A hiva definiciója többféle lehet, és attól függően, hogy melyiket választjuk, az approximáció teljesen eltérő megoldásokra vehethet.

A leggyakoribb feltétel a négyzetes átlaghiba

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} | f_D - f |^2 \, d\Psi \tag{6.68}$$

melyet rendszerint akkor választunk, ha az előirást véges Fourier sorral közelitjük. Ez azonban nem tartalmaz megkötést a függvény egy adott pontjában fellépő hibára, és ez a toleranciaséma ugrásainál a realizált függvény oszcillációját okozza. Ez az oka annak, hogy gyakran a maximális eltérést, max. $| f_D - f |$ -et irják elő, amihez az f bázis-függvényekre Csebisev polinomok adódnak. Itt jegyezzük meg, hogy az általában nem jelent egyenlő hullámosságu közelitést, csak akkor, ha a hiba egyetlen Csebisev polinommal felirható .

A realizálható függvények meghatározása után a szintézis következő lépése az antennarendszer paramétereinek (elemszám, távolság, amplitúdó, fázis) rögzitése. Mint korábban emlitettük, egy adott f függvény többféle gerjesztéssel is megvalósitható. A legkedvezőbb megoldás kiválasztásához további feltételeket támaszthatunk. Ez vonatkozhat a tolerancia érzékenységre, jósági tényezőre, vagy más jellemzőre. A szakasz további részében a felsorolt megoldások közül az előirt iránykarakterisztika szintézisét véges Fourier sorral végezzük.

6.4.3. Egyenlő távolságu, szimmetrikus amplitudó eloszlásu antennasor iránytényezője

Az egyenlő távolságu antennasor iránytényezője a következő

$$F_i(z) = I_o + I_1 z + I_2 z^2 + \ldots + I_{N-1} z^{N-1} \tag{6.69}$$

Most tételezzük fel, hogy az elemszám páratlan, és helyezzük át a referencia pontot a sor első tagjáról a középsőre. Ekkor az irány-tényező

$$F_i(z) = I_M z^{-M} + I_{M+1} z^{-M+1} + \ldots + I_o + \ldots + I_{M-1} z^{M-1} + I_M z^M \qquad (6.70.)$$

ahol

$$M = \frac{N-1}{2}$$

Ha a sor közepéhez képest szimmetrikusan elhelyezkedő elemek gerjesztési állandói egymás konjugáltjai, akkor a (6.66) képlet a véges Fourier sor komplex alakja, mely valós függvényt realizál.
Ugyanis, ha

$$I_o = a_o; \quad I_{-k} = a_k - jb_k; \quad I_k = a_k + jb_k$$

akkor

$$F_i(\psi) = a_o + 2 \sum_{k=1}^{M} (a_k \cos k\psi - b_k \sin k\psi) \qquad (6.71)$$

vagy komplex alakban

$$F_i(\psi) = \sum_{k=-M}^{k=+M} I_k e^{jk\psi} \qquad (6.72.)$$

Megjegyezzük, hogy ha N páros, akkor az eljárás teljesen hasonló, csak az argumentum $(2k-1)\frac{\psi}{2}$.

6.4.4. Előirt iránytényező approximációja

Ha az előirt iránytényező a $-\pi \leq \psi \leq \psi$ tartományban adott (vagyis $d = \frac{\lambda}{2}$, akkor ez $e^{jk\psi}$ szerint sorbafejthető, vagyis

$$f_D = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} I_{Dk} e^{jk\psi} \qquad (6.73.)$$

6.5. Egyenlő melléknyalábu antennasorok szintézise

6.5.1. Bevezetés

Mint azt a binomiális eloszlásnál és a háromszög eloszlásnál láttuk a szélek felé csökkenő, szimmetrikus amplitudó eloszlásu antennasorok melléknyalábja kisebb, mint az egyenlő amplitudóju soroké.

