0. tétel

Univerzális állandók

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ fénysebesség vákuumban (⇐ méter definíciójából jön)

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \left[= \frac{H}{m}\right]$ vákuum permeabilitása (⇐ Amper def.-ből jön)

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \left[= \frac{F}{m}\right]$ vákuum permittivitása (⇐ EM-ság tan egyposztulátuma)
$\left(= \frac{1}{\mu_0 c^2}\right)$

$Z_{0,0} = 120\pi\ \Omega = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ vákuum hullámimpedanciája

Vektoranalízis

$\varphi = \varphi(r)$ skalárfgv.
$v = v(r)$ vektorfgv.

← logikailag ez a sorrend

1\. gradiens def: $\int_{r_1}^{r_2} \text{grad}\, \varphi(\bar{r})\, d\bar{l} = \varphi(\bar{r}_2) - \varphi(\bar{r}_1)$ } grad: skalár művelet (φ)

3\. divergencia def: $\int_V \text{div}\, \bar{v}\, dV = \oint_A \bar{v}\, d\bar{A}$ Gauss-Osztrogradszkij tétele

2\. rotáció def: $\int_A \text{rot}\, \bar{v}\, d\bar{A} = \oint_l \bar{v}\, dl$ Stokes-tétele

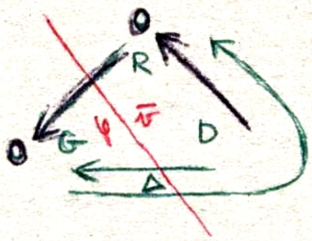
} div, rot: vektor művelet ($\bar{v}$)

(kapcsolatok: pont $\xleftrightarrow{\text{GRAD}}$ vonal (l) $\xleftrightarrow{\text{ROT}}$ felület (A) $\xleftrightarrow{\text{DIV}}$ térfogat (V))

ismételt műveletek

$\text{rot}\,\text{grad}\, \varphi = 0$
$\text{div}\,\text{rot}\, \bar{v} = 0$
$\text{div}\,\text{grad}\, \varphi = \Delta \varphi$
$\text{grad}\,\text{div}\, \bar{v} - \text{rot}\,\text{rot}\, \bar{v} = \Delta \bar{v}$

} Δ: Laplace-operátor



derékszögű Descartes-ben

$\text{grad}\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial y}{\partial z} \bar{e}_z$

$\text{div}\, \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

$\text{rot}\, \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

$\Delta \varphi = \text{div}\,\text{grad}\, \varphi =$
$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

$\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$

$\Delta v_y = \ldots$

$\Delta v_z = \ldots$

1. Az elektromágneses tér forrásmennyiségei és a köztük lévő kapcsolat

elektromos töltés : a kvantáltság figyelmen kívül hagyható, mivel már pC nagyságú töltésben is rengeteg részecske (elektron/proton) található. (mivel az elemi töltés nagysága $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C)

Tapasztalati Coulomb tv: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{|Q_1 Q_2|}{r_{12}^2}$

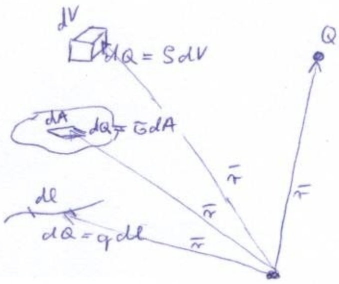
Töltésmodellek:

pontszerű: Q [C = As]

térfogati töltéssűrűség: $\rho(\bar{r},t) = \lim\limits_{dV \to 0} \frac{dQ}{dV}$ $\left[\frac{C}{m^3}\right]$

felületi —"—: $\sigma(\bar{r},t) = \lim\limits_{dA \to 0} \frac{dQ}{dA}$ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$

vonalmenti —"—: $q(\bar{r},t) = \lim\limits_{dl \to 0} \frac{dQ}{dl}$ $\left[\frac{C}{m}\right]$



⇒ össztöltés: $\boxed{Q = \int_V \rho(\bar{r},t) dV} + \int_A \sigma(\bar{r},t) dA + \int_l q(\bar{r},t) dl + \sum_k Q_k$

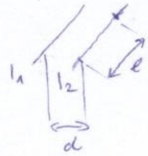
ha csak ezzel számolunk, akkor úgy vesszük, hogy ρ tartalmazhat Dirac impulzust is.

pl: $\rho(x,y,z) = \sigma(x,y) \cdot \delta(z)$

elektromos áram : a technikai felfogás a töltéstől fgtl. mennyiségként értelmezi.

(valójában: $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ [A])

Tapasztalati Ampère tv: $F = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{|I_1 \cdot I_2| \cdot l}{d}$



Árammodellek:

vonalszerű: I [A]

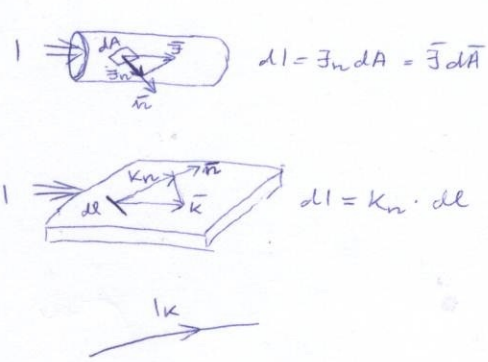
áramsűrűség: $\bar{J} = \bar{J}(\bar{r},t)$ $\left[\frac{A}{m^2}\right]$ $\quad J_n = \lim\limits_{dA \to 0} \frac{dI}{dA}$

J_n: $\bar{J}$-nek $\bar{n}$ irányú vetülete, ahol $\bar{n}$ az A felületnormálisa.

vonalmenti áramsűrűség: $\bar{K} = \bar{K}(\bar{r},t)$ $\left[\frac{A}{m}\right]$ $\quad K_n = \lim\limits_{dl \to 0} \frac{dI}{dl}$

⇒ $\boxed{I = \int_A \bar{J}(\bar{r},t) d\bar{A}} + \int_l \bar{K}(\bar{r},t) \cdot \bar{n} \, dl + \sum_k I_k$

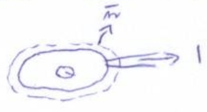
ha csak ezt használjuk...



Töltés és áram kapcsolata

I. ha egy V térfogatban Q töltés van és a V-t körülzáró A felületen összesen I áram folyik ki, akkor

(1.) $\boxed{I = -\frac{\partial Q}{\partial t}}$



$$\oint_A \bar{J}\, d\bar{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varrho\, dV \Rightarrow \underbrace{\oint_A \bar{J}\, dA}_{G-O.} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \varrho\, dV = 0$$

$$\int_V \mathrm{div}\,\bar{J}\, dV + \int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, dV = 0$$

összevonva

$$\int_V \left(\mathrm{div}\,\bar{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) dV = 0$$

→ bármely térfogatra teljesülnie kell, ⇒ ezért az integrandus is 0.

(2.) $\boxed{\mathrm{div}\,\bar{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0}$ **folytonossági egyenlet** (diff alak)
(ennek az integrális alakja volt (1.))

→ ebből következik a **töltésmegmaradás elve**.

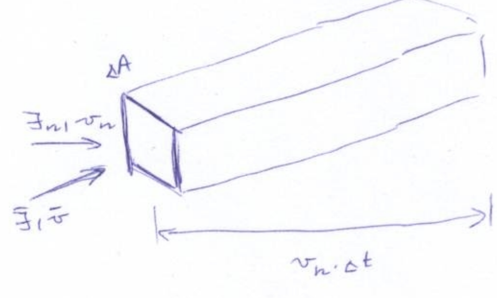
II. v sebességgel mozgó töltések által létrehozott áram = ?

ΔA felületen Δt idő alatt átáramló töltés → hasáb térfogata $= \Delta A\, v_n\, \Delta t$

→ az áramsűrűség normális összetevője:

$$J_n = \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{\Delta Q/\Delta t}{\Delta A} = \frac{(\varrho \cdot \Delta A \cdot v_n \cdot \Delta t)/\Delta t}{\Delta A} = \varrho \cdot v_n$$

→ $\boxed{\bar{J} = \varrho \cdot \bar{v}}$



2. Az elektromágneses tér intenzitás vektorai és a köztük lévő kapcsolat

Coulomb tv. } csak spec. feltételek mellett
Ampère tv. } mellettalk. ⇒ EMT bevezetése ⇒

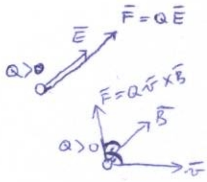
töltések, áramok $\xrightarrow{\text{létrehozzák}}$ EMT ; EMT $\xrightarrow{\text{erőt fejt ki rájuk}}$ töltések, áramok

EMT : - erőhatás közvetítője
- energia hordozója
- teljesítmény közvetítője

EMT jellemzésére : térintenzitás vektorok

$\bar{E} = \bar{E}(\bar{r},t)$ el. térint. = el. térerősség vektor

$\bar{B} = \bar{B}(\bar{r},t)$ mágn. térint. = mágn. indukció vektor (= mágn. fluxussűrűség)



definiálásuk : kis Q el. töltésre ható erő ↗ ha nyugvó : $\bar{F} = Q\bar{E}$ $E = \left[\frac{V}{m}\right]$

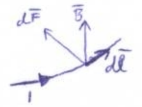
↘ ha mozog : $\bar{F} = Q\bar{v}\times\bar{B}$ $B = [T] = \left[\frac{Wb}{m^2}\right]$

ha Kétféle erőtér fellép :

$$\boxed{\bar{F} = Q(\bar{E} + \bar{v}\times\bar{B})}$$

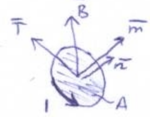
Lorentz-tv.

⟶ levezethető áramra is (áramelemre ható erő) : $d\bar{F} = dQ\,\bar{v}\times\bar{B} = dQ\cdot\frac{d\bar{l}}{dt}\times\bar{B} = \boxed{I\,d\bar{l}\times\bar{B}}$



körárамra ható erőnyomaték : $\bar{T} = \bar{m}\times\bar{B} = \boxed{I\cdot A\,\bar{n}\times\bar{B}}$

(köráram momentuma: $\bar{m} = I\cdot A\cdot\bar{n}$)



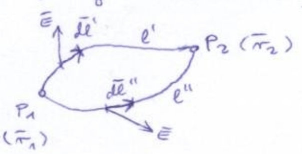
Az EMT-t jellemző integrális mennyiségek (az intenzitás vektorokhoz egy tartományra jellemző skaláris mennyiséget rendelünk)

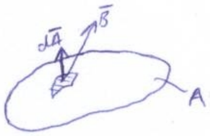
$\boxed{U = \int_l \bar{E}\,d\bar{l}}$ $U = U(t)$ [V] el. feszültség

$\boxed{\Phi = \int_A \bar{B}\,d\bar{A}}$ $\Phi = \Phi(t)$ [Wb] mágn. fluxus

(vezetőált. kifeszített felület fluxusa : Ψ)

// tekercsnél a fluxus: Ψ: tekercsé
Φ: egy meneté //





energetikai tartalmuk :

feszültség :

EMT által végzett munka: $\boxed{W_{12} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}\bar{F}\,d\bar{l} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} Q\bar{E}\,d\bar{l} = Q\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}\bar{E}\,d\bar{l} = Q\,U_{12}}$ a munka a töltéssel arányos, az arányossági tényező a fesz.

spec : időben állandó mágn. tér esetén (adott térrészben) : $\boxed{\oint_l \bar{E}\,d\bar{l} = 0}$ ⟶ akkor $U' - U'' = \underset{(l')}{\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}}\bar{E}\,d\bar{l}' - \underset{(l'')}{\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}}\bar{E}\,d\bar{l}'' = \underset{(l')}{\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2}}\bar{E}\,d\bar{l}' + \underset{(l'')}{\int_{\bar{r}_2}^{\bar{r}_1}}\bar{E}\,d\bar{l}'' = \oint_{l_0}\bar{E}\,d\bar{l} = 0$

⇒ $\underline{\underline{U' \equiv U''}}$

potenciál fogalma :

legyen $P_0(\bar{r}_0)$ rögzített és $W(\bar{r}_0) = 0$ ⟶ $W_{(\bar{r}\to\bar{r}_0)} = W(\bar{r}) = Q\int_{\bar{r}}^{\bar{r}_0}\bar{E}\,d\bar{l} = Q\cdot\varphi(\bar{r})$

⟶ tehát $\varphi = \boxed{\varphi(\bar{r}) = \int_{\bar{r}}^{\bar{r}_0}\bar{E}\,d\bar{l}}$ (ha $\oint_{l_0}\bar{E}\,d\bar{l} = 0$!!!)

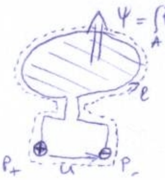
így a fesz : $\boxed{U_{12} = \varphi(\bar{r}_1) - \varphi(\bar{r}_2)}$

fluxus (1.2.-2.3. ⟶ szerintem nem kell)

Intenzitásvektorok közötti kapcsolat

el. feszültségre és magn. fluxusra vonatkozó tapasztalati törvények:

Faraday-féle indukció tv. $\boxed{U_0 = -\dfrac{d\Psi}{dt}}$



$$U \approx U_0 = \oint_l \bar{E}\,d\bar{l} \approx \int_{P_+}^{P^-} \bar{E}\,d\bar{l}$$

„fluxusmegmaradás" tv. $\boxed{\Psi_0 = 0}$

(zárt felület fluxusa 0)

$$\Psi_0 = \Psi_+ - \Psi_- = \oint_A \bar{B}\,d\bar{A}$$

térintenzitásokkal:

$$\oint_l \bar{E}\,d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \bar{B}\,d\bar{A} \qquad \oint_A \bar{B}\,d\bar{A} = 0$$

Stokes $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ G-O.

$$\int_A \mathrm{rot}\,\bar{E}\,d\bar{A} = -\int_A \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\,d\bar{A} \qquad \int_V \mathrm{div}\,\bar{B}\,dV = 0$$

Mivel tetszőleges A-ra és V-re érvényes, ezért:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{\mathrm{div}\,\bar{B} = 0}$$

Maxwell II. $\qquad$ Maxwell III.

kapcsolat:

$\Rightarrow \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0 \rightsquigarrow \mathrm{div}\left(-\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = 0 \rightsquigarrow -\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\bar{B} = 0 \longrightarrow$ div B csak a hely fgv.-e lehet (időben áll.)

