Komplex függvénytan összefoglaló
(Analízis II.)

Visontay Péter
(sentinel@sch.bme.hu)
2000. június

(T) **Komplex függvény differenciálhatósága:**
Az $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható az értelmezési tartomány $z_0 = x_0 + jy_0$ belső pontjában, ha u és v totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban és ugyanitt $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ és $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, azaz teljesülnek a **Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek.**
Ekkor $f'(z_0) = u'_x + jv'_x$

(D) **Regularitás:** f reguláris z_0-ban, ha létezik $\delta > 0$, hogy f diffható $K_{z_0,\delta}$-ban.

(D) **Harmonikus függvény:** kielégíti a $\Delta g = 0$ Laplace-féle parc. diffegyenletet.

(T) Ha $f = u + jv$ reguláris $K_{z_0,\delta}$-ban, akkor ott valós és képzetes része harmonikus függvény.

(T) A differenciálhányados **geometriai jelentése:** legyen f differenciálható K_{z_0}-ban, $f'(z_0) \neq 0$. Ekkor
$|f'(z_0)|$: a z_0 pontbeli *nyújtási együttható*
$\mathrm{arc} f'(z_0)$: a z_0 pontbeli *elfordulási szög.*

(D) Egy komplex leképezés **lokálisan konform** a z_0 pontban, ha ott
a) iránytartóan szögtartó (z_0-hoz képest)
b) kismértékben aránytartó

(T) Az f reguláris komplex függvény akkor és csak akkor képezi le a z sík valamely z_0 pontjának egy környezetét a w sík $w_0 = f(z_0)$ pontjának egy környezetére kölcs.egyértelműen és konformisan, ha $f'(z_0) \neq 0$.

Egyenes komplex egyenlete: $az + \overline{az} + c = 0$
Kör komplex egyenlete: $(z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2$.

Lineáris egész függvény:

$$w = az + b = \varrho_0 r e^{j(\varphi + \varphi_0)} + b$$

ahol $a = \varrho_0 e^{j\varphi_0}$ Ez az egész síkon konform.

Elemi függvények:
$e^z = e^x(\cos y + j \sin y)$
$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$ $\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$ $\mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

(T): $\sin jz = j\mathrm{sh}z$, $\mathrm{sh}jz = j \sin z$
$\cos jz = \mathrm{ch}z$, $\mathrm{ch}jz = \cos z$

Exponenciális függvény:
$e^z = e^x(\cos y + j \sin y)$

Periodikus függvény, periódusa $2\pi j$ (végtelen sokrétű)

Logaritmus függvény:
$w = \ln z = \ln |z| + jz$
$\mathrm{Ln}(z) = \ln |z| + j(z + 2k\pi)$

Hatványfüggvény általánosítása: $z^\lambda = e^{\lambda Lnz}$

Komplex vonalintegrál:
Jordan-görbe: $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$

(D)

$$\int f(z)\ \mathrm{d}z = \lim_{\Delta P_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

Az integrál kiszámítása:
(T1) L: $z(t) = x(t) + jy(t)$ vagy $z(t) = r(t)e^{j\varphi(t)}$ Ekkor:

$$\int_L f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\ \mathrm{d}t$$

(T2) *Newton-Leibniz-formula általánosítása:*

$$F'(z) = f(z) : \int f(z)\ \mathrm{d}z = F(B) - F(A)$$

Cauchy-féle alaptétel:
(T) Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, akkor minden T-beli egyszerű zárt görbére:

$$\oint_L f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

Következményei:
(T) Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, akkor $\int\limits_{L_{AB}} f(z)\ \mathrm{d}z$ független L-től, csak a végpontoktól függ.
(T) Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, akkor létezik primitív függvénye.

(T) **Cauchy-tétel többszörösen összefüggő tartományon:**
G_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ egyszerű, zárt görbék; G_0 körülveszi $G_1, \ldots, G_n$-et. f reguláris egy, a vonalkázott zárt tartományt tartalmazó többszörösen összefüggő tartományon. Ekkor $\oint\limits_{G_0} f(z)\ \mathrm{d}z = \sum \oint\limits_{G_k} f(z)\ \mathrm{d}z$

(T) f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon az $a_1, \ldots, a_n$ pontok kivételével (izolált szingularitások). G_1, G_2 körülveszik az $a_1, \ldots, a_n$ pontokat. Ekkor $\oint\limits_{G_1} = \oint\limits_{G_2}$
(T) f a z_0 kivételével reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, és létezik $K_{z_0,\delta_0} \in T$, melyben f korlátos. Ekkor $\oint\limits_G f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.

(T) **Cauchy-féle integrálformula:**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_G \frac{f(z)}{(z - z_0)} \, \mathrm{d}z$$

(T) **Általánosított Cauchy-féle integrálformula:**

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \oint\limits_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

Mi a kapcsolat egy hatványsor összegfüggvénye és az együtthatók között?
(T) Ha $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ ekkor $c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$ ahol $G+ \in Gy$ (konvergenciagyűrű)

(D) **res** $f(z) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{G+} f(z) \, \mathrm{d}z$ (residuum ha a KT: $0 \leq \ |z - z_0| \ \leq R$.)

(D) **Laurent sor:**
f reguláris Gy: $0 \leq \ |z - z_0| \ \leq R$-en. Ekkor

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

$$\text{ahol } c_n = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{G+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

(T) Ha f *körlapon* reguláris, akkor a Laurent sorfejtés a Taylor sorfejtést adja.

Izolált szingularitások:
(D) f-nek izolált szingularitása van z_0-ban, ha f z_0-ban nem differenciálható, de f reguláris z_0 δ sugarú környezetében. Osztályzásuk:

a) **Megszüntethető szingularitás:** $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \ \ (= c_0)$
(a $z - z_0$ hatványait tartalmazó sorban *nincs negatív kitevőjű tag.*)

b) **Pólus:** $\lim f(z) = \infty$
 (D) A pólus n-edrendű, ha $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0 \ \ (= \ \mathrm{c}_{-n})$
(a sorban *véges sok negatív kitevőjű tag van*)

c) **Lényeges szingularitás:** $\lim f(z)$ nem $\exists$
(a sorban *végtelen sok negatív kitevőjű tag van.*)

Residuum-tétel:
(T) T egyszeresen összefüggő tartomány; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ izolált szingularitások; f reguláris ezen pontok kivételével. Ekkor

$$\oint\limits_{G+} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res} f(z)$$

Residuumok meghatározása:
a) Sorfejtéssel
b) Elsőrendű pólus esetén:
res $f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$
c) $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$; g és h reguláris a $z = z_0$ pont egy környezetében;
$h(z_0) = 0$ de $h'(z_0) \neq 0$:
res $\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$