A melléknyalábok csökkenésének ára a főnyaláb kiszélésedése, vagyis az irányhatás csökkenése. E téren valamelyes javulás érhető el azzal, hogy a kisebb, távoli melléknyalábok szintjét megemeljük, és már intuitiv uton is elvárható, hogy az egyenlő melléknyaláb szintet eredményező amplitudóeloszlás ebben az értelemben optimális, vagyis adott melléknyalábszinthez a legkeskenyebb főnyaláb tartozik. A feladat matematikai megfogalmazása nagyon hasonlit az elliptikus szűrőknél megismerthez.

Ilyen optimális antennasort először Dolph [5] dolgozott ki félhullámhossz távolságu oldalsugárzó antennasorokra, és kimutatta, hogy ez a szintézisfeladat Csebisev polinomokkal valósitható meg, igy az ilyen antennasorokat Dolph-Csebisev soroknak nevezik.
A Csebisev polinomok az ortogonális polinomok csoportjába tartoznak és rövid leirásuk az 1. Függelékben található.

6.5.2. Dolph-Csebisev módszer. Az iránytényező felirása

Az egyenlő távolságu, szimmetrikus amplitudó eloszlásu, és progressziv fázis eloszlásu antennasor $F(\Psi)$ iránytényezője a (6.72) képletből kiindulva felirható olyan véges Fourier sorral, mely csak cos-os tagokat tartalmaz.
Ha a sor elemeinek száma (N) páros, akkor

$$F(\Psi) = 2 \sum_{k=1}^{M} I_K \cos (2k-1) \frac{\Psi}{2} \qquad (6.78)$$

ahol

$$M = \frac{N}{2}$$

$$I_k = \text{valós}$$

Ha a sor elemeinek száma páratlan, akkor

$$F(\psi) = I_o + 2 \sum_{k=1}^{M} I_k \cos 2k \left(\frac{\psi}{2}\right) \tag{6.79}$$

ahol

$$M = \frac{N-1}{2}$$

És most vezessünk be egy uj változót. Legyen

$$x = \cos \frac{\psi}{2} \tag{6.80}$$

akkor az 1. Függelék ismeretében az iránytényező páros elemszám esetén

$$F(x) = 2 \sum_{k=1}^{M} I_k \, T_{2k-1}(x) \; ; \quad (-1 \leq x \leq 1) \tag{6.81}$$

és páratlan elemszám esetén

$$F(x) = I_o + 2 \sum_{k=1}^{M} I_k \, T_{2k}(x) \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{6.82}$$

Vagyis az iránytényező felirható olyan elsőfaju Csebisev polinomok súlyozott összegeként, melyek legnagyobb rendszáma (N-1) és páros N esetén az összeg csak páratlan polinomokból áll, páratlan N esetén pedig csak párosakból.

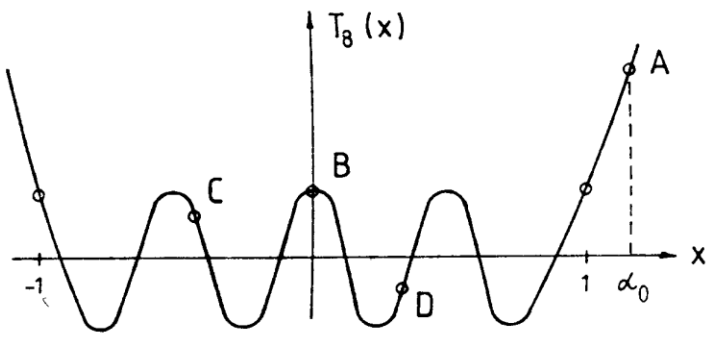
A (6.81) és (6.82) képletet vizsgálva megállapitható, hogy a főirányban ($\psi = 0$; $x=1$) $T_k(1) = 1$, ezért a normalizálási képletek

$$F(1) = 2 \sum_{k=1}^{M} I_k \; ; \quad \text{ha} \quad N = 2M \text{ páros} \tag{6.83}$$