$\uparrow$

$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{v} = 0$

/lásd 0. tétel/

$\rightarrow$ ezt a helyfüggést konkretizálja a $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$ egyenlet

5. Az elektromágneses tér gerjesztettségi vektorai és a köztük levő kapcsolat

kérdés: Mi a kapcsolat a gerjesztőmennyiségek (Q, I) és a térintenzitások (E, B) között?

tapasztalati tv.-ek: (ha a közeg homogén, izotróp, lineáris)

el. Gauss. tv: $\oint_A \bar{E}\, d\bar{A} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot Q$ ált. gerjesztési tv: $\oint_\ell \bar{B}\, d\bar{\ell} = \mu(I + I_D)$; $I_D = \varepsilon \int_A \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\, d\bar{A}$ (eltolási áram)

→ ha nem homogén ($\varepsilon(\bar{r}), \mu(\bar{r})$)

$\oint_A \varepsilon \bar{E}\, d\bar{A} = Q$ $\oint_\ell \frac{1}{\mu} \bar{B}\, d\bar{\ell} = I + I_D$ $I_D = \int_A \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\, d\bar{A}$

új mennyiségek bevezetése:

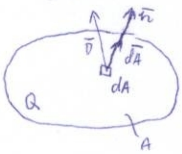
$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ el. eltolás [C/m²]

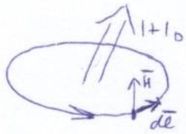
$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \bar{B}$ mágn. térerősség [A/m]

} gerjesztettségi vektorok

$\bar{J}_D = \frac{\varepsilon \partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ eltolási áram-sűrűség [A/m²]

$\oint_A \bar{D}\, d\bar{A} = Q$ $\oint_\ell \bar{H}\, d\bar{\ell} = I + I_D$ $I_D = \int_A \bar{J}_D\, d\bar{A}$





helyettesítsük a gerj. mennyiségek integrális kifejezését!

$\oint_A \bar{D}\, d\bar{A} = \int_V \varrho\, dV$ $\oint_\ell \bar{H}\, d\bar{\ell} = \int_A \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\bar{A}$

G.-O. Stokes

$\int_V \mathrm{div}\, \bar{D}\, dV = \int_V \varrho\, dV$ $\int_A \mathrm{rot}\, \bar{H}\, d\bar{A} = \int_A \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\bar{A}$

ezek igazak tetszőleges V-re és A-ra, ezért

$\boxed{\mathrm{div}\, \bar{D} = \varrho}$ $\boxed{\mathrm{rot}\, \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}}$ } ezek a fentinél általánosabb def.-k D-re és H-ra

Maxwell IV. **Maxwell I.**

fogalmilag tisztább lenne így felírni: $\mathrm{rot}\, \bar{H} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J}$

, de az elterjedt felfogás szerint a mágn. teret a

$\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J} + \bar{J}_D = \bar{J}_T$ gerjeszti, azaz a totális áram-sűrűség

→ ezt felhasználva: $\mathrm{rot}\, \bar{H} = \bar{J}_T$

$\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \bar{H} = \mathrm{div}\, \bar{J}_T$

$0 = \mathrm{div}\, \bar{J}_T$ → $\bar{J}_T$ forrásmentes

Mivel $\mathrm{div}\, \bar{J}_T = 0$ → $\mathrm{div}\, \bar{J} + \mathrm{div} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$ $\xrightarrow[\mathrm{div}\bar{D} = \varrho]{(\text{Max. IV.})}$ $\mathrm{div}\, \bar{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

Megkaptuk az 1. tételben már leírt folytonossági egyenletet

4. Folytonossági és peremfeltételek.

Ha a közeg nem homogén (pl. 2 önmagában homogén közegből áll)

→ az egyes közegekben külön megoldjuk a Max. egyenleteket

→ a 2 közeg határára ⇒ folytonossági feltételek

(ha az adott közeg határán túl az erőteret nem akarjuk számítani

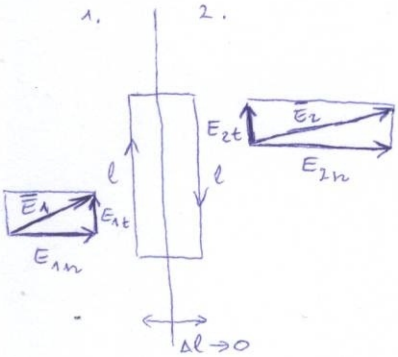
⇒ peremfeltételek)

(határfeltételek ↗ folytonossági, ↘ perem)

határfeltételek levezetése: Max. egyenletek integrális alakjából

(a felület két oldalán elhelyezkedő zárt görbére/felületre alkalmazva)

el. térerősség (E)



Max II: $\oint_l \bar E d\bar l = -\int_A \frac{\partial \bar B}{\partial t} d\bar A$

a zárt görbe mérete kicsi, ezért

$\int \bar E dl = E_t \cdot l$

$$E_{1t}\cdot l - E_{2t}\cdot l = -\underbrace{\underbrace{\frac{\partial B_m}{\partial t}}_{\text{korlátos}} \cdot \overbrace{l\cdot\Delta l}^{dA}}_{\text{0-hoz tart}} \Rightarrow$$

$l \cdot \Delta l \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_{2t} = E_{1t}} \quad (1.)$$

spec. eset: 1. közeg id. vezető ($\sigma_1 = \infty$) → $E_1 = J_1/\sigma_1 = 0$

→ 2. közegben (szigetelő): $\boxed{E_t = 0 \text{ (id. vez. felületén)}}$

⇕

$\bar E$ merőleges az id. vez. felületére

magn. térerősség (H)

(hasonló ábra)

Max I: $\oint_l \bar H d\bar l = \int_A (\bar J + \frac{\partial \bar D}{\partial t}) d\bar A$

$$\underbrace{H_{1t} l - H_{2t} l = J_m \cdot \overbrace{l\cdot\Delta l}^{dA} + \underbrace{\frac{\partial D_m}{\partial t}}_{\text{korlátos}} \cdot \overbrace{l\cdot\Delta l}^{dA} + K_m \cdot l}_{0}$$

$l\cdot\Delta l \to 0$, $l\cdot\Delta l \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{H_{2t} = H_{1t} - K_m} \quad (2)$$

K: határfelületen esetlegesen fellépő felületi áramsűrűség

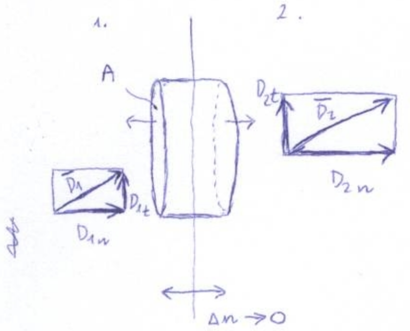
spec. eset: 1. közeg ferromágneses ($\mu_{r1} \gg 1$) → $H_1 = B_1/\mu_1 = 0$

→ $\boxed{H_t = 0, \text{ ha } K_m = 0 \text{ nagy permeabilitású közeg felületén}}$

⇕

$\bar H$ (és $\bar B$ is) merőleges a nagy perm. közeg felületére

el. eltolás (D)



Max IV: $\oint_A \bar D d\bar A = \overbrace{\int_V \varrho dV}^{Q}$ $\Big\}$ $-D_{1n}\cdot A + D_{2n}\cdot A = \varrho\cdot \overbrace{A\cdot\Delta n}^{dV} + \sigma\cdot A$ $\Rightarrow$

($A\cdot\Delta n \to 0$, $\varrho\cdot A\cdot\Delta n \to 0$; σ: esetleges felületi töltéssűrűség az elválasztó felületen)

$\Rightarrow \boxed{D_{2n} = D_{1n} + \sigma}$ (3.)

spec. eset: 1. közeg id. vez. $(\sigma_1 = \infty) \to E_1 = 0$ $(= J_1/\sigma_1)$ $\to D_1 = 0$ $(=\varepsilon \bar E)$

$\to$ 2. közegben $(\varepsilon_2 = \varepsilon)$:

$D_n = \sigma$; $E_n = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$ id. vez. felületen

mágn. indukció

Max. III.: $\oint_A \bar B d\bar A = 0$ $\Big\}$ ... analóg módon ... $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{B_{2n} = B_{1n}}$ (4.)

áramsűrűség

folytonossági e.: $\oint_A \bar J d\bar A = -\dfrac{dQ}{dt}$ $\Big\}$ ... analóg módon ... $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{J_{2n} = J_{1n} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}}$ (5.)

ha időben változó felületi töltéssűrűség van a felületen

(megj.: $\bar J_T = \bar J + \dfrac{\partial \bar D}{\partial t}$ (lásd 3. tétel) $\Rightarrow$ (3.) és (5.) képletből $\to$ $J_{Tn1} = J_{Tn2}$)

spec. eset.: ha 1. közeg id. szigetelő $\to$

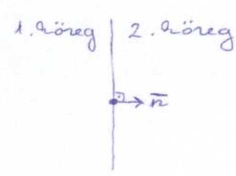
$\to$ 2. közegben az időben állandó áramsűrűség normális komponense 0. $J_n = 0$ id. szigetelő felületen

folytonossági feltételek vektoriális alakja:

$\bar n \times (\bar E_2 - \bar E_1) = 0$ $\qquad$ $\bar n \cdot (\bar D_2 - \bar D_1) = \sigma$

$\bar n \times (\bar H_2 - \bar H_1) = \bar K$ $\qquad$ $\bar n \cdot (\bar B_2 - \bar B_1) = 0$

$\bar n \cdot (\bar J_2 - \bar J_1) = -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}$



$\bar m = \bar t \times \bar n$

$|\bar m| = |\bar t| = |\bar n| = 1$

5. A Maxwell egyenletek integrális és differenciális alakja

I. Általános gerjesztési törvény
(eltolási árammal kiegészített)

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}}$$

$$\oint_l \bar{H}\,d\bar{l} = \int_A \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) dA$$

II. Faraday féle indukció törvény

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

$$\oint_l \bar{E}\,d\bar{l} = -\int_A \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\,d\bar{A}$$

III. Mágneses Gauss-tv. („fluxusmegmaradás")

$$\boxed{\mathrm{div}\,\bar{B} = 0}$$

$$\oint_A \bar{B}\,d\bar{A} = 0$$

IV. (Elektromos) Gauss-tv.

$$\boxed{\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho}$$

$$\oint_A \bar{D}\,d\bar{A} = \int_V \rho\,dV$$

V. Közeg jellemző törvények

mágneses indukció def.

$$\boxed{\bar{B} = \mu\,\bar{H}}$$

elektromos eltolás def.

$$\boxed{\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}}$$

differenciális Ohm.-tv.

$$\boxed{\bar{J} = \sigma\,(\bar{E} + \bar{E}_b)}$$

($\bar{E}_b$: beiktatott térerősség /pl. ák.-ben fesz forrásból származó/)

VI. Energia : $\boxed{w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2}$

- $\left.\begin{array}{l}\text{div (Max. I.)}\\ \text{Max. IV.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ folytonossági egyenlet : (lásd: 3. tétel vége)

$$\boxed{\mathrm{div}\,\bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

$$\oint_A \bar{J}\,d\bar{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

} (mivel div rot $\bar{v} = 0$ (lásd: 0. tétel))

- div (Max II.) $\Rightarrow$ Max III. jobb oldala nem függhet az időtől (lásd: 2. tétel vége)

Átváltás a diff. és int. alakok között!

- Gauss-Osztrogradszkij tétel (div. def.)
- Stokes-tétel (rot. def)

} (lásd: 0. tétel)

szinuszos gerjesztés esetén a differenciális alakok:

I. $\mathrm{rot}\,\bar{H}(\bar{r}) = \bar{J}(\bar{r}) + j\omega\bar{D}(\bar{r})$ II. $\mathrm{rot}\,\bar{E}(\bar{r}) = -j\omega\bar{B}(\bar{r})$

III. $\mathrm{div}\,\bar{B}(\bar{r}) = 0$ IV. $\mathrm{div}\,\bar{D}(\bar{r}) = \varrho(\bar{r})$

Kis értelmezés:

div: megadja valaminek a forrását. Tehát pl. $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0 \Rightarrow$ a mágneses vektortér forrásmentes, az erővonalak kiindulási és végpontjai megegyeznek. Nincs mágneses monopólus.

De pl. $\mathrm{div}\,\bar{D} = \varrho \Rightarrow$ az elektromos erőtér forrása a töltés.

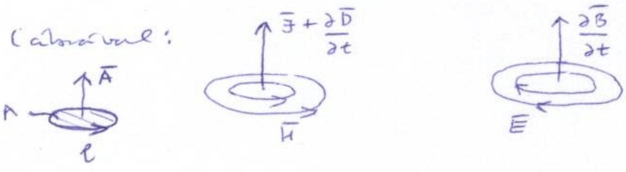
rot: megadja az örvényességet, jobbsodrású rendszert határoz meg.

pl. $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \Rightarrow$ az áramsűrűség iránya olyan, hogy jobbcsavar szerinti örvényes mágneses teret hoz létre

de pl. $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \Rightarrow$ az indukcióvektor időbeli megváltozásának iránya olyan, hogy jobbcsavar szerinti iránnyal ellentétes irányú örvényes elektromos teret hoz létre. (ez a – jelből látszik)

Másrészt ebből a képletből az is látszik, hogy ha $\bar{B}$ időben állandó (∂ (pl. 0)) akkor az el. tér örvénymentes (pl. elektrosztatika, stacionárius áramlás).

