjük, hogy összefüggő gráfot kapunk, de körmenteset, vagyis továbbra is fa marad. Ez viszont igaz, hiszen az él, amit hozzáveszünk a gráfhoz: $(a_i, b_i)$. Vizsgáljuk meg a két csúcsot:

- $b_i$ nem egyezik semelyik másik $b_j$-vel, illetve $n$-el, viszont $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}$-vel se, hiszen így választottuk. Ezzel szemben a $T_{i+1}$ gráfban csak $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n-2}$, illetve $b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, b_{n-1}, n$ sorszámú csúcsok szerepelnek, tehát $b_i$ biztosan nem szerepel $T_{i+1}$-ben. (későbbiekben láthatjuk, hogy $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n-2}$ mindegyike megegyezik $b_{i+2}, \dots, b_{n-1}, n$ valamelyikével)
- $a_i$ viszont szerepel $T_{i+1}$-ben, hiszen $a_i$ megegyezik $b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, b_{n-1}, n$ valamelyikével, hiszen a Prüfer-kód generálásakor azért írtuk le $a_i$-t, mert töröltük egy szomszédját, őt magát még nem (vagyis nem szerepelhet $b_1, b_2, \dots, b_i$ között).

A fentiek alapján az is nyilvánvaló, hogy mivel $b_i$ nem szerepelt $T_{i+1}$-ben, ezért $T_i$-ben elsőfokú lesz. Márcsak c)-t kell belátni:
Tegyük fel, hogy létezik $b_i$-nél kisebb indexű elem $T_i$-ben. Nem őt írtuk a Prüfer-kódba $b_i$ helyére, tehát a kérdéses csúcs vagy:

- szerepel $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}$-ben, ez azt jelenti, hogy $T_i$-ben a csúcs foka 0, vagy
- $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}, n$-ben szerepel, ekkor $T_i$-ben legalább másodfokú.

Tehát nem lehet $b_i$-től különböző kisebb indexű csúcs, aminek a elsőfokú. □

**Tétel 4.7** $\boxed{\text{Cayley-tétel}}$
Rögzített $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ csúcshalmazon megadható fák száma: $n^{n-2}$.

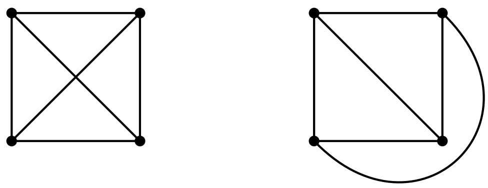
**Bizonyítás 4.7** Az előző tétel alapján, minden fához kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetünk egy *Prüfer-kód*ot. Mivel a Prüfer-kód $n$ csúcsú fagráf esetén $n-2$ jegyből áll és mindegyik $n$ féle szám lehet, ezért összesen $n^{n-2}$ féle *Prüfer-kód* lehetséges (ismétléses variáció). Tehát adott $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ csúcshalmazon $n^{n-2}$ fát adhatunk meg. □

## 4.3. Síkba rajzolható gráfok

**Definíció 4.15** Egy diagram a gráfnak egy **síkbeli lerajzolása**, ha az élek nem keresztezik egymást.

**Definíció 4.16** Egy gráf akkor **síkba rajzolható**, ha létezik *síkbeli lerajzolása*.

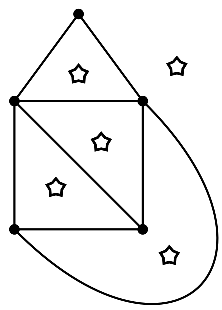
Az első diagram egy *síkba **rajzolható*** gráf, a második ennek egy *síkba **rajzolt*** diagramja:



**Tétel 4.8** $G$ síkba rajzolható $\Leftrightarrow$ $G$ gömbre rajzolható

**Bizonyítás 4.8** *Sztereografikus projekcióval.*
Helyezzük el úgy a gömböt, hogy a sík a déli sarkon érintse. Ekkor az északi sarkból (egyenes) vetítéssel a sík pontjai bijektíven megfelelnek az északisark-mentes gömbfelszín pontjainak. Ez alapján mindkét irány bizonyított, lényeg, hogy úgy válasszuk az északi sarkot (a gömböt úgy gördítsük a síkon kicsit arréb), hogy azon ne legyen gráf-csúcs. Ha a gömbön nem metszették egymást az élek, akkor a síkon se fogják (a bijekció miatt). □

**Definíció 4.17** Egy *síkba **rajzolt** gráf* esetén a sík 2 pontja egy **tartomány**ban van, ha a 2 pont között van olyan törött vonal, ami nem metsz gráfélt. Az ábrán ✩-al jelöltük a tartományokat:



**Tétel 4.9** $\boxed{\text{Euler-tétel}}$
$G$ összefüggő, síkba rajzolt gráf:

$$n + t = e + 2$$

Azaz a csúcsok és a tartományok száma megegyezik az élek száma +2-vel.