és

$$F(1) = I_0 + 2\sum_{k=1}^{M} I_k \; ; \quad \text{ha} \quad N=2M+1 \text{ páratlan} \tag{6.84}$$

Itt megjegyezzük, hogy a (6.81) és (6.82) képlet a szakasz elején tett feltételek mellett teljesen általános iránytényezőt ir le. A Csebisev polinomok itt még nem adnak egyenlő nagyságu melléknyalábokat. A szintézis következő lépéséhez először nézzük meg 6.38. ábrát, mely a $T_8(x)$ Csebisev polinomot mutatja



6.38. ábra

Az ábrából látható, hogy a kivánt iránytényezőt egyetlen Csebisev polinommal is leirhatjuk, ha a főnyaláb leirásához felhasználjuk az $x > 1$ tartományt. Mivel a (6.81) és (6.82) képlet szerint az iránytényező (N-1) -edrendű polinom, ezért a keresett Csebisev polinom $T_{N-1}(u)$, ahol

$$u = \alpha_0 x = \alpha_0 \cos\frac{\psi}{2} \; ; \quad (\alpha_0 > 1) \tag{6.85}$$

és a főirányban

$$T_{N-1}(\alpha_0) = R \quad ; \quad (R > 1) \tag{6.86}$$

6.5.3. A Dolph-Csebisev módszer korlátai

A 6.38. ábra részletes vizsgálata alapján megállapitható, hogy $T_{N-1}(u)$ látható tartománya oldalsugárzó sor ($\delta=0$) és $d = \lambda/2$ esetén a B-A-B szakasz, $d > \lambda/2$ esetén a C-A-C szakasz és $d < \lambda/2$ esetén a D-A-D szakasz, vagyis az $F(\vartheta)$ iránytényezőt a $T_{N-1}(u)$ polinom jobboldalának kétszeres leképzésével kapjuk.
Ezzel kapcsolatban rá kell mutatnunk, hogy ha $d < \lambda/2$, akkor az $F(\vartheta)$ függvényben nem jelenik meg $T_{N-1}(u)$ minden zérusa, tehát lehet olyan másik (N-1)-edrendű polinomot találni, amely ugyanilyen melléknyaláb szint mellett keskenyebb főnyalábot eredményez. Vagyis ha $d < \lambda/2$ akkor a Dolph-Csebisev módszer nem ad optimális megoldást.
Visszatérve a $T_{N-1}(u)$ polinom látható tartományának vizsgálatára, az is megállapitható, hogy ha $\delta = -\beta d$, vagyis orrsugárzó sort készitünk, akkor a látható tartomány csak akkor kerüli el az $u < -1$ szakaszt, tehát csak akkor nem keletkezik kiugró melléknyaláb, ha $d < \lambda/4$, ami már a szupernyereségü tartományban van, vagyis egyéb hibái mellett igen toleranciaérzékeny megoldást eredményez. Ezért a Dolph-Csebisev módszer orrsugárzó sorok méretezésére nem használatos, de mindezek ellenére, különösen oldalsugárzó sorok szintéziséhez széles körben alkalmazzák. A továbbiakban mi is csak ezt a ($\delta=0$) lehetőséget vizsgáljuk.

6.5.4. A számitás főbb lépései

Az egyenletes hullámosságu iránytényező két legfontosabb paramétere a melléknyaláb elnyomás (R) és a főnyaláb szélessége a szomszédos zérushelyek között mérve. A Dolph-Csebisev sorok méretezése azt jelenti, hogy adott elemszám (N) mellett vagy a melléknyaláb elnyomást irjuk elő, vagy a főnyaláb szélességét, és ehhez meghatározzuk a gerjesztő amplitudókat.