(ábrával:



)

Maxwell egyenletek rendszere – ellentmondásmentes
– teljes

érvényesek: - időben állandó folyamatokra (elektrosztat., magnetosztat.) egyenáram el/mágn. tere, egyenáramú hálózatok)

- lassan változó folyamatokra (hangfrekvenciás technika, erősáramú technika, villamos hálózatok)
- gyorsan változó folyamatokra (rádióhullámok, mikrohullámú technika)
- hőhullámok, optika, röntgensugárzás ...

mi szab határt? ⇒ kvantumos hatások

csak akkor alkalmazhatóak, ha a töltések jóval nagyobbak az elemi töltésnél

$|Q_i| >> e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$

és az energia jóval nagyobb a frekihez tartozó energiakvantumnál

$E >> h \cdot f$; $h = 6{,}4 \cdot 10^{-36}\,Js$ (Planck állandó)

→ ha ezek nem teljesülnek ⇒ kvantumelektrodinamikához kell fordulnunk :)

6. Az elektrodinamika felosztása.

→ speciális esetekben a Max. egyenletek egyszerűbb alakot öltenek

Időben állandó EMT ($\partial/\partial t = 0$)

I. töltések sem mozognak → áram sem folyik ($\bar{J} = 0$)

Elektrosztatika: $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{D} = \varrho$ $\quad$ $\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}$

Magnetosztatika: $\mathrm{rot}\,\bar{H} = 0$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$ $\quad$ $\bar{B} = \mu \bar{H}$

II. töltések mozognak → állandó áram folyik ($\bar{J} \neq 0$)

Stacionárius áramlás: $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{J} = 0^{(*)}$ $\quad$ $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b)$ $\Big\}$ arra az esetre vonatkozva, ha a töltéssűrűség és a konvektív áramsűrűség 0.

Stacionárius mágneses tér: $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$ $\quad$ $\bar{B} = \mu \bar{H}$

/ *: div (Max. I.) - ből adódik /

Kvázistacionárius közelítés

($\partial/\partial t \neq 0$, de $\left|\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right| \ll |\bar{J}|$ azaz az eltolási áramsűrűség elhanyagolható a vezetési áramsűrűség mellett)

$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$ $\quad$ $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{D} = \varrho$

$\bar{B} = \mu \bar{H}$ $\quad$ $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$

$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b)$

/ Mikor élhetünk kvázistac. közelítéssel?

ha $\frac{\partial}{\partial t}$ szinuszos, akkor $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = j\omega \cdot \varepsilon \bar{E}$, $\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}$

→ ebben az esetben akkor hanyagolható el $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, ha

$\omega \varepsilon \ll \sigma \rightarrow \omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow f \ll \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}$

(ez igaz pl. fém belsejében)

Általános eset

= EM hullámok egyenletei

(lásd: Maxwell egyenletek (5. tétel))

– a fenti esetekben úgy vettem, hogy ε, μ, σ értelmezett.

ha nem, akkor pl. $\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M})$ $\quad$ $\bar{M}$: mágnesezettség

$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$ $\quad$ $\bar{P}$: elektromos polarizáció

7. Az elektromágneses térben az energiasűrűségre és az energiaáramlásra vonatkozó összefüggések.

$W = W(t)$: V térfogatban felhalmozódott EM energia

↓

mitől változhat? $P = P(t)$: térfogatban fellépő folyamatok (pl. kondi kisül egy ellenálláson ($P>0$) → W csökken (hővé alakul)
kondit feltölt egy aksi ($P<0$) → W nő)

$P_s = P_s(t)$: V térfogatot határoló A felületen átáramló/átsugárzott energia

($P_s > 0$ → W csökken
$P_s < 0$ → W nő } pl. vezetékpáron betáplált/elvezetett teljesítmény)

⇒ energiamérleg : $\boxed{\dfrac{dW}{dt} + P + P_s = 0}$

írjuk fel ezeket sűrűség jellegű mennyiségekkel ⇒ $\boxed{W = \int_V w\, dV}$, ahol $w = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta V}$ $\quad w = w(\bar{r}, t)$ energiasűrűség $\left[\dfrac{J}{m^3}\right]$

$\boxed{P = \int_V p\, dV}$, ahol $p = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta P}{\Delta V}$ $\quad p = p(\bar{r}, t)$ teljesítménysűrűség $\left[\dfrac{W}{m^3}\right]$

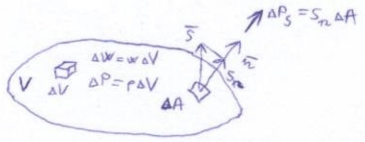
$\boxed{P_s = \oint_A \bar{S}\, d\bar{A}}$, ahol $S_n = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta P_s}{\Delta A}$ $\quad \bar{S} = \bar{S}(\bar{r}, t)$ teljesítmény-áram sűrűség $\left[\dfrac{W}{m^2}\right]$
= Poynting-vektor

$\downarrow$ G.-O.

$\int_V \mathrm{div}\, \bar{S}\, dV$

⇒ energiamérleg (mivel minden V-re igaz, így az integrál elhagyható)

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + p + \mathrm{div}\, \bar{S} = 0}$$



Hogy írható ez fel az EMT jellemzőivel?

Max I.: $\mathrm{rot}\, \bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $\quad / \cdot \bar{E}$

Max II.: $\mathrm{rot}\, \bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ $\quad / \cdot (-\bar{H})$

$\xrightarrow{+}$ $\bar{E}\, \mathrm{rot}\, \bar{H} - \bar{H}\, \mathrm{rot}\, \bar{E} = \bar{E} \cdot \bar{J} + \bar{E} \cdot \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ $\xRightarrow{\text{0-ra rendezve}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{H}\, \mathrm{rot}\, \bar{E} - \bar{E}\, \mathrm{rot}\, \bar{H}}_{\mathrm{div}(\bar{E} \times \bar{H})} + \bar{E}\bar{J} + \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{E}\bar{J} + \mathrm{div}(\bar{E} \times \bar{H}) = 0}$$

a gyakorlat alátámasztja, hogy ez alapján a következő megfeleltetés a helyes:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ p &= \bar{E} \cdot \bar{J} \\ \bar{S} &= \bar{E} \times \bar{H} \end{aligned}}$$

- $dw = \bar{E}\, d\bar{D} + \bar{H}\, d\bar{B}$ $\xRightarrow[\text{lineáris, izotróp közege}]{}$ $w = \frac{1}{2} \bar{E}\bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H}\bar{B} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$

- Max. V.: $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b) \to \bar{E} = \dfrac{\bar{J}}{\sigma} - \bar{E}_b \to p = \bar{E}\bar{J} = \dfrac{\bar{J}^2}{\sigma} - \bar{E}_b\bar{J}$

  ↗ $\dfrac{\bar{J}^2}{\sigma} > 0$ hőfejlődés mértéke (az $R \cdot I^2 = \dfrac{I^2}{G}$ Joule-tv. differenciális alakja)

  ↘ $-\bar{E}_b\bar{J}$ a beiktatott erő munkája
  >0 fogyasztó
  <0 generátor

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \bar{E}\bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H}\bar{B} \right) dV + \int_V \frac{\bar{J}^2}{\sigma} dV - \int_V \bar{J}\bar{E}_b\, dV + \oint_A (\bar{E} \times \bar{H})\, d\bar{A} = 0}$$

Energiamérleg szinuszos változás esetén (en. mérleg komplex alakja)

Max. I.: $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + j\omega\bar{D}$ / konjugáltját vesszük és $\cdot\bar{E}$

Max II.: $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\bar{B}$ / $\cdot\bar{H}^*$ ← konjugált

$\xrightarrow{(I)-(II)}$

$$\Rightarrow \bar{E}\cdot\mathrm{rot}\,\bar{H}^* - \bar{H}^*\cdot\mathrm{rot}\,\bar{E} = \bar{E}\bar{J}^* \underset{\substack{\uparrow\\ j^*=-j}}{-} j\omega\bar{E}D^* + j\omega\bar{H}^*\bar{B} \xrightarrow{\text{0-ra rendezve}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{H^*\mathrm{rot}\,\bar{E} - \bar{E}\,\mathrm{rot}\,\bar{H}^*}_{\mathrm{div}(\bar{E}\times\bar{H}^*)} + \bar{E}\bar{J}^* + j\omega(\bar{H}^*\bar{B} - \bar{E}\bar{D}^*) = 0$$ $\Rightarrow$ integráljuk V-re

G.-O.

$$\Rightarrow j\omega\int_V\left(\frac{1}{2}\bar{H}^*\bar{B} - \frac{1}{2}\bar{E}\bar{D}^*\right)dV + \int_V\frac{1}{2}\bar{E}\bar{J}^*dV + \oint_A\frac{1}{2}(\bar{E}\times\bar{H}^*)\,d\bar{A} = 0$$

($\frac{1}{2}$ tényezők azért vannak, mert a térmennyiségeket a csúcsértékkel szokás jellemezni (nem effektívvel))

komplex sugárzó teljesítmény

$P_s + jQ_s = \oint_A \bar{S}\,d\bar{A}$, ahol $\bar{S} = \frac{1}{2}(\bar{E}\times\bar{H}^*)$ a komplex Poynting-vektor ($\bar{U}\cdot\bar{I}^*$ analógiája)

komplex átalakuló telj.:

$P + jQ = \int_V p\,dV$, ahol $p = \frac{1}{2}\bar{E}\bar{J}^* = \frac{1}{2}\frac{\bar{J}\bar{J}^*}{\sigma} - \frac{1}{2}\bar{E}_b\bar{J}^*$ a komplex telj. sűrűség

$\frac{1}{2}\frac{\bar{J}\bar{J}^*}{\sigma}$: hatásos

$-\bar{E}_b\bar{J}^*$: hatásos és meddő része is lehet

a tárolt energiához tartozó meddő teljesítményt jelenti ez a tag

$jQ_w = j\omega\int_V (w_m - w_e)\,dV$

$w_L = \frac{1}{2}(\bar{H}^*\bar{B} - \bar{E}\bar{D}^*)$; „Lagrange-sűrűség" (energia sűrűség dimenziójú)

8. Az elektrosztatika Poisson-egyenlete és megoldása $bgf!$

Elektrosztatika ($\partial/\partial t = 0$, $\bar{J} = 0$) /lásd. 6. tétel/

$\text{rot}\,\bar{E} = 0$ $\qquad \text{div}\,\bar{D} = \varrho$ $\qquad \bar{D} = \varepsilon \bar{E}$

folytonossági/peremfeltételek:

2 szig. határán: $E_{2t} = E_{1t}$, $\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$

vez. felületén: $E_t = 0$ $\qquad (D_{2n} = D_{1n})$

felírhatóúgy

$\bar{E} = -\text{grad}\,\varphi$ (így $\text{rot}\,\bar{E} = -\text{rot}\,\text{grad}\,\varphi = 0$ /lásd 0. tétel/)

skalárpotenciál

$$\text{div}\,\bar{D} = \text{div}\,\varepsilon\bar{E} = \varepsilon\,\text{div}\,\bar{E} = \varepsilon\,\text{div}(-\text{grad}\,\varphi) = -\varepsilon \cdot \underbrace{\text{div}\,\text{grad}}_{\Delta}\varphi = -\varepsilon\Delta\varphi = \varrho \Rightarrow$$

(lásd 0. tétel)

$\Rightarrow$ (Laplace) - Poisson egyenlet: $\boxed{\Delta\varphi = -\dfrac{\varrho}{\varepsilon}}$ a skalárpotenciálnak ezt kell kielégítenie $\forall$ térrészben (ha $\varrho = 0$, akkor a neve homogén Laplace-egyenlet)

L-P egyenlet általános megoldása

Green-tétel: $\int_V (u\Delta\varphi - \varphi\Delta u)\,dV = \oint_A (u\,\text{grad}\,\varphi - \varphi\,\text{grad}\,u)\,d\bar{A}$

legyen $u = \frac{1}{r}$

$$\int_V \Big(\frac{1}{r}\Delta\varphi - \underbrace{\varphi\,\Delta\frac{1}{r}}_{\Delta\frac{1}{r} = 0}\Big)\,dV = \oint_A \Big(\frac{1}{r}\text{grad}\,\varphi - \varphi\,\text{grad}\frac{1}{r}\Big)\,d\bar{A}$$

$$\int_V \frac{1}{r}\Delta\varphi\,dV = \int_A \Big(\frac{1}{r}\text{grad}\,\varphi - \varphi\,\text{grad}\frac{1}{r}\Big)\,d\bar{A} + \int_{A_0}\Big(\underbrace{\frac{1}{r}\text{grad}\,\varphi}_{\text{I.}} - \underbrace{\varphi\,\text{grad}\frac{1}{r}}_{\text{II.}}\Big)\,d\bar{A}$$

I. $\lim\limits_{r_0\to 0}\int_{A_0} \frac{1}{r}\,\text{grad}\,\varphi\,d\bar{A} = \lim\limits_{r_0 \to 0}\frac{1}{r_0}\,|\text{grad}\,\varphi| \cdot 4 r_0^2 \pi = 0$

II. $\lim\limits_{r_0\to 0}\int_{A_0} \varphi \cdot \underbrace{\Big(-\frac{1}{r^2}\Big)\,d\bar{A}}_{\frac{1}{r_0}4\pi r^2} = 4\pi\,\varphi(r_0)$

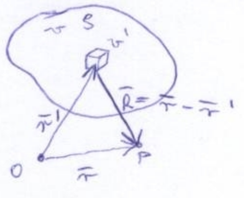
$$\rightarrow \int_V \frac{1}{r}\Delta\varphi\,dV = \int_A \Big(\frac{1}{r}\text{grad}\,\varphi - \varphi\,\text{grad}\frac{1}{r}\Big)\,d\bar{A} - 4\pi\,\overbrace{\varphi(r_0)}^{\varphi(P)} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ $\varphi(P)$-re rendezve:

$$\varphi(P) = \frac{\int_A \big(\frac{1}{r}\text{grad}\,\varphi - \varphi\,\text{grad}\frac{1}{r}\big)\,d\bar{A} - \int_V \frac{1}{r}\Delta\varphi\,dV}{4\pi} \qquad \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{-\Delta\varphi}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{A = A_0 \cup A_N} \frac{1}{r}\varepsilon\,\text{grad}\,\varphi\,d\bar{A} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{A = A_0 \cup A_N} \varphi\,\varepsilon\,\text{grad}\frac{1}{r}\,d\bar{A}$$

$\varepsilon\,\text{grad}\,\varphi = \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \sigma_N$

$$\Longrightarrow \Longrightarrow \boxed{\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\varrho(\bar{r}')}{|R|}\,dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a_N}\frac{\sigma_N(\bar{r}')}{|R|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a_0}\varphi_0\,\varepsilon\,\text{grad}\frac{1}{r}\,d\bar{A}}$$



3D: $a_0 = 0 \Rightarrow \varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\varrho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\,dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{a_N}\frac{\sigma_N(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\,dA'$

2D: $\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_a \ln\frac{1}{R}\,\varrho(\bar{r}')\,dA' + \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_l \ln\frac{1}{R}\,\sigma_N(\bar{r}')\,dl'$

...gított térrész:

$a_0 = 0$

$a_N = \infty$ $\qquad \varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho(\bar{r}')}{|R|}\,dV' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{R}$

9. Az áramlási tér alapösszefüggései. blt

stacionárius elektromos tér ($\partial/\partial t = 0,\ J \neq 0$)

$\operatorname{rot} \bar{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$

$\operatorname{div} \bar{J} = 0 \qquad \bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b)$

$\operatorname{div} \bar{J} = \operatorname{div} \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b) = -\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{div} \bar{J}_b \Rightarrow \boxed{-\Delta\varphi = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \bar{J}_b = g}$ L.-P.

