# Villamosmérnök A2 (2019 tavasz) 1. ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** Számítsa ki $A^2$-et és $Ab$-t, ha $A = \begin{pmatrix} 1&0&3 \\ 2&2&0 \\ 0&3&1 \end{pmatrix}$ és $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$!

**Megoldásvázlat.** $A^2 = \begin{pmatrix} 1&9&6 \\ 6&4&6 \\ 6&9&1 \end{pmatrix}$ és $Ab = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

**2.** Adja meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát az $a$ és $b$ paraméterek függvényében!

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2 \\ x + y + 2z &= 4 \\ -x - 4y + az &= b \end{aligned}$$

**Megoldásvázlat.** Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & a & b \end{array}\right) \underset{S_2/-2}{\overset{S_2-S1,S_3+S1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a+2 & b+2 \end{array}\right) \overset{S_3+S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 & b+1 \end{array}\right),$$

tehát 0 megoldás van, ha $a = -2$, $b \neq -1$, 1 megoldás van, ha $a \neq -2$, és végtelen sok, ha $a = -2$, $b = -1$.

**3.** Az $a$ paraméter mely értékeire invertálható $A = \begin{pmatrix} 1&3&2 \\ 3&10&1 \\ 2&1&a \end{pmatrix}$, és az ilyen $a$-kra $\det(A^{-1}) = ?$

**Megoldásvázlat.**

$$\begin{pmatrix} 1&3&2 \\ 3&10&1 \\ 2&1&a \end{pmatrix} \overset{S_2-3S_1,S_3-2S_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1&3&2 \\ 0&1&-5 \\ 0&-5&a-4 \end{pmatrix} \overset{S_3+5S_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1&3&2 \\ 0&1&-5 \\ 0&0&a-29 \end{pmatrix},$$

következésképp $A$ rangja pontosan akkor 3, azaz $A$ pontosan akkor invertálható, ha $a \neq 29$. És ilyenkor $\det A^{-1} = \frac{1}{det(A)} = \frac{1}{a-29}$.

**4.** Legyen $A$ az $xy$-síkra való merőleges vetítés $\mathbb{R}^3$-ben. Adja meg $A$ mátrixát $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisában, $A$ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket!

**Megoldásvázlat.** $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$; a $z$-tengely (azaz a $k$ által generált altér) a 0 sajátértékhez tartozó sajátaltér, mert ennek elemeire $Av = 0$, az $xy$-sík (az $i$ és $j$ által generált altér) pedig az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér, mert ezekre $Av = v$. És más sajátérték nincs, mert egyetlen más vektor képe sem annak valamilyen skalárszorosa.

Vagy számolással: A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

gyökei $\lambda = 0, 1$. A 0-hoz tartozó sajátaltér a $\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ mátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, azaz $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, az 1-hez tartozó sajátaltér pedig a $\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$ mátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, azaz $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**5.** Legyen $e = (i, j, k)$ az $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisa, $f = (i+j, j+k, k+i)$. Mutassa meg, hogy $f$ bázis, és írja fel az $e$-ről $f$-re és az $f$-ről $e$-re való áttérés mátrixát!

**Megoldásvázlat.** Az $f$-ről $e$-re való áttérés mátrixa $\underline{\underline{I}}_{fe} = \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$ az $f$ elemei az $e$ bázisban felírva. Tehát ha ez invertálható, akkor $f$ független, és így bázis is. És az inverze $\underline{\underline{I}}_{ef}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&-1&-1&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \overset{S_3-S2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&-1&-1&1&0 \\ 0&0&2&1&-1&1 \end{array}\right)$$

$$\overset{S_3/2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&-1&-1&1&0 \\ 0&0&1&1/2&-1/2&1/2 \end{array}\right) \overset{S_1-S_3,S_2+S_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1/2&1/2&-1/2 \\ 0&1&0&-1/2&1/2&1/2 \\ 0&0&1&1/2&-1/2&1/2 \end{array}\right)$$

Tehát $f$ bázis, és $\underline{\underline{I}}_{ef} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&1&-1 \\ -1&1&1 \\ 1&-1&1 \end{pmatrix}$.

**6.** Igazak-e az alábbi állítások?
(a) Ha $A$ egy nem invertálható lineáris transzformáció egy valós test feletti vektortéren, akkor $A$-nak van valós sajátértéke.
(b) Ha az $A$ lineáris transzformációnak 0 sajátértéke, akkor $A$ nem invertálható.
(c) Ha $A$, $B$ $n \times n$-es mátrixok, és $AB$ invertálható, akkor $A$ és $B$ is invertálható.
(d) Ha az $A : V \to V$ lineáris transzformációnak $v$ sajátvektora $\lambda$ sajátértékkel, a $B : V \to V$ lineáris transzformációnak $v$ sajátvektora $\mu$ sajátértékkel, akkor $A + B$-nek $v$ sajátvektora $\lambda + \mu$ sajátértékkel.
(e) Ha az $A : V \to V$ lineáris transzformációnak $\lambda$, a $B : V \to V$ lineáris transzformációnak pedig $\mu$ sajátértéke, akkor $A + B$-nek sajátértéke $\lambda + \mu$.

**Megoldásvázlat.** (a) Igen, a 0 biztosan az, mert a hozzá tartozó sajátaltér $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.
(b) Igen, mert akkor $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.
(c) Igen, mert $0 \neq \det(AB) = \det(A)\det(B)$ miatt $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$.
(d) Igen, mert $(A + B)v = Av + Bv = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v$.
(e) Nem. Pl. legyen $\mathbb{R}^2$-en $A$ az $x$, $B$ az $y$-tengelyre való merőleges vetítés. Akkor mindkettőnek sajátértéke az 1, az $A + B$ viszont az identitás, aminek 1 az egyetlen sajátértéke.

**IMSc-feladat.** Van-e olyan $A$ mátrix, amelyre $A^k$ pontosan akkor a null-mátrix, ha $k \geq 4$?

**Megoldásvázlat.** Igen, ha $B$ a derivált-operátor a legfeljebb negyedfokú polinomok terén, akkor $B$ mátrixa (tetszőleges bázisban felírva) ilyen.