ANALÍZIS 1. Mérnök informatikus szak | **III. VIZSGA** α-variáns | **2016. január 18.** Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (4+5 pont) Adja meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:

$$a)\ (-1+i)^{18} \qquad b)\ \sqrt{1-\sqrt{3}i}$$

---

a) $-1+i \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, vagyis

$$\begin{aligned}(-1+i)^{18} &\overset{\mathbf{1p}}{=} (\sqrt{2})^{18}\left(\cos\left(\frac{54\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{54\pi}{4}\right)\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \\ &= 2^9\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} -512i\end{aligned}$$

b) $1-\sqrt{3}i \overset{\mathbf{2p}}{=} 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$, vagyis

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i} \overset{\mathbf{2p}}{=} \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

---

2. feladat (10+6 pont)

a) Mondja ki és bizonyítsa be a rendőrelvet!

b) Adja meg az

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+2n+6}{2n^2+13}}$$

sorozat határértékét.

---

a) Ha létezik N, hogy $b_n \leq a_n \leq c_n$ minden $n \geq N$ esetén, és $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, mert minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik N_1, hogy $n \geq N_1$ esetén $b_n \geq A - \varepsilon$, és létezik N_2, hogy $n \geq N_2$ esetén $c_n \leq A + \varepsilon$, vagyis $n \geq \max(N, N_1, N_2) = N(\varepsilon)$ esetén

$$A - \varepsilon \leq b_n \leq a_n \leq c_n \leq A + \varepsilon,$$

vagyis $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

b)

$$\sqrt[n]{\frac{1}{15}}\sqrt[n]{n} \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2n^2+13n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{\leq} a_n \overset{\mathbf{1p}}{\leq} \sqrt[n]{\frac{n^3+2n^3+6n^3}{2n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[n]{\frac{9}{2}}\sqrt[n]{n},$$

ahol mindkét oldal 1-hez tart (**1p**), így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ (**1p**).

---

3. feladat (10 pont)
Legyen $a_1 = 3$, és

$$a_{n+1} = 9 - \frac{28}{2 + a_n}.$$

a) Mutassa meg, hogy $2 \leq a_n \leq 5$.

b) Konvergens-e a sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) Teljes indukcióval igazoljuk.

i) $2 \leq a_1 = 3 \leq 5$. (**1p**)

ii) $2 \leq a_n \leq 5 \Longrightarrow 7 \geq \dfrac{28}{2+a_n} \geq 4 \Longrightarrow 2 \leq 9 - \dfrac{28}{2+a_n} = a_{n+1} \leq 5$. (**2p**)

b) $a_2 = \frac{17}{5} \geq 3 = a_1$. Sejtés: a sorozat monoton növő. Teljes indukcióval igazoljuk.

i) $a_1 \leq a_2$. (**1p**)

ii) $a_n \le a_{n+1} \Rightarrow \frac{28}{2+a_n} \ge \frac{28}{2+a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} = 9 - \frac{28}{2+a_n} \le 9 - \frac{28}{2+a_{n+1}} = a_{n+2}$. (**2p**)

A sorozat monoton növő és korlátos, tehát konvergens (**1p**). Határértékére kielégíti az $A = 9 - \frac{28}{2+A}$ egyenletet, vagyis $A^2 - 7A + 10 = 0$ (**1p**), tehát $A = 2$ vagy $A = 5$ (**1**), így a monoton növekedés miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ (**1p**).

---

4. feladat (4+8 pont)

a) Írja fel a definícióját annak, hogy

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty.$$

b) Osztályozza az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2}, & \text{ha } x \ge 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{5x}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit.

---

a) Minden $M < 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ esetén $f(x) < M$ (**4p**)

b) Szakadási helyek: $x = 0$ és $x = 1$ (**1p**).

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{5}, \qquad (\mathbf{2p})$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{1-x^2} = 0, \qquad (\mathbf{1p})$$

vagyis az $x = 0$ pontban a függvénynek véges ugrása van (**1p**).

$$\lim_{x\to -1\pm} f(x) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{x}{1-x^2} = \mp\infty \qquad (\mathbf{2p})$$

vagyis az $x = -1$ pontban a függvénynek másodfajú szakadása van (**1p**).

