

1. feladat (10 pont)

a) Adja meg a következő fogalmak definícióját!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$$

b) A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{8n^4 - 7n^3 + 2n^2 + 3} = \infty$$

2. feladat (22 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat!

$$\text{a) } a_n = \sqrt[n]{2^{3n+2} \cdot \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{3n^2}} \quad \text{b) } b_n = \sqrt[n]{\frac{3n^2+1}{n^2+3}}$$

$$\text{c) } c_n = \frac{2^n + n^3 \cdot 3^n}{3^{3n+1} + 7}$$

3. feladat (16 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n = \sqrt{n^2 + 5n} + (-1)^n \sqrt{n^2 + 7n + 2}, \quad b_n = \frac{\left(1 - \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)\right) n^3}{3n^3 - 2n^2 + 5}$$

4. feladat (16 pont)

$$a_{n+1} = 10 - \frac{9}{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{és} \quad a_1 = 6$$

$$(a_n) = (6, 8.5, 8.94, \dots)$$

a) Bizonyítsa be, hogy $1 < a_n < 9$!

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton!

c) Konvergens-e ez a sorozat? (A felhasznált tételt írja le!)

Ha igen, mi a határértéke?

5. feladat (18 pont)

Mutassa meg, hogy az alábbi sor konvergens!

Adja meg a sor összegét, ha tudja! Ha nem tudja megadni a sor összegét, akkor adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2} + 2^n}{6^n}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{6^n + 2^n}$$

6. feladat (18 pont)

a) Mit nevezünk Leibniz-sornak? Milyen tételt tanultunk Leibniz-sorokkal kapcsolatban?

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

b1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{n^2},$$

b2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{(n+3)^3},$$

b3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{(n+3)^2}.$$

Pótfeladatok (csak a 40 pont eléréséig javítjuk ki):

7. feladat (10 pont)

Abszolút konvergens-e, feltételesen konvergens-e vagy divergens-e az alábbi sor?

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n^2 - 4n + 3}{2n^4 - n^3 + 5n^2}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{8 + \sqrt[n]{n}}$$

8. feladat (10 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a)
$$a_n = \frac{2^{n+1} + 3^{2n}}{8 + 9^{n+1}}$$

b)
$$b_n = \left(\frac{n+5}{n+2} \right)^{3n}$$