Ha a főnyaláb kúpszöge (Θ_0) van megadva, akkor ebből először α_0-t határozzuk meg. Ehhez az első zérushely az (F.27.) képlet alapján

$$u_{01} = \cos\frac{\pi}{2(N-1)}$$

Másrészt

$$u_{01} = \alpha_0 x_{01} = \alpha_0 \cos\frac{\psi_{01}}{2} = \alpha_0 \cos(\pi \frac{d}{\lambda} \cos\vartheta_{01})$$

ahol, oldalsugárzó sor esetén $\vartheta_{01} = 90 - \frac{\Theta_0}{2}$.

Ezzel

$$\alpha_0 = \frac{\cos\frac{\pi}{2(N-1)}}{\cos(\pi \frac{d}{\lambda} \cos\vartheta_{01})} \tag{6.87}$$

A számitás legfontosabb lépése a gerjesztő amplitudók meghatározása. Ez ugy történik, hogy a (6.81) vagy (6.82) képletet egyenlővé tesszük $T_{N-1}(u)$-val és x azonos kitevőjü tagjait összehasonlitjuk. Például páros N-re a (6.77) képlet felhasználásával

$$\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} I_k T_{2k-1}(x) = T_{N-1}(\alpha_0 x) \tag{6.88}$$

A (6.88) képlet megoldásának menetét a 9.Példában mutatjuk be.

A feladat része még a melléknyaláb elnyomás (R) meghatározása. Ez α_0 ismeretében a (6.82) képlettel történik, ahol $T_{N-1}(u)$-t most célszerűen az (F.22) képlettel adjuk meg. Tehát

$$R = \frac{1}{2}\left[(\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 - 1})^{N-1} + (\alpha_0 - \sqrt{\alpha_0^2 - 1})^{N-1}\right] \tag{6.89}$$

Ha a melléknyaláb elnyomás van megadva, akkor α_0-t a (6.89) képlet inverzéből számitjuk ki. Ez a levezetés mellőzésével

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\left[(R+\sqrt{R^2-1})^{\frac{1}{N-1}} + (R-\sqrt{R^2-1})^{\frac{1}{N-1}}\right] \qquad (6.90)$$

Az amplitudókat ezután az előzőkhöz hasonlóan a (6.88) képletből határozzuk meg.
A feladat befejező részeként a főnyaláb szélességét kell még kiszámitanunk. A (6.87) képlet átrendezése után

$$\cos \vartheta_{01} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\lambda}{d}\right) \arccos\left[\frac{1}{\alpha_0} \cos \frac{\pi}{2(N-1)}\right] \qquad (6.91)$$

és $\theta_0 = 2\,(90-\vartheta_{01})$.

9. Példa

Legyen az oldalsugárzó sor elemeinek száma N = 8, az elemek közötti távolság d = $\lambda/2$ és az előirt melléknyaláb-elnyomás 26 dB.
Határozza meg az amplitudó eloszlást, számitsa ki a főnyaláb kúpszögét és az irányhatást.

Megoldás:

R = num log 26 dB
R = 20

Tehát a (6.86) képletből

$T_7(\alpha_0) = 20$

A (6.86) képletből

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\left[(20+\sqrt{20^2-1})^{1/7}+(20-\sqrt{20^2-1})^{1/7}\right]$$

$$\alpha_0 = 1{,}15$$

Behelyettesitve a (6.84) képletbe

$$I_1x+I_2(4x^3-3x)+I_3(16x^5-20x^3+5x)+I_4(64x^7-112x^5+56x^3-7x)=$$
$$= 64u^7-112u^5+56u^3-7u$$

Mivel $u = \alpha_o x$, ezért a hetedfoku tagra

$$64I_4x^7 = 64\alpha_o^7 x^7$$
$$I_4 = \alpha_o^7$$
$$I_4 = 1{,}15^7$$
$$\underline{\underline{I_4 = 2{,}66}}$$