**Bizonyítás 4.9**

1. $\nexists$ kör $\Rightarrow$ fa, tehát $e = n - 1, t = 1$:

$$n + 1 = e + 2 \quad \checkmark$$

2. $\exists$ kör: a körökből hagyjunk el 1-1 élet: ekkor a tartományok és élek száma 1-el csökken. A végén fa lesz, ekkor igaz az állítás, de mivel mindkét oldalból egyenlően vettünk el egyesével 1-et, ezért eredetileg is igaz volt.

*Megjegyzés*: Ha $G$ nem feltétlen összefüggő, akkor: $n + t = e + k + 1$, ha $k$-val jelöljük a komponensek számát, hiszen ha összefüggő, akkor rendben van ($k = 1$), ha nem, akkor 2 komponensből 1 él behúzásával tudunk 1 komponenst csinálni, úgy, hogy ne növeljük a tartományok számát, tehát $k$ komponens esetén $k-1$ él behúzásával összefüggő gráfot kapunk, erre igaz, hogy:

$$n+t=e'+2$$

De $e'=e+k-1$, hiszen $k-1$ éllel növeltük az élek számát. □

**Tétel 4.10** Egyszerű, síkba rajzolható legalább 3-csúcsú egyszerű gráf esetén:

$$e \leqslant 3n-6$$

**Bizonyítás 4.10** Az állítást elég összefüggő gráfokra bizonyítani; vegyünk egy egyszerű síkba rajzolt összefüggő gráfot. Mivel a gráf egyszerű, minden tartományát legalább 3 él határolja, ugyanakkor egy él legfeljebb két tartományt határolhat. Összegezzük minden tartományra az őket határoló élek számát. Az előbbiek miatt ez az érték legalább $3t$, legfeljebb $2e$, tehát: $3t \leqslant 2e$. Ebből $t \leqslant \frac{2e}{3}$, felhasználva Euler-tételét (összefüggő, síkba rajzolt gráf):

$$n+t=e+2$$

$$n+\frac{2e}{3} \geqslant e+2 \qquad / \cdot 3$$

$$3n+2e \geqslant 3e+6$$

$$3n-6 \geqslant e$$

*Megjegyzés*: Ha a gráf nem összefüggő, akkor igaz, hogy $n+t=e+k+1$, emiatt az is igaz, hogy $n+t \geqslant e+2$ ($k \geqslant 1$). Ebből kiindulva ugyanúgy a bizonyítandó állításhoz jutunk. □

**Következmény**: $K_5$ nem síkbarajzolható, hiszen tfh az, ekkor igaznak kéne lennie, hogy $e \leqslant 3n-6$, viszont $e=10, n=5$, így ez ellentmondás.
**Következmény**: $K_{3,3}$ sem síkbarajzolható, hiszen tfh az. Mivel nem tartalmaz 3 hosszú kört, ezért egy tartományt legalább 4 él fog közre:

$$4t \leqslant 2e \qquad \Rightarrow \qquad t \leqslant \frac{e}{2}$$

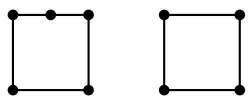
Felhasználva Euler-tételét:

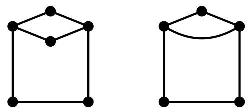
$$n+\frac{e}{2} \geqslant e+2$$

$$2n-4 \geqslant e$$

De jelen esetben $n=6, e=9$, így ez nem igaz, tehát ellentmondásra jutottunk.
*Megjegyzés*: A $K_{3,3}$ gráfot szokás „3 ház, 3 kút” problémának hívni. Bármely házból bármelyik kút és fordítva 1 hosszú úton elérhető, de bármelyik két ház, ill. két kút között nincs 1 hosszú út. Emiatt van az, hogy nincsen benne 3 hosszú kör, hiszen ha lenne, akkor a kérdéses 3 csúcs közül kettő azonos típusú (ház/kút) lenne, de ekkor ellent mondanánk annak a feltételnek, hogy két azonos típusú csúcs között nincs 1 hosszú út.

