ANALÍZIS 2.	**I. Zárthelyi**	**2019. március 12.**
Mérnökinformatikus szak	β-variáns	Megoldások

1. feladat (13+4+3=20 pont)

$$y' = \frac{y^2-4}{x^2+9}.$$

a) Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

b) Oldja meg az $y(3) = -2$, illetve az $y(3) = 1$ kezdetiérték problémákat!

c) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = x$ egyenessel? Rajzoljon be a koordinátarendszerbe egy vonalelemet, amely párhuzamos az adott egyenessel!

---

a) $y \equiv \pm -2$ megoldás. Ha $y \neq \pm 2$:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y^2-4}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2+9}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\mathrm{d}x$$

Innen a megoldás: $\frac{1}{4}\left(\ln|y-2| - \ln|y+2|\right) = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$

b) A partikuláris megoldások: $y(2) = -2$: $y \equiv -2$

$$y(3) = 1 : \quad \frac{\ln 1 - \ln 3}{4} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{3} + C \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{\ln 3}{4} - \frac{\pi}{12},$$

tehát a megoldás: $\dfrac{\ln(2-y) - \ln(y+2)}{4} = \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} - \dfrac{\ln 3}{4} - \dfrac{\pi}{12}$

c) Az 1-hez tartozó izoklina egyenletét keressük. Ennek egyenlete $(y^2-4)/(x^2+9) = 1$. Ezután meg kell adni egy 1 meredekségű vonalelemet egy olyan ponthoz, amely az izoklinára esik.

---

2. feladat (18 pont)
Vezesse be az $u = y^2$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az általános megoldást:

$$2yy' + \frac{2}{x}y^2 = 3x^3$$

$u' = 2\,y\,y'$. Behelyettesítve: $u' + \frac{2}{x}u = 3x^3$ lineáris elsőrendű DE.
A homogén egyenlet megoldása $u \equiv 0$, és $\ln|u| = -2\ln|x|$, összesítve $u_h =$

$\frac{c}{x^2}$.

Az inhomogén egyenlet megoldása $u_{iá} = \frac{c(x)}{x^2}$, ahol $3x^3 = \frac{c'(x)}{x^2}$, így $c(x) = \frac{3}{6}x^6$, teát $u_{iá} = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{2}x^4$

Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása: $y^2 = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{2}x^4$.

---

3. feladat (20 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''' + 4y'' + 8y' = 15\,x\,\mathrm{e}^{-x} + 4$$

A $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $0, -2 \pm 2i$, tehát $y_h = c_1 + e^{-2x}(c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x))$. Az inhomogén egyenlet megoldásait a külső rezonancia miatt $y_{ip} = Ax + (Bx + C)e^{-x}$ alakban keressük. Ekkor

$$\begin{array}{rl} 8\cdot | & y'_{ip} := A + (-Bx + B - C)e^{-x} \\ 4\cdot | & y''_{ip} = (Bx + C - 2B)e^{-x} \\ 1\cdot | & y'''_{ip} = (-Bx + 3B - C)e^{-x} \end{array}$$

$8A = 4$, $15 = -8B + 4B - B = -5B$, $0 = 8B - 8C + 4C - 8B + 3B - C$, tehát $B = -3$, $C = -\frac{9}{5}$, így az általános megoldás:

$$y = y_{ip} + y_h = \frac{x}{2} - 3xe^{-x} - \frac{9e^{-x}}{5} + c_1 + e^{-2x}(c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x))$$

---

4. feladat (16+8=24 pont)

Abszolút vagy feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{3n^2+5n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt[n]{\frac{n+3}{3n^2+5n}}$$

Konvergencia esetén adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára.