Hasonló módon

$$x^5(16I_3-112I_4) = -112\alpha_o^5 . x^5$$
$$\alpha_o^5 = 2{,}0114$$
$$\underline{\underline{I_3 = 4{,}56}}$$

$$x^3(4I_2-20A_3+56I_4) = 56\alpha_o^3 x^3$$
$$\alpha_o^3 = 1{,}5209$$
$$\underline{\underline{I_2 = 6{,}82}}$$

$$x(I_1-3I_2+5I_3-7I_4) = -7\alpha_o x$$
$$\underline{\underline{I_1 = 8{,}25}}$$

Az amplitudó-eloszlást ugy szokták megadni, hogy a legkisebb amplitudó 1 legyen. Az eloszlás tehát

$$1;\ \frac{4,56}{2,66};\ \frac{6,82}{2,66};\ \frac{8,25}{2,66};\ \frac{8,25}{2,66};\ \frac{6,82}{2,66};\ \frac{4,56}{2,66};\ 1$$

$$1;\ 1,7;\ 2,6;\ 3,1;\ 3,1;\ 2,6;\ 1,7;\ 1$$

Az első nullahely a (6,87) képletből

$$\cos\vartheta_0 = \frac{1}{\pi}\ 2.\mathrm{arc}\cos\left(\frac{1}{1,15}\cos\frac{\pi}{14}\right)$$

$$\cos\vartheta_0 = 0,3558$$

$$\vartheta_0 = 1,2069 \text{ rad}$$

$$\vartheta_0 = 69,15^0$$

$$\vartheta_{max} = 90^0$$

A főnyaláb kúpszöge tehát

$$\underline{\Theta_0 = 41,7^0}$$

Összehasonlitva az egyenlő amplitudóju sorral annak kúpszöge $\Theta_0 = 29^0$, tehát a főnyaláb kiszélesedése jelentős.

Az irányhatás a (6.60) képlet alapján

$$D = \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} |I_k|\right)^2}{\sum_{k=0}^{N-1} |I_k|^2}$$

$$\underline{\underline{D = 6,97}}$$

Összehasonlitva az egyenlő amplitudóju sorral a megvilágitási hatásfok $\eta = 0,87$.

10. Példa

Legyen az irányténye zőben a főnyaláb kúpszöge $\theta_0 = 35^0$, a sor elemeinek száma N=8 és az elemek közötti távolság $d = \lambda/2$. Számitsuk ki a melléknyaláb elnyomást és határozzuk meg az amplitudó-eloszlást.

A (6.83) képletből

$$\alpha_0 = \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{\cos(\frac{\pi}{2} \cos 72,5^0)} = \frac{0,9749}{0,8905}$$

$$\alpha_0 = 1,0948$$

Ebből

$$T_7(1,0948) = 9,1 = R$$

Tehát a melléknyaláb-elnyomás

$$a_M = 20 \lg R$$

$$a_M = 19,2 \text{ dB}$$

Az amplitudó-eloszlás meghatározásához szükséges egyenletrendszer

$$I_4 = \alpha_0^7 \qquad I_4 = 1,89$$

$$16I_3 - 112I_4 = -112\alpha_0^5 \qquad I_3 = 2,21$$

$$4I_2 - 20I_3 + 56I_4 = 56\,\alpha_0^3 \qquad I_2 = 2,88$$

$$I_1 - 3I_2 + 5I_3 - 7I_4 = -7\,\alpha_0 \qquad I_1 = 3,17$$

A keresett amplitudó-eloszlás tehát,

1; 1,7; 1,52; 1,68; 1,68; 1,52; 1,17; 1

2. A Csebisev polinomok származtatása

Az elsőfajú $T_n(x)$, és másodfajú $U_n(x)$ Csebisev polinomokat legegyszerűbben a $0 \leq t \leq \pi$ tartományban ortogonális $\{\cos nt\}$, illetve $\{\sin nt\}$ rendszerből jelölésváltoztatással származtathatjuk. Ugyanis az

$$\int_0^{\pi} \cos mt . \cos nt \, dt = \int_0^{\pi} \sin(m+1)\, t \, \sin(n+1)t \, dt = 0$$