$\sigma = \text{áll.}$

határfeltételek:

nem id. közegek határán: $E_{2t} = E_{1t}$; $\sigma_2 E_{2n} = \sigma_1 E_{1n}$ ($J_{1n} = J_{2n}$)

id. vez. felületén: $E_t = 0$

id. szig. felületén: $E_n = 0$

analógia az elektrosztatikával:

el. sztat.	D	E	ε	φ	$C = Q/U$
stac. ár.	J	E	σ	φ	$G = I/U$

10. Az elektrosztatika Laplace-egyenlete és a peremfeltételek. hiányos

el. sztat.: $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$ $\quad \mathrm{div}\,\bar{D} = \varrho$ $\quad \bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ (lásd. 6. tétel)

$\Rightarrow$ Laplace-Poisson -egyenlet: $\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ (lásd. 8. tétel) $\rightarrow$ ha $\varrho = 0$ (az elektródán nincs töltés) $\rightsquigarrow$ $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ homogén Laplace-egyenlet

Peremfeltételek

el. sztat $\rightarrow$ id. szigetelő közeg, a vizsgált teljes térrész peremét id. vezetők határolják
(ϱ csak a vezetők felületén lehet)
az elektróda (fém) felületén: $E_t = 0$
$\varphi = \mathrm{const.}$ (mivel $\sigma = \infty \rightsquigarrow$ a töltések munkavégzés nélkül mozognak)

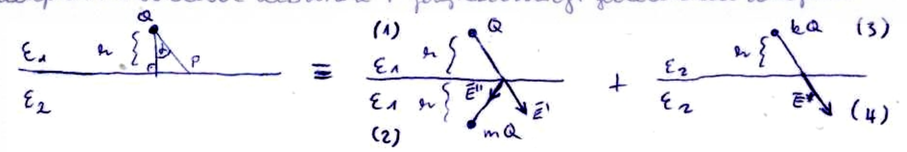
Dirichlet-típusú pf: $\varphi = \varphi_0$ a peremen előírjuk a potenciál értékét
(elektróda $\rightarrow E_t = 0 \rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \rightarrow \varphi|_{\tau} = \mathrm{const}$)

Neumann-típusú pf: a peremen előírjuk a potenciál normális szerinti deriváltját
(hom.)
(erővonal $\rightarrow E_n = 0 \rightarrow D_n = 0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \varepsilon$)

Inhomogén Neumann.
$D_n \neq 0$ a peremen (ha id. fém $\rightsquigarrow D_n = \sigma_n = -\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\varepsilon\, \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \bar{n}$)

11. Elektrosztatikus feladatok megoldása a helyettesítő töltések módszerével.

helyettesítő töltések módszere: folytonossági feltételeken alapul



$\left.\right\}$ $m = ?$, $k = ?$

levezetés: (gömbtöltésre, kisnyomású közelítéssel ($r_0 \ll h$))

$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$

$$\underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\sin\alpha}_{(1)} + \underbrace{\frac{mQ}{4\pi\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\sin\alpha}_{(2)} = \underbrace{\frac{kQ}{4\pi\varepsilon_2}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\sin\alpha}_{(3)} + \underbrace{0}_{(4)} \Rightarrow \frac{1+m}{\varepsilon_1} = \frac{k}{\varepsilon_2}$$

$\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$

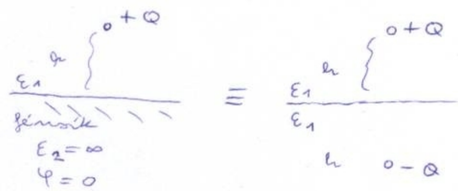
$$\frac{Q}{4\pi R^2}\cdot\cos\alpha - \frac{mQ}{4\pi R^2}\cos\alpha = \frac{kQ}{4\pi R^2}\cos\alpha - 0 \Rightarrow 1 - m = k$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$k = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

elektrosztat: (2. közeg: fém $\rightarrow \varepsilon_2 \cong \infty$)

$m = -1$



Tükrözés lényege:

a helyettesítő elrendezés is kielégíti a határfeltételeket, a vizsgált térrészben ugyanaz a tér alakul ki, mint az eredeti elrendezésben.

pl. gömb elektróda helyettesítése 2 pontszerű töltéssel

$$\left(\oint_A \bar{D}\,d\bar{A} = \int_V \varrho\, dV = Q \right.$$

$$\varepsilon \bar{E} \cdot 4r^2\pi = Q$$

$$\left. \bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2} \rightarrow U = \int \bar{E}\,dl = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r} \right)$$

$$\Rightarrow U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r_0} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{2h - r_0} \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h}\right) \Rightarrow Q = \frac{U 4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h}} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h}}$$

a módszer igaz **hengeres/gömb elektródára** (kisnyomású közelítéssel)
vonalszerű/pontszerű áramforrásra ($\varepsilon \rightarrow \sigma$, $Q \rightarrow I$ helyettesítéssel)
(áramforrás esetén, ha $\sigma_2 = 0$ (szig.) $\rightarrow m = 1$ id.)

13. A véges differenciák módszere

feladat: $\varphi=\varphi(\bar r)$ meghatározása, amely kielégíti a következőket: (homogén közegre szorítkozva)

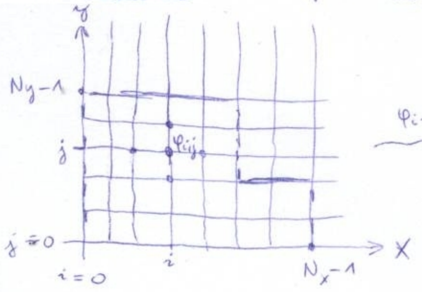
- $\Delta\varphi = 0$ $\quad \bar r \in V$ $\quad$ Laplace-egyenlet
- $\varphi = \phi$ $\quad \bar r \in A$ $\quad$ Dirichlet-peremfeltétel ($\phi=\phi(\bar r)$ adott az A felületen)
- $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ $\quad \bar r \in A'$ $\quad$ homogén Neumann-pf. (n: A' felületre normális irány)

cél: sűrűn választott $\bar r_1 \dots \bar r_N$ pontokra határozzuk meg

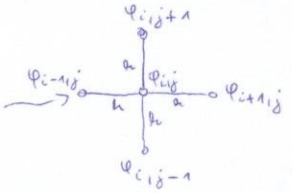
$\varphi=\varphi(\bar r_k)$ rácsponti potenciálokat $(k=1 \dots N)$

megfontolások: - válasszunk négyzethálót (legegyszerűbb)
- feltételezzük, hogy a peremfelületek a rácsot csak rácspontokban metszik
  → pl. a peremfelületet alkotják derékszögű hasábok (méretei legyenek a rácstávolság egész számú többszörösei)
- legyen az elrendezés z irányban ∞ → így (x,y) síkprobléma a feladat
- peremmel szomszédos pontokat hagyjuk figyelmen kívül (mert ilyenkor nem egyenlő a rácstáv.)

• Laplace-egyenlet



(rácsosztás = h)



$\varphi_{i,j} = \varphi(x=h\cdot i,\ y=h\cdot j)$, $\quad i=0 \dots N_x-1$, $\quad j=0 \dots N_y-1$

$\varphi_{i,j} = ?$

- Fejezzük ki (i,j) pont szomszédos pontjainak potenciálját az (i,j) pontban képzett másodfokú **Taylor-polinommal!** (4 egyenlet)
- írjuk fel a Laplace-egyenletet (5. egyenlet) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$(1)\quad \varphi_{i+1,j} \approx \varphi_{i,j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{h^2}{2}$$

$$(2)\quad \varphi_{i,j+1} \approx \varphi_{i,j} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} h + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{h^2}{2}$$

$$(3)\quad \varphi_{i-1,j} \approx \varphi_{i,j} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} h + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{h^2}{2}$$

$$(4)\quad \varphi_{i,j-1} \approx \varphi_{i,j} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} h + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{h^2}{2}$$

$$(5)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad /\cdot(-h^2)$$

$+$ $\rightarrow$

$$(I.)\quad \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1}\right)$$

(szomszédos potenciálok számtani közepe)

(a parciális deriváltak $(x=h\cdot i,\ y=h\cdot j)$ helyen képzendők)

• peremfeltételek

- Dirichlet: $\varphi=\phi$ adott → erre a pontra nem kell egyenletet felírni → az ezzel szomszédos pontban a fenti egyenlet már nem lesz homogén (mivel valamelyik φ ismert)
- hom. Neumann: $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ → e peremponttal szomszédos pont potenciálja egyenlőnek vehető a peremre vett tükörképével
  $\Rightarrow$ (3) egyenlet nem értelmezett
  (1) egyenletben $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$

→ végül az (I.) egyenlet szigetelt peremen fekvő pontra:

(II.)

$(x=h\cdot i)$ $\quad 2\varphi_{i\pm1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0$

$(y=h\cdot j)$ $\quad \varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} - 4\varphi_{i,j} = 0$

$\Rightarrow$ végeredmény: lineáris egyenletrendszer (együttható sávmátrix lesz), ami annyi (I.) ill. (II.) típusú egyenletből áll, ahány ismeretlen rácsponti potenciál van.
(pár tízezer rácspont már elég :)) $\Rightarrow$ megoldása után $\forall\, \varphi_{i,j}$ értéke ismert lesz :)

(rácsponti potenciálok ismeretében a térerősség normális komponenseinek számítása: $E_x|_{i,j} \cong -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i+1,j}}{2h}$; $E_y|_{i,j} \cong -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j+1}}{2h}$)

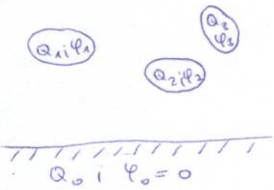
14. A részkapacitások fogalma és meghatározásának módja.

általános elektróda elrendezés (n db elektróda és egy 0 potenciálú elektróda (föld))

potenciálok: $\varphi_1 \dots \varphi_n$ és $\varphi_0 = 0$

töltéseik: $Q_1 \dots Q_n$ → mivel $\sum_i Q_i = 0$, ezért $Q_0 = -\sum_{i=1}^{n} Q_i$

(n = 3-ra:)



a feladat lineáris (mivel ε független a térerősségtől)

→ szuperpozíció:

(I.) $\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} Q_k$; $i = 1 \dots n$ (p_{ik}: potenciál együttható)

(ugyanez kifejtve:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 + \dots + p_{1n} Q_n \\ \varphi_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 + \dots + p_{2n} Q_n \\ &\vdots \\ \varphi_n &= p_{n1} Q_1 + p_{n2} Q_2 + \dots + p_{nn} Q_n\end{aligned}\right\} \quad \underline{\varphi} = \underline{p} \cdot \underline{Q}$$

($p_{ik} = p_{ki}$ reciprocitás))

⇒ (I.) lin. egyenletrendszer megoldva töltésekre:

(II.) $Q_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \varphi_k$; $i = 1 \dots n$

(kifejtve: $\underline{Q} = \underline{c}\,\underline{\varphi} = \underline{p}^{-1} \cdot \underline{\varphi}$)

($c_{ik} = c_{ki}$)

Alakítsuk át (II)-t a köv. módon:

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= \sum_{k=1}^{n} c_{ik} (\varphi_k + \varphi_i - \varphi_i) = \sum_{k=1}^{n} -c_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \varphi_i \\ &\text{legyen } C_{ik} = -c_{ik} \\ &C_{i0} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + C_{i0} \varphi_i \quad ; i = 1 \dots n \; ; C_{ik} = C_{ki}}$$

C: részkapacitások

értelmezés: C_{ik}: i. és k. elektróda közötti főkapacitás
(i. és k. elektróda közé kapcsolt $C_{ik}(\varphi_i - \varphi_k) = C_{ik} U_{ik}$ töltésű kondi)

C_{i0}: i. elektróda földkapacitása
(i. elektróda és a föld közé kapcsolt $C_{i0} \varphi_i = C_{i0} U_{i0}$ töltésű kondi)

Q_i: i. elektródához kapcsolódó kondik össztöltése

(analóg módon:

$I_i = \sum_{k=1}^{n} G_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + G_{i0} \varphi_i$; $i = 1 \dots n$; $G_{ik} = G_{ki}$) G: részkonduktanciák

2 elektródából álló kondi kapacitása ($Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$)

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_{12} + (C_{10} \times C_{20})$$

15. A stacionárius áram mágneses terére vonatkozó összefüggések, a vektorpotenciál bevezetésével.

folyt.!

stacionárius mágneses tér ($\partial/\partial t=0$, $\bar{J}\neq 0$) / lásd 6. tétel /

$\mathrm{rot}\,\bar{H}=\bar{J}$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{B}=0$ $\quad$ $\bar{B}=\mu\bar{H}$

