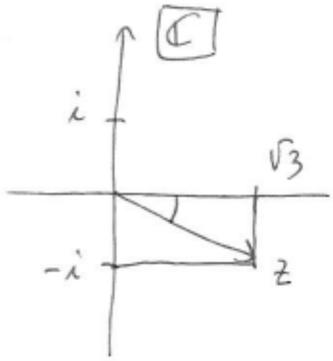
1, i, $\boxed{8}$ $\left|\frac{2i}{(3-4i)^2}\right| = \frac{|2i|}{|3-4i|^2} = \frac{2}{3^2+(-4)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{25}}}$



ii, $\boxed{9}$ $|\sqrt3 - i| = \sqrt{3+1} = 2$ (3); $\arg(\sqrt3 - i) = \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt3} = -\frac{\pi}{6}$ (3)

$\sqrt3 - i = 2\cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$ (3)

$\boxed{8}$ $(\sqrt3 - i)^{10} = 2^{10}\cdot e^{-\frac{10\pi}{6}i}$ (3) $= 2^{10}\cdot e^{-\frac{5\pi}{3}i} = 2^{10}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = 2^{10}\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac12} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt3}{2}}\Big)$ (3)

$\operatorname{Re}(\sqrt3 - i)^{10} = 2^9 = \underline{\underline{512}}$ (2)

2, $\boxed{20}$ $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac1n\right)^n \longrightarrow e^{-1} = \frac1e$ (10)

(10) Így a $b_n = (-1)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ sorozatnak két torlódási pontja van, az $\frac1e$ és a $\frac{-1}{e}$, tehát b_n nem konvergens.

3, i, $\boxed{13}$ Rendőr elv alapján: (3)

$$3 = \underbrace{\sqrt[n]{3^n}}_{(4)} \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}\cdot 3}_{\downarrow\; 1\cdot 3 = 3} \quad (6)$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n} = \underline{\underline{3}}$

$\boxed{12}$ ii, $\sqrt{n^4-n^2} - \sqrt{n^4+n^2} = \frac{n^4-n^2-(n^4+n^2)}{\sqrt{n^4-n^2}+\sqrt{n^4+n^2}}$ (4) $= \frac{-2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\Big(\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}_{\downarrow\,1} + \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}_{\downarrow\,1}\Big)}$ (4) $\rightarrow \underline{\underline{-1}}$ (1)

(3)

4, $b_1=2;\ b_{n+1}=\sqrt{b_n-2}+4$

[9] i, Ha $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, akkor $B=\sqrt{B-2}+4$ (*)

$$\Rightarrow (B-4)^2 = B-2 \Rightarrow B^2-9B+18=(B-3)(B-6)=0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}B_1=3\\ B_2=6\end{array}}$$ (6)

A $B_1=3$ érték a négyzetre emelésben bejött hamis gyök, nem megoldása (*)-nak.
Tehát ha $\exists$ a határérték, akkor $B=6$. (3)

[21] ii, b_n monoton nő: α, $b_1=2<b_2=\sqrt{2-2}+4=4$ (2)

β, t.f.h. $2<b_n<b_{n+1}$ (3)

γ, Ekkor $0<b_n-2<b_{n+1}-2$,

$$\underbrace{\sqrt{b_n-2}+4}_{b_{n+1}} < \underbrace{\sqrt{b_{n+1}-2}+4}_{b_{n+2}}$$ ✓ (4)

[9]

b_n korlátos, $b_n<6$: α, $b_1=2<6$ (2)

β, t.f.h. $2<b_n<6$ (3)

γ, Ekkor $0<b_n-2<4 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{b_n-2}+4}_{b_{n+1}}<\sqrt{4}+4=6$ ✓ (4)

[9]

Mivel b_n monoton nő és felülről korlátos, ezért konvergens. $\boxed{3}$

5, (IMSC) A számláló korlátos, a nevező $+\infty$-hez tart, tehát

[7] $$b_n=\frac{\sin(n+666)}{\ln(n+666)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$ (2)

A számláló változó előjelű, a nevező pozitív, tehát b_n (végtelen sok) pozitív és negatív értéket is felvesz. Tehát $\exists k\in\mathbb{N}$: $b_k<0$. (1)

$b_n\to 0$, tehát véges sok elem kivételével $|b_n|<\frac{|b_k|}{2}$, azaz $\exists N$: $\forall n>N$: $|b_n|<\frac{|b_k|}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az $A=\{\, b_n \mid b_n\le \frac{b_k}{2}<0\}$ halmaz véges, nem üres ($b_k\in A$), így

$$\exists \min A = \min\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$ (4)