$$(m \neq n \; ; \; m,n = 0,1,2 \ldots)$$

ortogonalitási relációkból $\cos t = x$ helyettesitéssel adódik, hogy

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\, T_n(x)\, (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx = \int_{-1}^{1} U_m(x)\, U_n(x)\, (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx = 0 \qquad (6)$$

$$(m \neq n; \quad m,n = 0,1,2 \ldots)$$

ahol

$$T_m(x) = \cos m\, t = \cos (m \arccos x) \qquad (7)$$

az elsőfaju Csebisev polinom

$$U_m(x) = \frac{\sin(m+1)t}{\sin t} = \frac{\sin[(m+1) \arccos x]}{\sin (\arccos x)} \qquad (8)$$

a másodfaju Csebisev polinom.

A (6) képlet szerint a $T_n(x)$ elsőfaju Csebisev polinomok a $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ súlyfüggvényre, az $U_n(x)$ másodfaju Csebisev polinomok a $w(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ súlyfüggvényre ortogonálisak a $-1 \leq x \leq 1$ tartományban.

Ha $m=n$, akkor a <u>normalizálási képletet</u> kapjuk, mely

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 nt \, dt = \begin{cases} \pi & \text{ha } n=0 \\ \pi/2 & \text{ha } n \neq 0 \end{cases} \qquad (9)$$

illetve

$$\int_{-1}^{1} U_m^2(x) \sqrt{(1-x^2)} \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2(n+1)t \, dt = \pi/2; \; n=0,1,2.. \qquad (10)$$

$T_m(x)$ és $U_m(x)$ x-nek n-edfoku polinomjai, melyek felirhatók a Moivre képlet és a binomiális tétel alapján.

$$\cos nt + j \sin nt = \cos^n t + j\binom{n}{1}\cos^{n-1}t.\sin t - -\binom{n}{2}\cos^{n-2}t.\sin^2 t + \ldots$$

A valós és a képzetes részek összehasonlitásával azt kapjuk, hogy

$$\cos nt = (\cos t)^n - \binom{n}{2}(\cos t)^{n-2}(1-\cos^2 t)+\ldots \qquad (11)$$

$$\sin nt = \sin t \quad \binom{n}{1}(\cos t)^{n-1} - \binom{n}{3}(\cos t)^{n-3}(1-\cos^2 t)+\ldots \qquad (12)$$

Vagyis

$$T_n(x)=x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}.(1-x^2)+\binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2-+\ldots \qquad (13)$$

$$U_n(x)=(n+1)x^n-\binom{n+1}{3}x^{n-2}(1-x^2)+\binom{n+1}{5}x^{n-4}(1-x^2)^2-+\ldots \qquad (14)$$

Speciálisan:

$$T_0(x)=1;\ T_1(x)=1;\ T_2(x)=2x^2-1;\ T_3(x)=4x^3-3x$$

$$U_0(x)=1;\ U_1(x)=2x;\ U_2(x)=4x^2-1;\ U_3(x)=8x^3-4x$$

A számunkra fontosabb $T_n(x)$ polinomok első 10 tagjának együtthatóit az I. Táblázatban adjuk meg a

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_m x^m$$

képletnek megfelelően. Az együtthatókat a $T_n(x)$-nek megfelelő <u>sorban</u> találjuk a sor elején, a táblázat főátlója alatt. Pl. $T_6(x)= =32x^6-48x^4+18x^2-1$.