5. feladat (3+7 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{e^{2x}-1}\right)\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{e^{2x}-1}\right).$$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}\overset{\mathbf{1p}}{=}0\overset{\mathbf{1p}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{2x}-1}$, tehát $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{e^{2x}-1}\right)\overset{\mathbf{1p}}{=}0.$

b) $\infty-\infty$ típusú határérték (**1p**), tehát

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{e^{2x}-1}\right)\overset{\mathbf{1p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{2x(e^{2x}-1)}=$$
$$\overset{\mathbf{2p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{2(e^{2x}-1)+4xe^{2x}}\overset{\mathbf{2p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{8e^{2x}+8xe^{2x}}\overset{\mathbf{1p}}{=}\frac{1}{2}$$

6. feladat (8 pont) Hol konvex, illetve konkáv az $f(x)=\ln(x^2-3x+8)$ függvény? Hol van inflexiós pontja?

$D_f\overset{\mathbf{1p}}{=}\mathbb{R}$, és

$$f'(x)\overset{\mathbf{1p}}{=}\frac{2x-3}{x^2-3x+8},$$
$$f''(x)\overset{\mathbf{2p}}{=}\frac{2(x^2-3x+8)-(2x-3)^2}{(x^2-3x+8)^2}\overset{\mathbf{1p}}{=}\frac{-2x^2+6x+7}{(x^2-3x+8)^2}$$

$f''(x)=0$, ha $x=\frac{3\pm\sqrt{23}}{2}$ (**1p**), vagyis f konvex az $\left[\frac{3-\sqrt{23}}{2},\frac{3+\sqrt{23}}{2}\right]$ intervallumon és konkáv a $\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{23}}{2}\right]$ valamint a $\left[\frac{3+\sqrt{23}}{2},\infty\right)$ intervallumon, továbbá az $x=\frac{3\pm\sqrt{23}}{2}$ helyeken van inflexiós pontja (**2p**).

7. feladat* **(7+4 pont)** Számolja ki az alábbi integrálokat

$$a)\ \int x \operatorname{arctg} x dx, \qquad b)\ \int_{-1}^{\sqrt{3}} |x \operatorname{arctg} x| dx.$$

a) Parciális integrálással $f'(x) = x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ választással (**2p**)

$$\int x \operatorname{arctg} x dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + c.$$

b) $x \operatorname{arctg} x \geq 0$ (**1p**), tehát

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} |x \operatorname{arctg} x| dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) \right]_{-1}^{\sqrt{3}} =$$
$$\overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

8 feladat* **(10 pont)**
Megfelelő helyettesítéssel határozza meg az alábbi integrált:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}+1} dx.$$

Használva a $t = \sqrt{x-3}$ helyettesítést (**1p**) $x = t^2 + 3$, tehát

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}+1} dx \overset{\mathbf{3p}}{=} \int \frac{2t(t^2+3)}{t+1} dt =$$
$$\overset{\mathbf{2p}}{=} 2 \int \frac{t^2(t+1) - t(t+1) + 4(t+1) - 4}{t+1} dt =$$
$$\overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{2}{3} t^3 - t^2 + 8t - 8 \ln |t+1| + c =$$
$$\overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{2}{3} (\sqrt{x-3})^3 - (x-3) + 8\sqrt{x-3} - 8 \ln |\sqrt{x-3}+1| + c$$

9 feladat* (6+8 pont)

a) Ismertesse az integrálszámítás második alaptételét.

b) Adja meg a

$$G(x) = \int_{3x^2}^{4x^5} e^{2t^4} dt$$

függvény deriváltját, ha létezik.

---

a) Ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor az

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon (**3p**). Ha f folytonos, akkor F differenciálható, és $F'(x) = f(x)$ (**3p**).

b) Legyen $F(x) = \int_0^x e^{2t^4} dt$, ekkor $F'(x) = e^{2x^4}$ (**2p**) és $G(x) = F(4x^5) - F(3x^2)$ (**3p**), vagyis $G'(x) = 20x^4 e^{512x^{20}} - 6xe^{162x^8}$ (**3p**).