1. feladat (6+12=18 pont)
a) Milyen kapcsolat van a sorozatok korlátossága, monotonitása, illetve konvergenciája között?
b) Igazolja, hogy az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ rekurzióval definiált sorozat tagjaira teljesül, hogy $1 < a_n < 3$. Konvergens-e a sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Mo. *a*) Konvergens $\Longrightarrow$ korlátos
Monoton és korlátos $\Longrightarrow$ konvergens.
b) Teljes indukcióval $1 < a_1 < 3$, és
$1 < a_n < 3 \Rightarrow 1 = \sqrt{4 \cdot 1 - 3} < \sqrt{4a_n - 3} = a_{n+1} < \sqrt{4 \cdot 3 - 3} = 3$.
$a_2 = \sqrt{5} > 2 = a_1$, és $a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} < \sqrt{4a_{n+1} - 3} = a_{n+2}$.
A sorozat monoton nő és korlátos, így konvergens . A lehetséges határértékre teljesül, hogy $A = \sqrt{4A - 3}$, vagyis $A^2 - 4A + 3 = 0$, így $A = 1$ vagy $A = 3$, de mivel $a_n \geq 2$, így a sorozat határértéke 3 .

---

2. feladat (4+8 =12 pont)
a) Ismertesse Weierstrass II tételét.
b) Adja meg az $f(x) = (x^2 + 4x + 1)e^{-x}$ szélsőértékeit a $[0, 2]$ intervallumon.

Mo. *a*) Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát .
b) $f'(x) = (2x+4)e^{-x} - (x^2+4x+1)e^{-x} = e^{-x}(-x^2-2x+3) = 0$, ha $x = -3 \notin [0, 2]$ vagy $x = 1 \in [0, 2]$. $f(1) = \dfrac{6}{e} > f(2) = \dfrac{13}{e^2} > f(0) = 1$, tehát a minimum 1, a maximum $\dfrac{6}{e}$.

---

3. feladat (10 pont)
Számolja ki az $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\sin^3 x\right| \mathrm{d}x$ integrált.

Mo. $\displaystyle\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x(1 - \cos^2 x) \,\mathrm{d}x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$ így

$$\int_0^{2\pi} |\sin^3 x| \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin^3 x \,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

---

4. feladat (10 pont)

Oldja meg az $y' - \dfrac{3}{x}\, y = \dfrac{x^3}{1+4x^2}$ differenciálegyenletet.

Mo. A homogén egyenlet $y' = \dfrac{3}{x}\, y$ megoldása $y_h = cx^3$. Az inhomogén egyenlet $y_{ip} = c(x)x^3$ partikuláris megoldása, ahol $c'(x)x^3 = \dfrac{x^3}{1+4x^2}$, vagyis

$$c(x) = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{2} + c \qquad + c,$$

így $y = \dfrac{x^3 \operatorname{arctg}(2x)}{2} + cx^3$.

---

5. feladat (10+10=20 pont)

a) Mondja ki a majoráns- és minoránskritériumot, és igazolja az egyiket!

b) Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n^2+1} \cdot x^n$ függvénysor konvergenciatartományát!

Mo. *a*) Tétel , bizonyítás .

b) Mivel $1 \le \sqrt[n]{n^2+1} \le \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$, így:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{9^n}} = \frac{1}{9} \qquad .$$

$x = \dfrac{1}{9}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konvergens a majoráns-kritérium miatt, mert $\dfrac{1}{n^2+1} \le \dfrac{1}{n^2}$ és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens .

$x = -\dfrac{1}{9}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ konvergens a Leibniz-kritérium miatt (vagy az előző eset miatt látszik, hogy abszolút konvergens a sor, azaz konvergens is).

Így a konvergenciatartomány $\left[-\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{9}\right]$.

---

6. feladat (6+5+8=19 pont)
a) Számolja ki az $f(x,y) = xy\sin(2xy^2)$ függvény gradiensét, ahol létezik.
b) Mondja ki a Fubini-tételt téglán!
c) Számolja ki f integrálját az $1 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{\pi}$ halmazon!

Mo. *a*) $\operatorname{grad} f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) =$
$= (y\sin(2xy^2) + 2xy^3\cos(2xy^2), x\sin(2xy^2) + 4x^2y^2\cos(2xy^2))$

b) Analízis 2. jegyzet 3.128. Tétel

c) $\int\limits_1^2 \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} xy\sin(2xy^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[-\frac{1}{4}\cos(2xy^2)\right]_{y=0}^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}x =$

$$= \int\limits_1^2 \left(-\tfrac{1}{4}\cos(2\pi x) + \tfrac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8\pi}\sin 2\pi x + \frac{x}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4}.$$

---

7. feladat (11 pont)
Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in [0,3] \\ -2, & \text{ha } x \in [-3,0] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Számolja ki az $f * f$ függvény Fourier-transzformáltját!

Mo. $(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = -4i\int_0^3 \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = 4i \cdot \dfrac{\cos(3\omega) - 1}{\omega}$

$\mathcal{F}(f * f) = (\mathcal{F}f)^2 = -16 \cdot \dfrac{(\cos(3\omega) - 1)^2}{\omega^2}$