1. táblázat

Az elsőfaju Csebisev polinomok együtthatói

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	
T_0	1 1		1		3		10		35		126	T_0
T_1		1 1		3		10		35		126		T_1
T_2	-1		2 1		4		15		56		210	T_2
T_3		-3		4 1		5		21		84		T_3
T_4	1		-8		8 1		6		28		120	T_4
T_5		5		-20		16 1		7		36		T_5
T_6	-1		18		-48		32 1		8		45	T_6
T_7		-7		56		-112		64 1		9		T_7
T_8	1		-32		160		256		128 1		10	T_8
T_9		9		-120		432		576		256 1		T_9
T_{10}	-1		50		-400		1120		-1280		512 1	T_{10}
	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	

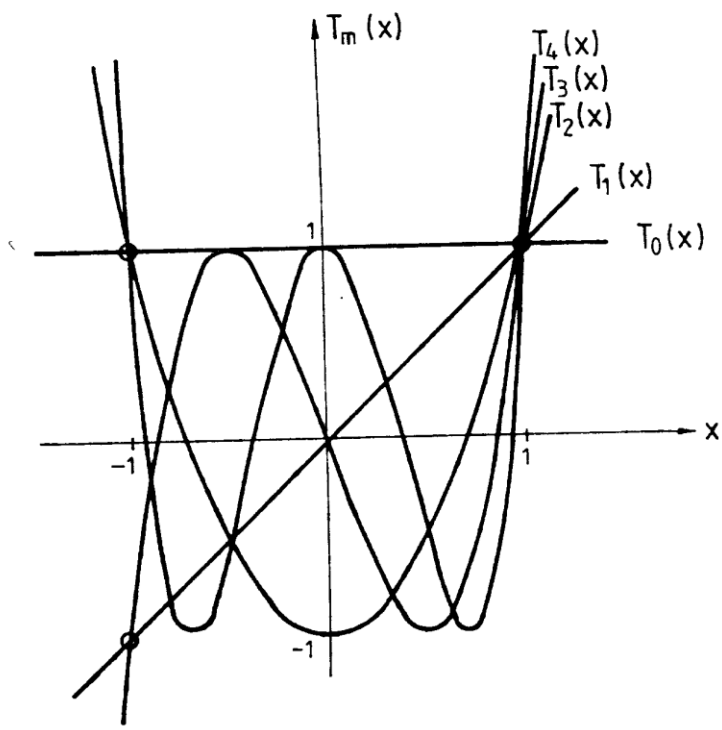
A táblázatban feltüntettük az

$$x^n = \frac{1}{C_n} \sum_{m=0}^{n} d_m T_m (x)$$

képlet együtthatóit is a táblázat főátlója fölött, az x^n-nek megfelelő oszlopban.

Pl. $x^6 = \frac{1}{32}\left[10\ T_0+15T_2+6T_4+T_6\right]$

Az első öt függvényt az 1. ábrán grafikusan is megadtuk.



1. ábra

A Csebisev polinomok <u>közvetlenül is előállithatók</u> (direkt előállitás) az alábbi képletekkel.

Páros inkexű polinomokra, n = 2N jelöléssel:

$$T_{2N}(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^{N-k} \frac{N}{N+k} \binom{N+k}{2k} (2x)^{2k} \tag{20}$$

Páratlan indexű polinomokra, n = 2N-1 jelöléssel:

$$T_{2N-1}(x) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{N-1} \frac{2N-1}{2(N+k-1)} \binom{N+k-1}{2k-1} (2x)^{2k-1} \tag{21}$$

Végül, különösen az antennasorok számitásához igen hasznos az alábbi direkt előállitás:

$$T_n(t) = \cos nt = \frac{1}{2}(e^{jnt} + e^{-jnt}) = \frac{1}{2}\left[(e^{jt})^n + (e^{-jt})^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos t + j \sin t)^n + (\cos t - j \sin t)^n\right]$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+j \quad 1-x^2)^n + (x-j \quad 2-x^2)^n\right]$$

és

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right] \tag{22}$$

A (22) képlet különösen akkor kényelmes, ha $|x| > 1$.

4. <u>A Csebisev polinomokra vonatkozó további összefüggések</u>

Az elsőfaju Csebisev polinomok deriváltja

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = n\, U_{n-1}(x) \tag{23}$$