

A szigorlaton semmilyen segédeszköz nem használható!

1. (20 pont)

Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$$

függvényen és vázolja fel a függvényt!

2. (10+10+10 pont)

Határozza meg a következő integrálokat!

(a)

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx,$$

(b)

$$\int_0^8 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy dx,$$

(c)

$$\iint_T \frac{x-y}{x^2+y^2} dx dy,$$

ahol $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

3. (20 pont)

Adja meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait a c valós paraméter függvényében!

$$\begin{aligned}cx_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + (1+c)x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\x_1 + x_2 + (1+c)x_3 + x_4 &= 4 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1.\end{aligned}$$

4. (15 pont)

Adja meg az $z = x^2y^2 - 3x + 2y$ felület $P_0(2, 1)$ ponthoz tartozó érintősíkjának egyenletét! Mi lesz annak a síknak az egyenlete, ami átmegy az $A(2, -3, 0)$ illetve $B(3, 2, -1)$ pontokon és merőleges az érintősíkra?

5. (15 pont)

Legyen $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén, ahol $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$. Adja meg az \mathbf{A} lineáris operátor mátrixát az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban! Adja meg \mathbf{A} sajátértékeit és sajátvektorait!