(← mostantól lineáris, izotróp közeget, továbbá tegyük fel, hogy μ térrészenként állandó / ha nincs jelen ferromágneses anyag → $\mu=\mu_0$ mindenhol homogén közeg /)

baj: $\bar{H}$ nem örvénymentes ⇒ nem írható fel egy skalárpotenciál gradienseként (mint pl. 8. tételben az $\bar{E}$)

felírható, hogy

$\boxed{\bar{B}=\mathrm{rot}\,\bar{A}}$ (mert $\mathrm{div}\,\bar{B}=\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}=0$ / lásd. 0. tétel /)

$\bar{A}=\left[\frac{T}{m}\right]$ vektorpotenciál ($\bar{A}$ divergenciája szabadon megválasztható → legyen $\mathrm{div}\,\bar{A}=0$ (Coulomb-mérték))

folytonossági feltételek: (ha nincs vonalmenti áramsűrűség)

2 közeg határán: $H_{1t}=H_{2t}$, $B_{1n}=B_{2n}$

$$\mathrm{rot}\,\bar{H}=\mathrm{rot}\left(\frac{\bar{B}}{\mu}\right)=\bar{J}\Rightarrow\mu\bar{J}=\mathrm{rot}\,\bar{B}=\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\bar{A})\underset{\substack{\uparrow\\ \text{mivel}\\ \Delta=\text{graddiv}-\text{rotrot}\\ \text{(lásd 0. tétel)}}}{=}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{A}-\Delta\bar{A}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{mivel div}\bar{A}=0\text{-t}\\ \text{választottunk}}}{=}-\Delta\bar{A}\Rightarrow$$

⇒ vektoriális Poisson-egyenlet: $\boxed{\Delta\bar{A}=-\mu\bar{J}}$ a vektorpot.-nak ezt kell kielégítenie ∀ közegben

derékszögű Descartes koordinátákkal: $\Delta A_x=-\mu J_x$, $\Delta A_y=-\mu J_y$ / $\Delta A_z=-\mu J_z$

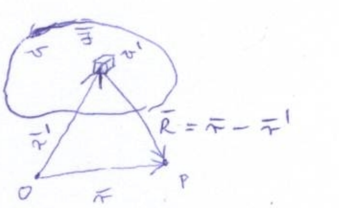
(ahol $\Delta=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}$: skaláris Laplace-op. / lásd 0. tétel /)

2 közeg határán (folytonossági feltételeken kívül) érdemes $\bar{A}$-t is folytonosnak választani

⇒ $A_{it}=A_{jt}$ és $A_{in}=A_{jn}$ ($\bar{r}\in A_{ij}$)

Vektoriális Poisson-egyenlet megoldása:

(3D) $\quad\boxed{\bar{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\bar{J}}{R}\,dV}$ $\quad$ ($R=|\bar{r}-\bar{r}'|$) $\quad\bar{J}=\bar{J}(\bar{r})$



(2D) $\quad\bar{A}=\frac{\mu}{2\pi}\int_a\bar{J}\ln\frac{1}{R}\,d\bar{a}$

($dv=l\,d\bar{a}$)

Vonalszerű vezető

($\bar{J}dV=I\cdot d\bar{l}$)

(lásd bővebben: 16. tétel)

$$\bar{A}=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_l\frac{dl}{R}$$

Peremfeltételek (2D)

$x=t$, $y=n$

$$\bar{B}=\mathrm{rot}\,\bar{A}=\begin{vmatrix}\bar{e}_x&\bar{e}_y&\bar{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&0\\ 0&0&A_z\end{vmatrix}=\bar{e}_t\underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial n}}_{\text{norm.}}-\bar{e}_n\underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial t}}_{\text{tang.}}=B_n+B_t$$

Dirichlet:
(erővonal mentén) $\quad B_n=0\rightsquigarrow-\frac{\partial A_z}{\partial\,\text{tang}}=0\rightsquigarrow A_z\big|_{\text{tang}}=\text{állandó}$

Neumann:
(mágneses pólus) $\quad H_t=\frac{B_t}{\mu}=0\rightsquigarrow\frac{\partial A_z}{\partial n}=0$

$\bar{A}$. alkalmazása

- fluxus számítása

l zártgörbe által határolt A' felület fluxusa

$$\bar{\Phi} = \int_{A'} \bar{B} d\bar{A}' = \int_{A'} rot\, \bar{A}\, d\bar{A}' \underset{\text{Stokes}}{=} \oint_{l} \bar{A}\, d\bar{l}$$

- mágneses energia számítása

$$W = \int_V w\, dV = \int_V \frac{1}{2} \bar{B} \bar{H}\, dV = \frac{1}{2} \int_V \bar{H} \cdot rot\, \bar{A}\, dV = \frac{1}{2} \int_V \bar{A}\, rot\, \bar{H}\, dV - \frac{1}{2} \int_V div\, (\bar{H} \times \bar{A})\, dV = \frac{1}{2} \int_V \bar{A} \bar{J}\, dV - \frac{1}{2} \oint (\bar{H} \times \bar{A})\, d\bar{A}$$

$A = A_\infty \cup A_0$

$div\,(H \times A) = A\, rot\, H - H\, rot\, A$

- $rot\, \bar{H} = \bar{J}$
- G.~0.

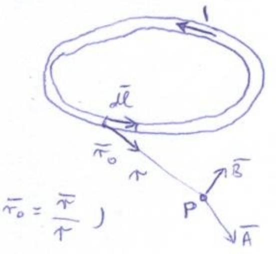
→ tehát a mágn. energia (mágnesesen homogén közegnél)

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \bar{A} \bar{J}\, dV$$

16. A Biot–Savart törvény, az ön- és kölcsönös indukció együtthatók számítása

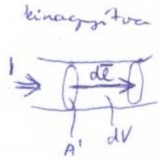
(15. tétel 3. esete:)

Vonalszerű vezető (kis keresztmetszetű vezetőben folyó áram által létrehozott mágneses tér)



$\left(\bar{r}_0 = \frac{\bar{r}}{r}\right)$

kinagyítva:



(a vonalszerű közelítés a vez. belsejére nem lesz igaz!)

vekt. L-P. egyenlet megoldása: $(\bar{A} = \bar{A}(\bar{r}))$

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\bar{J}}{r}\,dV$$

→ vonalszerű közelítéssel: $\bar{J}dV = \bar{J}A'dl = J\bar{A}'d\bar{l} = I\cdot d\bar{l}$

$$\boxed{\bar{A} = \frac{\mu\cdot I}{4\pi}\oint_l \frac{d\bar{l}}{r}}$$

(több árambursok esetén → szuperpozíció)

$$\Rightarrow \bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A} = \mathrm{rot}\left(\frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \frac{d\bar{l}}{r}\right) = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \mathrm{rot}\,\frac{d\bar{l}}{r} \overset{\downarrow}{=}$$

$\mathrm{rot}(\varphi\bar{v}) = (\mathrm{grad}\,\varphi)\times\bar{v} + \varphi\,\mathrm{rot}\,\bar{v}$; $\varphi := \frac{1}{r}$; $\bar{v} := d\bar{l}$ ⇒

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\frac{d\bar{l}}{r} = \left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\right)\times d\bar{l} + \frac{1}{r}\cdot\underbrace{\mathrm{rot}\,d\bar{l}}_{0} =$$

0, mert $d\bar{l}$ nem függ $\bar{r}$-től

$$= \left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\right)\times d\bar{l} = -\frac{\bar{r}_0}{r^2}\times d\bar{l} = \frac{d\bar{l}\times\bar{r}_0}{r^2}$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \frac{d\bar{l}\times\bar{r}_0}{r^2} \Rightarrow$$

⇒ Biot–Savart–tv. $(\bar{H} = \bar{H}(\bar{r}))$

$$\boxed{\bar{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_l \frac{d\bar{l}\times\bar{r}_0}{r^2}}$$

akkor használjuk, ha az áramvezető geometriája ismert (és az áram is), de az erővonalkép nem (egyébként a gerjesztési törvényt (Max I.) használjuk: $\oint_l \bar{H}d\bar{l} = \Sigma I$)

Induktivitások számítása

kölcsönös indukció: $M \equiv L_{21} = \left.\frac{\Psi_{21}}{I_1}\right|_{I_2=0}$ (ahol Ψ_{21} a 2. vezetőben (hurokban) létrehozott fluxus az 1. vezető árama (I_1) által

15. tétel alapján: $$\Psi_{21} = \oint_{l_2}\bar{A}_{21}d\bar{l}_2 \underset{\uparrow}{=} \oint_{l_2}\left(\frac{\mu I_1}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{d\bar{l}_1}{r_{12}}\right)d\bar{l}_2 = \underbrace{\frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{d\bar{l}_1 d\bar{l}_2}{r_{12}}}_{M}\cdot I_1 = M\cdot I_1$$

$\bar{A}_{21} = \frac{\mu I_1}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{d\bar{l}_1}{r_{12}}$ (lásd fent)

⇒ tehát: $$\boxed{M = \frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{d\bar{l}_1 d\bar{l}_2}{r_{12}}}$$ Neumann-képlet

(ebből látszik, hogy $L_{21} = L_{12}$) (reciprocitás)

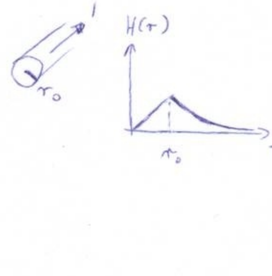
önindukció: $L_1 \equiv L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1}$ (vagy L_0) nem élhetünk a vonalszerű közelítéssel, így a Neumann-képletet közvetlenül nem alkalmazhatjuk.

eljárás: l_1 := a vezető középvonala; l_2 := a vezető belső kontúrja $\xrightarrow{\text{Neumann-képlet}}$ a vezető külső önindukitivitását: L_K $(= L_{0K})$ adja

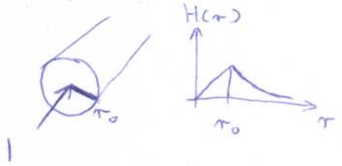
körkeresztmetszetű egyenes vezetőkre: belső önindukitivitás $= L_B = \frac{\mu\cdot l}{8\pi}$ (közelítés) * $(= L_{0B})$

→ $L_0 = L_{0K} + L_{0B}$, ahol $L_{0K} = \frac{\Psi}{I}$

$L_{0B} = \frac{2W_m}{I^2}$ (mivel $W_m = \frac{1}{2}\int_{V_{belső}}\bar{H}\cdot\bar{B}\,dV = \frac{1}{2}L_{0B}I^2$)



* hengeres vezető belső önindukciója (fenti képlet levezetése)



Max. I.: $\oint_r H\,dr = \sum I$

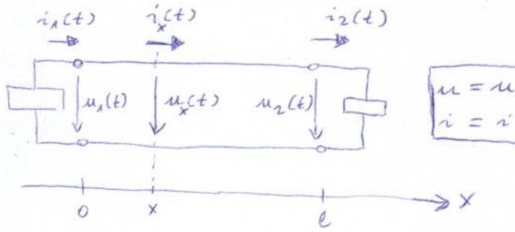
$$H \cdot 2r\pi = \frac{I}{r_0^2\pi} \cdot r^2\pi \;\rightarrow\; H = \frac{I}{2\pi r_0^2}\, r$$ (lineárisan nő a belsejében)

$$w_m = \frac{1}{2}\int_V H^2 \mu \, dV = \frac{\mu}{2}\int_0^{r_0}\left(\frac{I \cdot r}{2\pi r_0^2}\right)^2 \underbrace{l \cdot 2r\pi \cdot dr}_{dV} = \frac{\mu}{2}\frac{I^2 \cdot l}{2\pi r_0^4}\int_0^{r_0} r^3\,dr = \frac{\mu}{2}\frac{I^2 \cdot l}{2\pi r_0^4}\cdot\frac{r_0^4}{4} = \frac{1}{2}\,\underbrace{\frac{\mu l}{8\pi}}\cdot I^2$$

$$\boxed{L_{0B} = \frac{\mu l}{8\pi}}$$

17. A távíróegyenletek és megoldásuk szinuszos gerjesztés esetén.

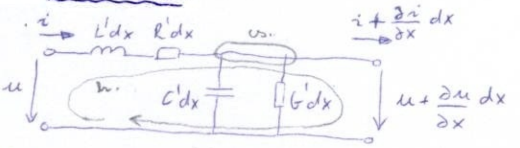
távvezeték (TV): elosztott paraméterű hálózat ⇒ legyen x tengely a vezeték irányában ((néha z-t veszik ennek))
(+x legyen a teljesítményáramlás irányával egyező)



$$\boxed{\begin{aligned} u &= u(x,t) \\ i &= i(x,t) \end{aligned}}$$

vegyünk egy dx hosszúságú kis szakaszát (koncentrált paraméterekkel)

TV szakasz:



írjuk fel rá a Kirchhoff fesz- és áram törvényt ⇒

hurokt.: (h.)

$$\Rightarrow \quad -\cancel{u} + L'dx\frac{\partial i}{\partial t} + R'dx\, i + \cancel{u} + \frac{\partial u}{\partial x}dx = 0$$

csomóponti t.: (cs.)

$$-\cancel{i} + C'dx\frac{\partial u}{\partial t} + G'dx\cdot u + \cancel{i} + \frac{\partial i}{\partial x}dx = 0$$

$(L' = L/l,\ R' = R/l,\ C' = C/l,\ G' = G/l)$

⇒ rendezzük (és /dx) ⇒

Távvezeték egyenletek:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} (\mathrm{I.})\quad \frac{\partial u}{\partial x} &= -L'\frac{\partial i}{\partial t} - R'i \\ (\mathrm{II.})\quad \frac{\partial i}{\partial x} &= -C'\frac{\partial u}{\partial t} - G'u \end{aligned}}$$

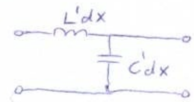
differenciáljuk az egyik egyenletet x szerint, és helyettesítsük bele a másik egyenlet kifejezését. ⇒
(mindkétféle képpen)

Hullámegyenletek:

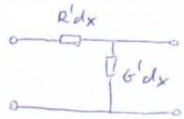
$$\Rightarrow (\mathrm{II.}) \to \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{I.}): \quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L'G' + R'C')\frac{\partial u}{\partial t} + R'G'u}$$

$$(\mathrm{I.}) \to \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{II.}): \quad \boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L'C'\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (L'G' + R'C')\frac{\partial i}{\partial t} + R'G'i}$$

(id. TV esetén: $R' = 0,\ G' = 0$ veszteségek nincsenek



elosztott RC tápvonal (integrált ák.-ök)
$L' = 0,\ G' = 0$



)

szinuszos gerjesztés esetén (állandósult állapot)

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\{U(x)e^{j\omega t}\}$$
$$i(x,t) = \mathrm{Re}\{I(x)e^{j\omega t}\}$$

, ahol $U = U(x)$ és $I = I(x)$ a feszültség és áram komplex amplitúdója az x helyen

(ω: forrás által meghatározott körfrekv.)