---

a) $\left|(-1)^{n+1}\frac{n+3}{3n^2+5n}\right| = \frac{n+3}{3n^2+5n} \geq \frac{n}{3n^2+5n^2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{n}$. A $\sum\frac{1}{n}$ sor divergens, a minoráns-kritérium miatt a sor nem abszolút konvergens.

$$0 \leq \frac{n+3}{3n^2+5n} = a_n = \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{5}{n}} \to 0.$$

Ugyanakkor $a_n = \dfrac{n+3}{3n^2+5n} \geq \dfrac{n+4}{3(n+1)^2+5(n+1)} = a_{n+1}$, ha

$$3n^3+20n^2+41n+24 = (n+3)(3n^2+11n+8) \geq (n+4)(3n^2+5n) = 3n^3+17n^2+20n,$$

ami teljesül, hiszen $3n^2+21n+24 \geq 0$. A sor tehát Leibniz-sor, vagyis konvergens, vagyis feltételesen konvergens.

A hibabecsléshez: $|s - s_{100}| \leq a_{n+1} = \dfrac{104}{3 \cdot 101^2 + 505}$.

b) $1 \leftarrow \sqrt[n]{\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}} \leq \sqrt[n]{\dfrac{n}{3n^2+5n^2}} \leq \sqrt[n]{\dfrac{n+3}{3n^2+5n}} \leq \sqrt[n]{\dfrac{n+3n}{3n^2}} = \sqrt[n]{\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}} \to 1,$

tehát az általános tag nem tart 0-hoz, így a sor divergens (elég az alsó becslés is).

---

5. feladat (5+13=18 pont)

a) Ismertesse a gyökkritérium valamelyik alakját!

b) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7+n^2}{6+n^2}\right)^{n^3} \cdot \frac{n^3}{2^{3n-1}}$ sor?

---

a) Itt az Analízis 1 jegyzet 64-65. oldalain található tételek valamelyikét kell leírni.

b) $a_n = \left(\dfrac{7+n^2}{6+n^2}\right)^{n^3} \cdot \dfrac{n^3}{2^{3n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{7}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{6}{n^2}\right)^{n^2}} \; \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \cdot \sqrt[n]{2}}{8} \right) = \frac{e^7}{e^6}\,\frac{1^3 \cdot 1}{8} = \frac{e}{8} < 1$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

IMSC feladat (15 IMSC pont)

Egy ejtőernyős tömege az ernyővel együtt 80 kg. Az ejtőernyős leszállásánál (kezdősebessége nulla) a levegő ellenállása négyzetesen arányos a mozgás v sebességével (az arányossági tényező: $k = 400$). Határozzuk meg a leereszkedés sebességét az idő függvényeként, és állapítsuk meg a leereszkedés maximális sebességét! ($g = 10m/s^2$)

Newton második törvényét alkalmazzuk: $ma = F = mg - kv^2$. Jelölje $v(x)$ az ejtőernyős sebességét az x idő függvényében. Azaz a megoldandó kezdetiértékfeladat

$$mv' = mg - kv^2, \quad y(0) = 0.$$

Itt m-mel való osztás és behelyettesítés után az

$$v' = 5(2 - v^2)$$

differenciálegyenlethez jutunk, ami egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. $0 \le v < \sqrt{2}$ (a kezdeti feltétel miatt ezt az esetet kell vizsgálni) esetén

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arth}(v/\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-(v/\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}v = \int \frac{1}{2-v^2}\,\mathrm{d}v = 5x + C\ .$$

Innét látható, hogy a kezdeti feltétel teljesítéséhez $C = 0$ a jó választás. Azaz a sebességet a

$$v(x) = \sqrt{2}\,\operatorname{th}(\sqrt{50}x)$$

függvény írja le. Ez pedig mutatja, hogy az ejtőernyős sebessége nem lesz soha $\sqrt{2}$-nél nagyobb, mivel $v(x) \to \sqrt{2}-$, ha $x \to \infty$.

(A bal oldali integrál parciális törtekre bontással is integrálható:

$$\int \frac{1}{2-v^2}\,\mathrm{d}v = \int \left(\frac{1/(2\sqrt{2})}{\sqrt{2}-v} + \frac{1/(2\sqrt{2})}{\sqrt{2}+v}\right)\mathrm{d}v = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v} = 5x.$$

A sebességfüggvényre

$$v(x) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{2}{e^{10\sqrt{2}x}+1}\right)$$

függvény adódik (ugyanaz, mint a korábbi, csak más alakban). Innét a megoldás ugyanaz, mint korábban.)