

Vizsgadolgozat

Általános tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
 - (a) Hogyan definiáljuk a teljes eseményrendszer fogalmát?
 - (b) Mondjuk ki a teljes valószínűség tételét.
2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

	X			
Y		0	1	2
-1		$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	α
1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

Határozzuk meg az α értékét, és állapítsuk meg, hogy független-e X és Y .

3. Egy csomag pisztáciában előfordulnak teljesen "zárt" magok, amiket nehéz kinyitni. Feltehetjük, hogy egy csomagban sok mag van, amelyek egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel lesznek zártak. Jelölje a zárt magok számát X . Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X = 0 \mid X \leq 1) = 0,4$. Határozzuk meg $\text{cov}(1 + 2X, 3X)$ értékét.
4. Legyen X egy normális eloszlású valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X > 0) = 0,6915$ teljesül. Határozzuk meg az X eloszlásának paramétereit.
5. Egy cég vásárol 90 darab izzót az iroda világításához. Tegyük fel, hogy egy izzó élettartama (években számolva) $\text{Exp}(\frac{1}{\sqrt{10}})$ eloszlású, és az izzók élettartamai egymástól függetlenek. Számoljuk ki az összes izzó együttes élettartamának várható értékét és szórását. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy az izzók együttes élettartama legalább 250 év?
6. Egy mérés eredménye jól modellezhető egy $N(m; 0,01)$ normális eloszlású valószínűségi változóval. Egymás után 15-ször, egymástól függetlenül megismétljük a mérést, és a következő értékeket kapjuk:
14,17; 14,13; 14,42; 13,97; 14,11; 14,2; 14,19; 14,17; 14,11; 14,27; 14,06; 14,15; 14,15; 14,24; 14,0.

Elfogadható-e 95%-os megbízhatósági szinten az a hipotézis, hogy $m = 14,15$?

