ANALÍZIS SZIGORLAT **2019. június 19.**

Mérnökinformatikus szak α-variáns Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (12 pont)

Számolja ki az $a_n = \left(\dfrac{n^2-2}{n^2-(-1)^{n+1}}\right)^{4n^2+3}$ sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját! Konvergens a sorozat?

2. feladat (5+12=17 pont)

a) Adjon szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ teljes értelmezési tartományán differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ pontban lokális szélsőértékhelye van.
b) Mely intervallumokon monoton az $f(x) = (x-1)^3(x+3)^4$ függvény? Hol vannak lokális szélsőértékei?

3. feladat (5+10=15 pont)

a) Hogyan értelmezzük egy nemkorlátos függvény improprius integrálját?
b) Számolja ki az

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+4x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}\,dx$$

integrált!

4. feladat (4+8=12 pont)

a) Adja meg az elsőrendű, szétválasztható változójú ill. az elsőrendű, lineáris differenciálegyenletek általános alakját!
b) Adja meg megfelelő helyettesítéssel az $y' = (x+y)^2$ differenciálegyenlet általános megoldását explicit alakban!

5. feladat (7+12=19 pont)

a) Mutassa meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx+\pi)}{n^2}$$

függvénysor összegfüggvénye folytonos a valós számok halmazán!
b) A nevezetes függvények Taylor-sorainak felhasználásával adja meg az $f(x) = \ln(1+x^2)$ és $g(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorait és azok konvergenciasugarát!

6. feladat (6+7=13 pont)

a) Milyen kapcsolat van egy kétváltozós függvény folytonossága és totális deriválhatósága között? Igazolja is az állítást!
b) Totálisan deriválható-e az alábbi függvény?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 2, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7. feladat (12 pont)

Hengerkoordináták felhasználásával számítsa ki az $f(x,y,z) = z^2$ függvény integrálját az $x^2+y^2 \le 1$ és $x^2+y^2+z^2 \le 4$ felültek által meghatározott véges V tartományra! Készítsen ábrát is az integrálási tartományról!