

## 7. heti gyakorlat

2005. október 25.

**Deriválás** Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét. (A feladat megoldásához hozzátartozik a függvény és a deriváltfüggvény értelmezési tartományának meghatározása.)

(1) (Szorzat és hányados deriváltja)

$$\text{a) } \frac{\ln(x)}{\sin(x)} \quad \text{b) } 2^x \tan(x) \quad \text{c) } x(1 + 2x + 3x^2)^{10} \quad \text{d) } \frac{6 - x^2}{\sqrt{x}}. \quad (1)$$

(2) (Közvetett függvény deriváltja)

$$\text{a) } \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \quad \text{b) } \exp(\cot(x)) \quad \text{c) } \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \quad \text{d) } \ln(\ln(x)) \quad (2)$$

$$\text{e) } x^x = \exp(x \ln(x)) \quad \text{f) } (\arctan(2x))^x = \exp(x \ln(\arctan(2x))). \quad (3)$$

(3) (a) Differenciálható-e az  $x \mapsto x|x|$  függvény a 0 pontban?

(b) Differenciálható-e az

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\arcsin(x)}{\tan(x)}, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } |x| < 1; \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény a 0 pontban?

(c) Milyen  $\alpha$  mellett differenciálható az  $x \mapsto |x|^\alpha$  függvény?

(4) \*Bizonyítsuk be, hogy  $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}\left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right) \equiv 1$ .

- (5) \*Bizonyítsuk be, hogy  $3 \arccos(x) - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ , ha  $|x| \leq \frac{1}{2}$ .  
 [Kell, hogy  $x \mapsto 3x - 4x^3$  monoton nő  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ -en, ezt deriválással ellenőrizzük.]
- (6) Hol monoton: a)  $x \mapsto 3x - x^3$  b)  $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+100}$ ?
- (7) (Érintő egyenes)
- (a) Határozzuk meg a megadott függvények adott ponton átmenő érintőjét.
- a)  $\sin^3(x^4)$ ,  $x_0 = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}$ ;    b)  $\frac{1+x}{1-2x}$ ,  $x_0 = 0$ ;    c)  $\tan(e^x)$ ,  $x_0 = -1$ .  
 (4)
- (b) Az  $f(x) := x^3$  függvénynek két érintő egyenese is áthalad a  $(2, 8)$  ponton. Írjuk fel mindkét egyenes egyenletét.
- (c) Milyen szögben metszi egymást az  $x \mapsto x^2$  és az  $x \mapsto x$  függvény grafikonja? (Két metszéspont!)
- (8) (Inverz függvény deriválása) Határozzuk meg a megadott függvények inverzének deriváltját a megadott pontban.
- (a)  $\ln(x^2 + x)$  ( $x > 0$ )     $\ln(2)$
- (b)  $f(x) := \frac{\sin(x)}{5-x}$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ )     $\frac{1}{10-\frac{\pi}{3}}$
- (c)  $f(x) := 2^{\tan(x)}$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ )     $2$
- (9) \*Egy hógolyó olvad, a térfogatcsökkenés sebessége mindig a felszínrel arányos. Ha 10 órákor a térfogata  $500 \text{ cm}^3$ , 11 órákor pedig  $250 \text{ cm}^3$ , hány órákor olvad el teljesen? (A hógolyó mindig gömb alakú.)