**Állítás**: Nyílvánvaló, hogy a síkba rajzolhatóságot nem befolyásolja, ha egy élt egy 2 hosszú úttal helyettesítünk, vagy ha egy másodfokú csúcsra illeszkedő éleket egybeolvasztjuk, és a csúcsot elhagyjuk. Példák:





**Definíció 4.18** $G$ és $G'$ **topologikusan izomorf**, ha véges sok fenti művelettel (él felosztása, v. másodfokú csúcs eltörlése) egymással izomorf gráfokba vihetőek.

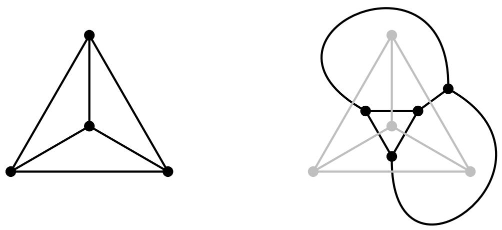
**Tétel 4.11** Kuratowski-tétel
$G$ síkbarajzolható $\Leftrightarrow$ nem létezik $K_{3,3}$-al és $K_5$-tel topologikusan izomorf részgráfja

**Bizonyítás 4.11** $\Rightarrow$ Már láttuk, hogy $K_{3,3}$ és $K_5$ nem síkbarajzolható, így, ha $G$ síkbarajzolható, akkor biztos nem tartalmaz $K_{3,3}$-al és $K_5$-tel topologikusan izomorf részgráfot.
$\Leftarrow$ Ezt az irányt nem bizonyítjuk. □

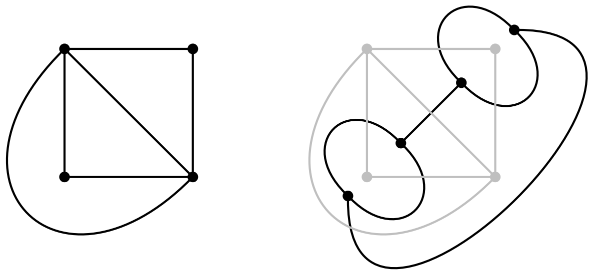
**Tétel 4.12** Fáry-Wagner-tétel
$G$ egyszerű, síkbarajzolható gráf $\Rightarrow$ van olyan síkbeli lerajzolása, ahol minden él egy egyenes szakasz

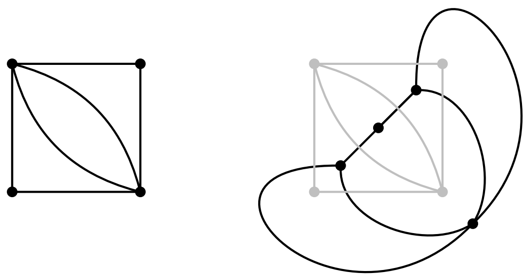
## 4.4. Síkgráfok duálitása

**Definíció 4.19** Egy gráf ($G$) duálisa az a gráf ($G^*$), aminek csúcsainak az eredeti gráf tartományait feleltetjük meg és két csúcsa között akkor van él, ha az eredeti gráfban a megfelelő két tartomány közös egy élben. Példa:



A duális nem egyértelmű, ugyanazon gráf különböző síkbarajzolásának különböző duálisai lehetnek. Példa (egyik duálisban van, a másikban nincs 4 fokszámú csúcs):





**Definíció 4.20** $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ **gyengén izomorfak**, ha $\exists f : E \rightarrow E'$ bijekció, ami körtartó (kört alkotó élek képe kört alkot, nem kört alkotó élek képe nem alkot kört). Példa két gyengén izomorf gráf:

**Tétel 4.13** $\boxed{\text{Whitney-tétele}}$
$G$ síkbarajzolható, $H$ gyengén izomorf $G$-vel, ekkor:

1. $H$ is síkbarajzolható
2. $G^*$ és $H^*$ is gyengén izomorf
3. $G^{**}$ gyengén izomorf $G$-vel