⇒ hurok és csp.-i törvényeket rendezve (és $e^{j\omega t}$-vel leosztva) ⇒

// az egyszerűség kedvéért a hosszegységre jutó mennyiségeket „vessző” nélkül jelöljük ezután //

$$\boxed{\frac{dU}{dx} = -(R + j\omega L)I} \to I = \frac{-1}{R + j\omega L}\frac{dU}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = -(G + j\omega C)U} \to -\frac{1}{R + j\omega L}\frac{d^2U}{dx^2} = -(G + j\omega C)\cdot U \Rightarrow \boxed{\frac{d^2U}{dx^2} - \gamma^2 U = 0}$$

Helmholtz-egyenlet

(ebből a soros impedancia és a keresztirányú admittancia:

$Z_s = R + j\omega L$

$Y_s = G + j\omega C$)

hasonlóképpen:

$$\boxed{\frac{d^2I}{dx^2} - \gamma^2 I = 0}$$

vezessük be:
γ: terjedési együttható

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}}$$

$(= \sqrt{Z_s Y_s})$

Általános megoldás (szinuszos gerjesztés esetén)

Helmholtz-egyenlet sajátértékei: γ és $-\gamma$ $\rightarrow$ megoldása: (exponenciális próbafgv.-nyel) $\rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{U(x) = U_1^+ e^{-\gamma x} + U_1^- e^{+\gamma x}} \qquad (\text{látható, hogy } U(x=0) = U_1^+ + U_1^-)$$

$$I = \frac{-1}{R+j\omega L}\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{R+j\omega L}\left(-\gamma U_1^+ e^{-\gamma x} + \gamma U_1^- e^{+\gamma x}\right) = \frac{\gamma}{R+j\omega L} U_1^+ e^{-\gamma x} - \frac{\gamma}{R+j\omega L} U_1^- e^{+\gamma x} \Rightarrow \dots$$

(lásd feljebb)

vezessük be: Z_0: hullámimpedancia

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}} \quad \left(= \frac{R+j\omega L}{\gamma}\right)$$

$$\left(= \sqrt{\frac{Z_S}{Y_S}}\right)$$

$\dots \Rightarrow$

$$\boxed{I(x) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma x}}$$

- vezessük be: α: csillapítási együttható $\left[\frac{1}{m}\right]$ $\quad \alpha = \mathrm{Re}\{\gamma\}$

  β: fázisegyüttható $\left[\frac{1}{m}\right]$ $\quad \beta = \mathrm{Im}\{\gamma\}$

id. TV-re: $R=0, G=0$: $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\gamma = j\omega\sqrt{LC}$, $\alpha = 0$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $v_f = 1/\sqrt{LC}$

így $\boxed{\gamma = \alpha + j\beta}$

$$\rightarrow \text{ezzel } u(x,t) = \mathrm{Re}\{U(x)e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\left\{U_1^+ e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + U_1^- e^{+\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}\right\}$$

- vezessük be: v_f fázissebességet: $\boxed{v_f = \frac{\omega}{\beta}}$ $\quad$ így $\boxed{\beta = \frac{\omega}{v_f} = \frac{2\pi f}{\lambda \cdot f} = \frac{2\pi}{\lambda}}$

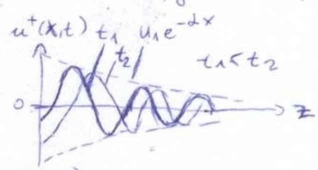
S. Speciális eset: $U_1^- = 0$, $U_1^+ \in \mathbb{R}$

$$u^+(x,t) = \underbrace{U_1^+ e^{-\alpha x}}\cos(\omega t \underbrace{- \beta x}) = U_1^+ e^{-\alpha x} \cos \underbrace{\omega\left(t - \frac{x}{v_f}\right)}$$

Látható, hogy a fesz. amplitudója * függvényében exp.-an csökken. A csökkenés mértékét fejezi ki α.

Látható, hogy a fesz fázisa βx-szel késik a $x=0$ helyen felvett fázishoz képest. Ezért β neve fázistényező.

Látható, hogy az $\omega\left(t - \frac{x}{v_f}\right)$ fázis v_f sebességgel terjed x irányában. Ezért v_f neve: fázissebesség.



másik eset: $U_1^- \in \mathbb{R}$, $U_1^+ = 0$

$$u^-(x,t) = U_1^- e^{+\alpha x}\cos(\omega t + \beta x) = \dots$$

ezek alapján levezethető, hogy:

$$\frac{U^+(x)}{I^+(x)} = \frac{U_1^+ e^{-\gamma x}}{\frac{U_1^+}{Z_0}\cdot e^{-\gamma x}} = Z_0$$

$$\frac{U^-(x)}{I^-(x)} = \frac{U_1^- e^{+\gamma x}}{-\frac{U_1^-}{Z_0}\cdot e^{+\gamma x}} = -Z_0$$

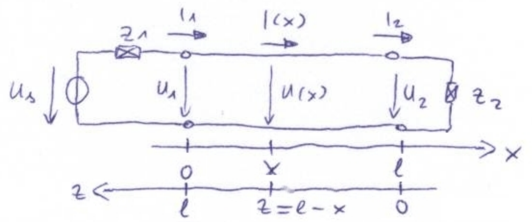
, tehát $\boxed{Z_0 = \frac{U^+(x)}{I^+(x)} = -\frac{U^-(x)}{I^-(x)}}$

18. Lezárt távvezetéken a reflexió és a bemeneti impedancia fogalma.

komplex amplitúdók: / lásd 17. tétel /

(1) $U(x) = U_1^+ e^{-\gamma x} + U_1^- e^{+\gamma x}$

(2) $I(x) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma x}$



U_1^+, U_1^-: poz. ill. neg. irányba terjedő fesz. amplitúdók az $x = 0$ helyen.

→ ezeket nehéz lenne mérni → a cél hogy a fenti egyenletekbe könnyen mérhető paraméterek kerüljenek

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U(l)}{I(l)} = \frac{U_1^+ e^{-\gamma l} + U_1^- e^{+\gamma l}}{\frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma l}} = Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-} = Z_0 \frac{U_2^+ + r U_2^+}{U_2^+ - r U_2^+} = \underbrace{Z_0 \frac{1 + r}{1 - r} = Z_2}$$

vezessük be: reflexiótényező

$$\boxed{r = \frac{U_2^-}{U_2^+}} = -\frac{I_2^-}{I_2^+}$$

$$\boxed{r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}}$$

komplex amplitúdók (TV végétől számítva: z)

(1) $U(z) = U_2^+ e^{+\gamma z} + U_2^- e^{-\gamma z}$

(2) $I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{+\gamma z} - \frac{U_2^-}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z}$

$\Rightarrow$

(1) $U(z) = U_2^+ \left[e^{+\gamma z} + r e^{-\gamma z} \right]$

(2) $I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} \left[e^{+\gamma z} - r e^{-\gamma z} \right]$

már csak U_2^+-ot kell kifejezni → peremfeltételből lehet:

- ha U_2 ismert → $U_2 = U(x=l) = U_2^+ [1 + r]$ → $U_2^+ = \frac{U_2}{1+r}$
- ha U_1 ismert → $U_1 = U(x=0) = U_2^+ [e^{\gamma l} + r e^{-\gamma l}]$ → $U_2^+ = \dots$
- ha U_s ismert → $U_s = U_1 + Z_1 \cdot I_1 = \dots$ → $U_2^+ = \dots$

A TV, mint kétkapu

$x = l$ helyen:

(1) $U_2 = U_1^+ e^{-\gamma l} + U_1^- e^{+\gamma l}$

(2) $I_2 = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma l}$

(1)+(2) → $U_1^+ = \frac{1}{2}(U_2 + Z_0 I_2) \cdot e^{g}$

(1)−(2) → $U_1^- = \frac{1}{2}(U_2 - Z_0 I_2) e^{-g}$

, ahol $g = a + jb$,

$g = \gamma \cdot l$: átvitel

$a = \alpha \cdot l$: csillapítás

$b = \beta l$: forgatás

$$\Rightarrow \quad U_1 = U_1^+ + U_1^- = \frac{e^g + e^{-g}}{2} U_2 + Z_0 \frac{e^g + e^{-g}}{2} I_2 = \operatorname{ch} g \, U_2 + Z_0 \operatorname{sh} g \, I_2$$

$$I_1 = \frac{U_1^+}{Z_0} - \frac{U_1^-}{Z_0} = \frac{e^g - e^{-g}}{2 Z_0} U_2 + \frac{e^g + e^{-g}}{2} I_2 = \frac{\operatorname{sh} g}{Z_0} U_2 + \operatorname{ch} g \, I_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} g & Z_0 \operatorname{sh} g \\ \frac{1}{Z_0} \operatorname{sh} g & \operatorname{ch} g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$ TV lánckarakterisztika

→ bemeneti impedancia:

$$Z_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \operatorname{ch} g + I_2 Z_0 \operatorname{sh} g}{U_2 \frac{\operatorname{sh} g}{Z_0} + I_2 \operatorname{ch} g} \xrightarrow[U_2 = Z_2 I_2]{} \boxed{Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} g + Z_0 \operatorname{sh} g}{Z_0 \operatorname{ch} g + Z_2 \operatorname{sh} g}}$$, ahol $g = \gamma l$

vd. TV-re:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \cos \beta l + j Z_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j Z_0 \sin \beta l}$$

19. Ideális távvezetéken kialakuló áram és fesz. viszonyok, állóhullámok speciális lezárások esetén.

id. TV: $\gamma = j\beta = j\frac{\omega}{v_f}$; $v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$; $U(x) = U_2^+ \left(e^{j\beta(l-x)} + r\, e^{-j\beta(l-x)}\right)$

$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0}\left(e^{j\beta(l-x)} - r\, e^{-j\beta(l-x)}\right)$

spec. lezárások: ($Z_2 \to r \to \begin{matrix} U(x) \\ I(x) \end{matrix} \to \begin{matrix} u(x,t) \\ i(x,t) \end{matrix}$)

1) $Z_2 = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ hullámimpedanciás lezárás (TV illesztés)

$\to r = 0 \to U_2^- = 0$ és $U_1^- = 0$ $\to$ $U(x) = U_1 e^{-j\omega\frac{x}{v_f}}$, $I(x) = \frac{U_1}{Z_0}\cdot e^{-j\omega\frac{x}{v_f}}$ $\xrightarrow[U_1 \in R]{}$ $u(x,t) = U_1 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v_f}\right)$, $i(x,t) = \frac{U_1}{Z_0}\cdot\cos\omega\left(t-\frac{x}{v_f}\right)$ } nincs állóhullám

2) ha a lezáró kétpólus nem vesz fel hatásos telj-t. (P) $\to$ nincs Pázamlás (mivel a vezeték is veszteségmentes)

a.) $Z_2 = \infty$ szakadás

$\to r = 1 \to$ $U(z) = \frac{U_2}{2}\left[e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}\right] = U_2\cos\beta z$

$\left(Z_{be}(x) = \frac{Z_0}{j\,tg(\beta x)}\right)$ $I(z) = \frac{U_2}{2Z_0}\left[e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}\right] = j\frac{U_2}{Z_0}\sin\beta z$

$z = l - x$

$\to$ $u(x,t) = U_2\cos\beta(l-x)\cdot\cos\omega t$, $i(x,t) = \frac{U_2}{Z_0}\sin\beta(l-x)\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ } állóhullámok

b.) $Z_2 = 0$ rövidzár

$\to r = -1 \to \dots$ itt is állóhullámok lesznek (hasonló levezetés, mint az előbb)

$\left(Z_{be}(x) = jZ_0 tg(\beta x)\right)$

c.) $Z_2 = jX$ reaktáns lezárás

$\to r = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} = -\frac{Z_0 - jX}{Z_0 + jX}$ egymás konjugáltja $\to |r| = 1 \to r = e^{j\varphi}$

$$\to U(x) = U_2^+\left[e^{j\beta z} + e^{j\varphi}\cdot e^{-j\beta z}\right] =$$

$$= U_2^+ e^{j\frac{\varphi}{2}}\left[e^{j\left(\beta z - \frac{\varphi}{2}\right)} + e^{-j\left(\beta z - \frac{\varphi}{2}\right)}\right] =$$

$$= 2U_2^+ e^{j\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\beta\left(z - \frac{\varphi}{2\beta}\right)$$

$$I(x) = \dots = j2\frac{U_2^+}{Z_0}e^{j\frac{\varphi}{2}}\cdot\sin\beta\left(z - \frac{\varphi}{2\beta}\right)$$

d.) $Z_2 = R_2 + jX_2$ általános impedanciás lezárás

$$\to r = \frac{R_2 + jX_2 - Z_0}{R_2 + jX_2 + Z_0} = |r|\cdot e^{j\varphi}$$

$$\to U(x) = U_2^+\left[e^{j\beta z} + |r|e^{j\varphi}e^{-j\beta z}\right] =$$

$$= U_2^+\left[\underbrace{e^{j\beta z}(1-|r|)}_{\text{haladó hullám}} + \underbrace{|r|e^{j\frac{\varphi}{2}}\cdot 2\left(\frac{1}{2}e^{j\left(\beta z - \frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\beta z - \frac{\varphi}{2}\right)}\right)}_{\text{álló hullám}}\right]$$

