1	2	3	4	5	6	$\sum$

FelsMatInf_AlkAlg 2. vizsga 19-01-08 Neptun: ______ **Név:** ______

A vizsga feladatainak eredményeit mind erre az oldalra kell írni, de a mellékszámítások is beadandók! Minden papírlap jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 12.

1. *Igaz–Hamis I/H (4 pont)*

a) Tetszőleges valós $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy olyan optimális megoldása van, mely a sortérbe esik. $\boxed{\text{I}}$

b) Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$ és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$ egyenletrendszerek konzisztensek, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbf{Ax} = \mathbf{u} + c\mathbf{v}$ egyenletrendszer is az. $\boxed{\text{I}}$

c) Minden unitér mátrix unitéren diagonalizálható. $\boxed{\text{I}}$

d) Ha az $\mathcal{U}$ az $\mathbb{R}^n$ egy nemtriviális altere, akkor $\mathbb{R}^n$ tetszőleges bázisának $\mathcal{U}$-ba eső elemei bázist alkotnak $\mathcal{U}$-ban. $\boxed{\text{H}}$

e) Ha az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális, akkor $\mathbf{A}^2$ is az. $\boxed{\text{I}}$

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján!

a) Mi annak a mátrixnak a pseudoinverze, amelynek a redukált SVD-felbontása

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} [5] \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \ ?$$

$$\frac{1}{25\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Adjunk meg olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}$, ahol az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ szimmetrikus és $\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\mathrm{diag}(4, 0, 1, 81)\mathbf{C}^\mathsf{T}$.

$\mathbf{B} = \mathrm{diag}(2, 0, 1, 9)\mathbf{C}^\mathsf{T}$

c) Milyen képlet definiálja a $\|.\|_a$ vektornorma által indukált mátrixnormát?

$$\|\mathbf{A}\|_a = \max_{\|\mathbf{x}\|_a = 1} \|\mathbf{Ax}\|_a$$

d) Az $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m\times 4}$ mátrixra $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ sajátértékei 16, 9, 4, 1. Mik az $\mathbf{A}$ legjobb 2-rangú közelítésének szinguláris értékei?

4, 3, 0, 0

e) *(2 pont)* Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei λ és μ. $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjában a λ-hoz tartozó Jordan-blokkok mérete 3, 3, 2, 1, a μ-höz tartozók mérete 4, 2, 1. Írjuk fel $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomját, és határozzuk meg λ geometriai multiplicitását!

$\chi_\mathbf{A}(x) = (\lambda - x)^9(\mu - x)^7$, $m_g(\lambda) = 4$

f) *(3 pont)* Az $\mathbf{u} = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 3, -1, -3)$ vektorok Gram–Schmidt-ortogonalizációja után az $(1, 1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1, -1)$ vektorokat kapjuk. Írjuk fel az $\mathbf{A} = [\mathbf{u}|\mathbf{v}]$ mátrix QR-felbontását!

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-alakját és egy Jordan-bázisát, ahol *(5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A 2-höz tartozó sajátaltér 1-dimenziós, így egyetlen J-blokk tartozik hozzá. (Az ált.s.v-hoz: keresünk egy vektort, amit $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2$ nem a $\mathbf{0}$-ba visz (pl. $(0, 0, 1)$)):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{J-lánc:} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix LU-felbontását, és azt fölhasználva Cholesky-felbontását! *(5 pont)*

Az LU-felbontás egyetlen sorművelettel, abból a Cholesky-felbontás a $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ „leválasztásával” megkapható:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Mi az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakja, ha az $\mathbf{A}^k$ hatványok rangja a következő táblázat szerinti? *(3 pont)*

k	0	1	2	3
$r(\mathbf{A}^k)$	4	2	1	0

A mátrix nilpotens, hisz $\mathbf{A}^3 = \mathbf{O}$, így minden sajátértéke 0, és így $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{A}$. Eszerint

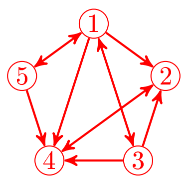
k	0		1		2		3
r	4		2		1		0
d		2		1		1	
n			1		0		1

$$\rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6. Primitív-e az alábbi mátrix? (a választ indokoljuk néhány szóban és egy alkalmas gráffal vagy mátrixszal) *(4 pont)*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Reducibilis, mert nem erősen összefüggő a gráfja ($\{2, 4\}$ halmazból nem vezet ki él), így nem primitív.



A 2.–5. sorok és oszlopok cseréje után:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$