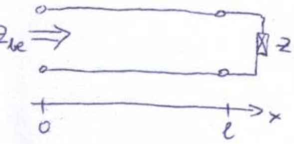
$|U(x)|_{max} = |U_2^+|(1+|r|)$

$|U(x)|_{min} = |U_2^+|(1-|r|)$

haladó hullám arány: $k = \frac{1}{G}$ $\leftarrow$ állóhullám arány: $G = \frac{|U|_{max}}{|U|_{min}} = \frac{1+|r|}{1-|r|}$

21. Ideális távvezeték szakaszból készült rezgőrendszer és tulajdonságai.

id. TV szakasz:



$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \cos\beta l + jZ_0 \sin\beta l}{Z_0 \cos\beta l + jZ_2 \sin\beta l}$$, ahol $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_f}$$

$$Z_{be\,rz} = jZ_0 \, tg\beta l$$

$$Z_{be\,sz} = -j\frac{Z_0}{tg\beta l} = -jZ_0 \, ctg\beta l$$

rövidzár → $U_2 = 0$, $I_2 = max.$
szakadás → $U_2 = max$, $I_2 = 0$
} Két esetben a fesz ill. áram csomópontok $\lambda g/2$ távolságokban vannak

⇒ rezonancia frekvenciák:

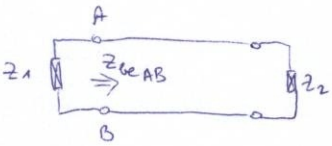
rövidzár – rövidzár
(szakadás – szakadás)

$$l = \frac{\lambda g}{2} \cdot n \rightarrow \lambda g = \frac{2l}{n} \rightarrow f = \frac{v_f}{\lambda g} = \frac{n}{2} \cdot \frac{v_f}{l} \qquad \left(v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}\right)$$

szakadás – rövidzár
(rövidzár – szakadás)

$$l = \frac{\lambda g}{4}(2n+1) \rightarrow \lambda g = \frac{4l}{2n+1} \rightarrow f = \frac{v_f}{\lambda g} = \frac{2n+1}{4} \cdot \frac{v_f}{l}$$

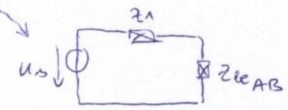
általános leírás
(Z_1 és Z_2)



soros rezonancia

$$\operatorname{Im}\{Z_s\} = 0$$

$$Z_{be\,AB} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 tg\beta l}{Z_0 + jZ_2 tg\beta l}$$



$$\operatorname{Im}\{\underbrace{Z_1 + Z_{AB}^{be}}_{Z_s}\} = 0 \rightarrow f = \dots \quad (l \text{ adott})$$

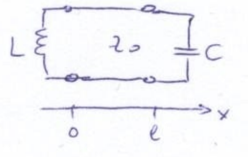
párhuzamos rezonancia

$$\operatorname{Im}\{Y_s\} = 0$$

analóg módon az előzőhöz

$$\operatorname{Im}\{\underbrace{Y_1 + Y_{AB\,be}}_{Y_s}\} = 0 \rightarrow \dots$$

(példa:



$$Z_s = j\omega L + Z_0 \frac{\frac{1}{j\omega C} + jZ_0 tg\beta l}{Z_0 + \frac{j}{j\omega C} tg\beta l}$$

$$\operatorname{Im}\{Z_s\} = 0 = \omega L + \frac{\frac{Z_0}{\omega C} + Z_0^2 tg\beta l}{Z_0 + \frac{1}{\omega C} tg\beta l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \dots$$

$$\left(\beta l = \frac{\omega}{v} \cdot l\right)$$

)

23. A síkhullámra vonatkozó egyenletek és tulajdonságai. A távvezeték analógia. (lásd 17. tétel!)

- A síkhullámok (SH) szuperpozíciójával bármely EM hullám leírható
- legyen a közeg tökéletesen
  - homogén (ε, μ, σ konstansok), lineáris, izotróp
  - $\rho := 0$ (nincs töltéssűrűség)
  - $E_b := 0$ (nincs beiktatott térerősség)

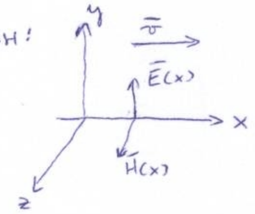
$\Rightarrow$ $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$, $\bar{B} = \mu \bar{H}$, $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Maxwell-egyenletek: (térerősségekkel kifejezve) $\bar{H} = \bar{H}(\bar{r}, t)$, $\bar{E} = \bar{E}(\bar{r}, t)$

(I) $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \sigma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ $\rightarrow$ id. szigetelő: $\sigma = 0$ $\rightarrow$ nincs vezetési áram ($|\bar{J}_e| >> |\bar{J}_v|$)
jó vezető: $\varepsilon \cong 0$ $\rightarrow$ eltolódási áram elhanyagolható ($|\bar{J}_v| >> |\bar{J}_e|$)

(II) $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$

SH!



(III) $\mathrm{div}\,\bar{H} = 0$

(IV) $\mathrm{div}\,\bar{E} = 0$

- **általános időbeli változás:**

rot (Max II.): $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{rot}\,\bar{H}$
↑ Max I. ; (0. tétel) ; Max I.

$\underbrace{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{E}}_{=0\ (\mathrm{Max\,IV})} - \Delta \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta \bar{E} - \overbrace{\mu \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}}^{\text{vezető}} - \overbrace{\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}}^{\text{szigetelő}} = 0}$ megoldandó parciális differenciál egyenlet

id. szig: $\sigma = 0$ $\longrightarrow$ hullámegyenlet
jó vez: $\varepsilon = 0$ $\longrightarrow$ diffúziós egyenlet
(ha megoldjuk $\bar{E}$-re $\rightarrow$ Max II.: $\frac{\partial}{\partial t}\bar{H} = -\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\bar{E} \xrightarrow{\int dt} \bar{H} = \dots$)

analóg módon levezethető $\bar{H}$-ra is:

$$\Delta \bar{H} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\bar{H} \rightarrow \dots \bar{E})$$

szinuszos gerjesztés esetén (állandósult állapot)

$\bar{E}(\bar{r}, t) = \mathrm{Re}\{\bar{E}(\bar{r})e^{j\omega t}\}$
$\bar{H}(\bar{r}, t) = \mathrm{Re}\{\bar{H}(\bar{r})e^{j\omega t}\}$, ahol $\bar{E}(\bar{r}), \bar{H}(\bar{r})$: komplex amplitúdók
(ω: szinuszos gerjesztés körfrekije).

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \overbrace{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}}^{0,\ \text{mert}\ \mathrm{div}\,\bar{E} = 0} - \overbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}}^{\Delta}$

$\Rightarrow$ Maxwell-egyenletek:

(I) $\mathrm{rot}\,\bar{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\bar{E} \rightarrow \mathrm{rot}\left(-\frac{1}{j\omega\mu}\mathrm{rot}\,\bar{E}\right) = (\sigma + j\omega\varepsilon)\bar{E} \longrightarrow \Delta \bar{E} - (j\omega\mu)(j\omega\varepsilon)\bar{E} = 0 \Rightarrow \dots$

(II) $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\mu\,\bar{H} \longrightarrow \bar{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\mathrm{rot}\,\bar{E}$

(III) $\mathrm{div}\,\bar{H} = 0$

(IV) $\mathrm{div}\,\bar{E} = 0$

vezessük be:
γ: terjedési együttható

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$\dots \Rightarrow \boxed{\Delta \bar{E} - \gamma^2 \bar{E} = 0}$ Helmholtz-egyenlet

hasonlóképpen:

$$\boxed{\Delta \bar{H} - \gamma^2 \bar{H} = 0}$$

lineárisan polarizált SH → $\bar{E}(x), \bar{H}(x)$: csak az x koordinátától függenek
($\bar{E} = \bar{E}(x), \bar{H} = \bar{H}(x)$) (x = const. síkban a nagyságuk és irányuk állandó)

⇒ Helmholtz-egyenlet:

$$\boxed{\frac{d^2\bar{E}}{dx^2} - \gamma^2 \bar{E} = 0}$$

Maxll. $-j\omega\mu \bar{H} = \text{rot}\,\bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{e}_x \times \bar{E}) \Rightarrow \boxed{\bar{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}(\bar{e}_x \times \bar{E})}$

- látható, hogy $\bar{H}$ merőleges z tengelyre és $\bar{E}$-re
- ez ugyanígy belátható $\bar{E}$-re is

⇒ $E_x = 0$, $H_x = 0$, $\bar{E}\cdot\bar{H} = 0$, vagyis az ilyen EM-es SH-ok transzferzálisak

⇒ $\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^*$ komplex-Poynting-vektornak csak x irányú komponense van

⇒ $\bar{S} = S_x \cdot \bar{e}_x$

lineárisan polarizált SH →

→ pl. $\bar{E} = E_y \bar{e}_y$
$\bar{H} = H_z \bar{e}_z$ ⇝ Helmholtz: $-\frac{d^2 E_y}{\partial x^2} + \gamma^2 E_y = 0$ és ⇒ $H_z = -\frac{1}{j\omega\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x}E_y$

általános megoldása (TV-vel analóg módon):

$$E_y(x) = E_1^+ e^{-\gamma x} + E_1^- e^{+\gamma x}$$

$$H_z(x) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{E_1^-}{Z_0} e^{+\gamma x}$$

, ahol $Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{G + j\omega\varepsilon}}$ a hullámimpedancia

ANALÓGIA:

TV	U	I	R'	L'	G'	C'
SH	E_y	H_z	0	μ	G	ε

$$Z_0 = \frac{E_y^+}{H_z^+} = -\frac{E_y^-}{H_z^-} \qquad r = \frac{Z_{20} - Z_{10}}{Z_{20} + Z_{10}}$$

24) A síkhullám viselkedése ideális és veszteséges szigetelőben, a síkhullámok polarizációja.

id. szigetelő: $\sigma = 0$ $\qquad \Delta \bar{E} - \overbrace{j\omega\mu j\omega\varepsilon}^{\gamma^2} \bar{E} = 0$

$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta \quad \left(\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega \frac{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}{c} = \frac{\omega}{v_f} \; ; \; v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{\omega}{\beta} \right)$

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$

SH lineáris polarizáció: $\quad E_y^+(x,t) = \mathrm{Re}\{ E_1^+ e^{-j\beta x} e^{j\omega t} \} = E_1^+ \cos\omega(t - \frac{x}{v_f})$

/lásd 23. tétel/ $\quad H_z^+(x,t) = \mathrm{Re}\{ \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-j\beta x} \cdot e^{j\omega t} \} = \frac{E_1^+}{Z_0} \cos\omega(t - \frac{x}{v_f})$

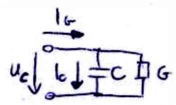
fázisban vannak

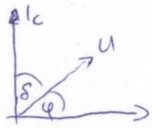
az idő (t) és késleltetés ($\frac{x}{v_f}$) függvényében lehetnek a hullámok:
- cirkulárisan
- elliptikusan polarizáltak
- lineárisan

veszteséges szigetelő:

analógia:

veszteséges szigetelőben terjedő SH $\Longleftrightarrow$ TV, amely





φ: fázisszög

δ: veszteségi szög

$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{I_G}{I_C} = \frac{U_C G}{U_C \omega C} \cong \frac{G}{\omega\varepsilon} \ll 1$

$\Delta \bar{E} - j\omega\mu \underbrace{(\sigma + j\omega\varepsilon)} \bar{E} = 0 = \Delta \bar{E} - j\omega\mu j\omega\varepsilon_k$

$\sigma + j\omega\varepsilon = j\omega\varepsilon\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right) = j\omega(\varepsilon' - \varepsilon'')$

$\varepsilon_k \begin{cases} \varepsilon' = \varepsilon \\ \varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} \end{cases}$ $\qquad \varepsilon_k = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta)$

$\mathrm{tg}\,\delta$: az ideálistól való eltérést adja:

$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{2}\right) \rightarrow \alpha = \frac{\omega}{v_f}\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{2} \; , \; \beta = \frac{\omega}{v_f}$

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \left(1 + j\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{2}\right) \rightarrow X_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{2} \; , \; R_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

25. A síkhullámok viselkedése vezetőben, az áramkiszorítás jelensége, a váltakozó áramú ellenállás fogalma.

vezető: $\omega\varepsilon = 0$

⇐ mivel $|\bar{J}| >> |\bar{J}_0|$ ⇒ $|\sigma \bar{E}| >> |j\omega\varepsilon \bar{E}|$ ⇒ $\sigma >> \omega\varepsilon$ ⇒ $\boxed{\omega << \frac{\sigma}{\varepsilon}}$ $\left(f << \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}\right)$

vezetési eltolási

akkor $\omega\varepsilon = 0$-val számolhatunk

analógia:

vezetőben terjedő SH ⟺ TV, amelyre $C' = 0$ (és $R' = 0$)

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

// felhasználva, hogy $\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$ //

⇒ bevezetjük:

δ: behatolási mélység

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}}$$

⇒

$$\gamma = \frac{1+j}{\delta}$$

$$Z_0 = \frac{1+j}{\sigma\delta} = \frac{\gamma}{\sigma}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$$

$\left(\delta_{cu}^{[m]} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{f_{Hz}}} \right.$, mivel $\sigma_{cu} = 57 \cdot 10^{6}\ S/m$, $\left. \mu = \mu_0 \right)$

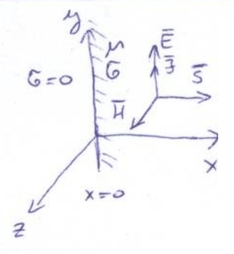
$$\Delta \bar{E} - j\omega\mu\sigma \bar{E} = 0$$

→ általános megoldása: $(\bar{E} = E_y \bar{e}_y,\ \bar{H} = H_z \bar{e}_z)$

$$E_y = E_y^+ e^{-\gamma x} + E_y^- e^{+\gamma x}$$

$$H_z = \frac{\sigma}{\gamma} E_y^+ e^{-\gamma x} - \frac{\sigma}{\gamma} E_y^- e^{+\gamma x} \quad \left(\text{mivel } Z_0 = \frac{\gamma}{\sigma}\right)$$

∞ vezető féltérre merőlegesen eső SH



⟹ nincs visszavert hullám

$$E_y(x) = E_1^+ e^{-\gamma x}$$

$$H_z(x) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma x}$$

$$J_y(x) = \sigma E_1^+ e^{-\gamma x}$$

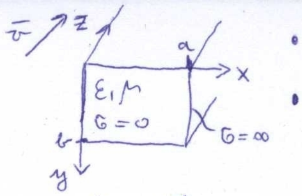
váltakozó áramú ellenállás:

a hullám anyagba való behatolásakor csak akkora ellenállását vesszük az anyagnak, amennyibe be tudott hatolni:

$$R_\sim = \frac{l}{K\sigma\delta}$$, ahol K az anyag kerülete

$$\left(R_0 = \frac{l}{\sigma A}\right)$$

30)



• $\frac{\partial}{\partial t}$ szinuszos
• közeg: homogén, szigetelő, forrásmentes

29)

TM = transzverzális mágneses

TE = transzverzális elektromos

Maxwell

(I) $\mathrm{rot}\,\bar{H} = j\omega \bar{D}$

(II) $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega \bar{B}$

(III) $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0 \longrightarrow \bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A}$

(IV) $\mathrm{div}\,\bar{D} = 0 \longrightarrow \bar{D} = \mathrm{rot}\,\bar{F}$

$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\,\mathrm{rot}\,\bar{A}$ ($\bar{A}$: vektorpot.)

$\mathrm{rot}(\bar{E} + j\omega\bar{A}) = 0$

$\Downarrow$

$\bar{E} + j\omega\bar{A} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ (φ: elektromos skalárpot)

$\bar{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - j\omega\bar{A} = -(\mathrm{grad}\,\varphi + j\omega\bar{A})$

$\mathrm{rot}\,\bar{H} = j\omega\,\mathrm{rot}\,\bar{F}$ ($\bar{F}$: vektorpot)

$\mathrm{rot}(\bar{H} - j\omega\bar{F}) = 0$

$\Downarrow$

$\bar{H} - j\omega\bar{F} = -\mathrm{grad}\,\psi$ (ψ: mágn. skalárpot.)

$\bar{H} = -\mathrm{grad}\,\psi + j\omega\bar{F}$

(I) $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \mathrm{rot}\,\frac{\bar{B}}{\mu} = \mathrm{rot}\,\frac{\mathrm{rot}\,\bar{A}}{\mu} = \frac{1}{\mu}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{A} - \Delta\bar{A})$

$\parallel$

$j\omega\bar{D} = j\omega\varepsilon\bar{E} = -j\omega\varepsilon(\mathrm{grad}\,\varphi + j\omega\bar{A})$

legyen $\mathrm{div}\,\bar{A} = -j\omega\varepsilon\mu\varphi$ (Lorentz-mérték)

$\Rightarrow \frac{1}{\mu}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{A} - \Delta\bar{A}) = -j\omega\varepsilon(\mathrm{grad}\,\varphi + j\omega\bar{A})$

$\boxed{\Delta\bar{A} + \omega^2\varepsilon\mu\bar{A} = 0}$

(II) $\mathrm{rot}\,\bar{E} = \mathrm{rot}\,\frac{\bar{D}}{\varepsilon} = \mathrm{rot}\,\frac{\mathrm{rot}\,\bar{F}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{F} - \Delta\bar{F})$

$\parallel$

$-j\omega\bar{B} = -j\omega\mu\bar{H} = -j\omega\mu(-\mathrm{grad}\,\psi + j\omega\bar{F})$

legyen $\mathrm{div}\,\bar{F} = j\omega\varepsilon\mu\psi$

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{F} - \Delta\bar{F}) = -j\omega\mu(-\mathrm{grad}\,\psi + j\omega\bar{F})$

$\boxed{\Delta\bar{F} + \omega^2\varepsilon\mu\bar{F} = 0}$

Helmholtz-egyenletek

---

megoldásnál (2D)

$\bar{A}(x,y,z) = \bar{e}_z \cdot A_0(x,y) \cdot e^{-\gamma z}$

$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} e^{-\gamma z} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2} e^{-\gamma z} + \gamma^2 A_0 e^{-\gamma z} + \omega^2\varepsilon\mu A_0 e^{-\gamma z} = 0$

Helmholtz (2D)

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2} + \underbrace{(\gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu)}_{k^2} A_0 = 0}$$

$\bar{F}(x,y,z) = \bar{e}_z \cdot F_0(x,y) \cdot e^{-\gamma z}$

$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} e^{-\gamma z} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} e^{-\gamma z} + \gamma^2 F_0 e^{-\gamma z} + \omega^2\varepsilon\mu F_0 e^{-\gamma z} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} + \underbrace{(\gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu)}_{k^2} F_0 = 0}$$

... eredmények a TM-hez hasonlóak

• $E \longleftrightarrow H$, $\varepsilon \longleftrightarrow -\mu$

• ami más:

1) $F_0(x,y) = M \cos k_x x \cos k_y y$
(mivel a peremfeltételek most is $\bar{E}$-re vonatkoznak, nem $\bar{H}$-ra)

2) m vagy n valamelyike 0 is lehet
ha $m = 0 \rightsquigarrow k_x = 0$
$n = 0 \rightsquigarrow k_y = 0$

$$\Rightarrow \bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & A_0 e^{-\gamma z} \end{vmatrix} = \bar{e}_x \frac{\partial A_0}{\partial y} e^{-\gamma z} - \bar{e}_y \frac{\partial A_0}{\partial x} e^{-\gamma z}$$

$\rightsquigarrow B_x = \frac{\partial A_0}{\partial y} e^{-\gamma z}$, $B_y = -\frac{\partial A_0}{\partial x} e^{-\gamma z}$; $B_z = 0$

$\rightsquigarrow \bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu} \rightsquigarrow H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_0}{\partial y} e^{-\gamma z}$, $H_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_0}{\partial x} e^{-\gamma z}$, $H_z = 0$

$\Downarrow$

TM

$$\Rightarrow j\omega\bar{D} = \mathrm{rot}\,\bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_0}{\partial y} e^{-\gamma z} & -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_0}{\partial x} e^{-\gamma z} & 0 \end{vmatrix} = \bar{e}_x \frac{-\gamma}{\mu}\frac{\partial A_0}{\partial x} e^{-\gamma z} + \bar{e}_y \frac{-\gamma}{\mu}\frac{\partial A_0}{\partial y} e^{-\gamma z} + \bar{e}_z \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2}\right)}_{A \cdot k^2 \text{ (Helmholtz 2D alapján)}} e^{-\gamma z}$$

$\rightsquigarrow \bar{E} = \frac{\bar{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\,\bar{H} = \dots \rightarrow E_x = -\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial A_0}{\partial x} e^{-\gamma z}$; $E_y = \frac{-\gamma}{j\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial A_0}{\partial y} e^{-\gamma z}$; $E_z = \frac{k^2}{j\omega\varepsilon\mu} \cdot A_0 e^{-\gamma z}$

megoldás: $k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2$ (($\gamma = \alpha_{mn} + j\beta_{mn}$))

$\rightsquigarrow A_0(x,y) = \mu M \sin k_x x \sin k_y y$ (azért szinusz, hogy az $x=0$ és $y=0$ peremen 0 értékű legyen)

$k_x = \frac{m\pi}{a}$, $m = 1,2\dots$

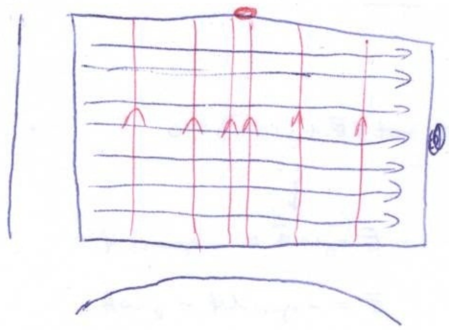
$k_y = \frac{n\pi}{b}$, $n = 1,2\dots$

} (azért, hogy az $x=a$ és $y=b$ peremen is 0 legyen)

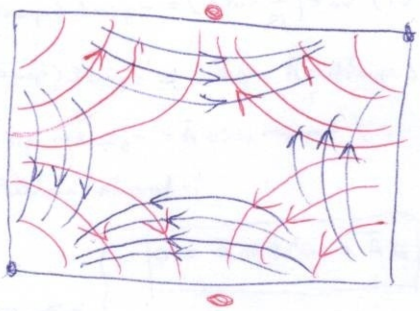
Erővonalképek... jöjjön rá más :P

$\vec{E} \perp \vec{H}$

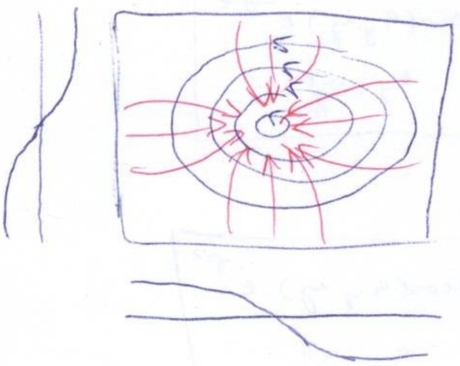
TE 10

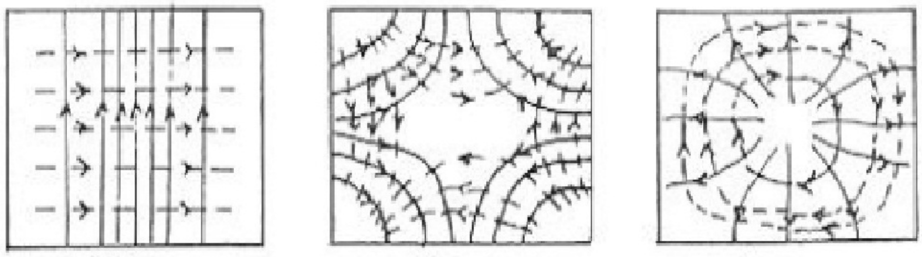


TE 11



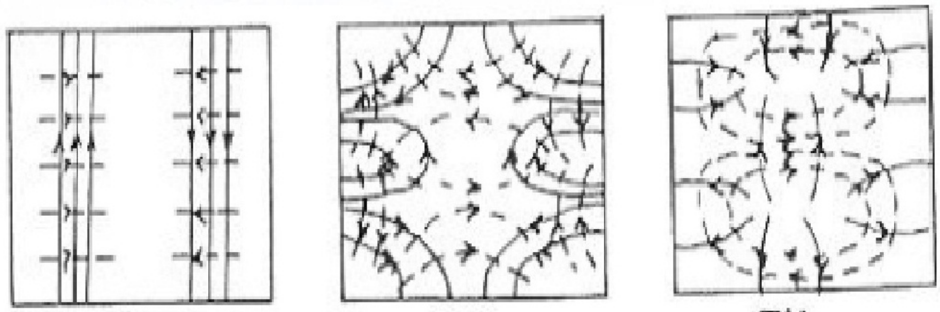
TM 11



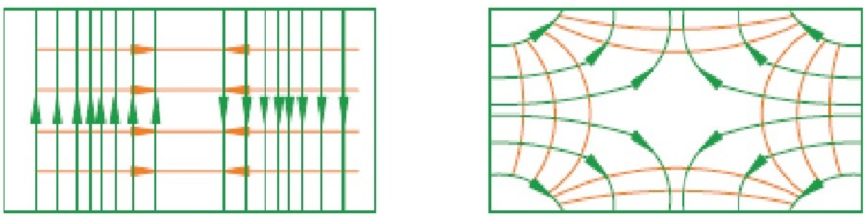


TE_{10} TE_{11} TM_{11}

Fodor könyv szerint

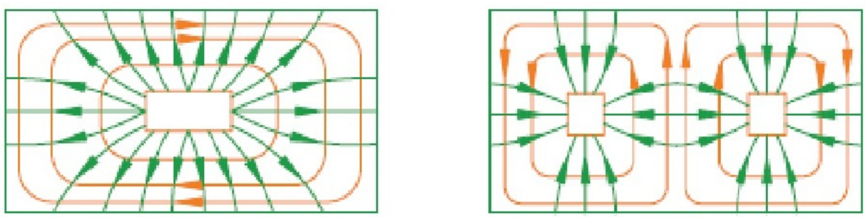


TE_{20} TE_{12} TM_{12}



TE_{20} TE_{11}

Zombory könyv szerint



TM_{11} TM_{21}

31.) Csőtápvonal (diszperziós egyenlet és határhullámhossz)

diszperziós egyenlet: $\boxed{\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

$$\rightsquigarrow \gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon$$

csillapítatlan terjedés: $\alpha = 0 \rightsquigarrow \gamma = j\beta$

$$\underbrace{(j\beta)^2}_{-\beta^2} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon < 0 \quad / \cdot(-1)$$

$$\left(\omega^2 \mu\varepsilon = (2\pi f)^2 \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{\frac{1}{c^2}} \underbrace{\mu_r\varepsilon_r}_{N^2} = \left(2\pi \frac{f}{c} N\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} N\right)^2\right.$$

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} N\right)^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \geq 0$$

$$((\omega^2\mu\varepsilon =)) \left(\frac{2\pi}{\lambda} N\right)^2 \geq \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 ((= k_x^2 + k_y^2))$$

$$\lambda < \boxed{\frac{2N}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}} = \lambda_h$$ határhullámhossz

a terjedés feltétele

$(\lambda < \lambda_h \Longleftrightarrow f > f_h)$

$\omega_h = \dots$

$f_h = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_h = \dots$

fázistényező:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda} N\right)^2 - \underbrace{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}_{\left(\frac{2N}{\lambda_h}\right)^2 \cdot \pi^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} N \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right)^2} = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

csőben mért

$$\Lambda = \frac{\lambda}{N\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\beta} > \lambda$$

$$v_f = \Lambda \cdot \frac{c}{\lambda} = \dots > c$$

$$v_{csop} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = \dots < c$$