Elektromágneses terek (VIHVA204)

Hallgatói jegyzet

Készült Dr. Sebestyén Imre előadásai alapján
Készítette: Sasvári Gergely

1) Tartalomjegyzék

2) Mennyiségek

Név	Jel	Mértékegység	Megjegyzés
Töltés	Q	C=As	
Elektromos térerősség vektor	$\vec{E}$	$\frac{N}{C}=\frac{V}{m}$	$N=\frac{VAs}{m}$; intenzitásvektor
Mágneses indukció vektor	$\vec{B}$	$T=\frac{N}{C\frac{m}{s}}=\frac{Vs}{m^2}$	intenzitásvektor
Vonalmenti töltéssűrűség	q	$\frac{C}{m}$	$q=\lim_{\Delta l\to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta l}\right)$
Felületi töltéssűrűség	σ	$\frac{C}{m^2}$	$\sigma=\lim_{\Delta A\to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta A}\right)$
Térbeli töltéssűrűség	ρ	$\frac{C}{m^3}$	$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta V}\right)$
Áramsűrűség	$\vec{J}$	$\frac{A}{m^2}$	$\vec{J}=\rho\vec{v}$
Felületi áram	K	$\frac{A}{m}$	
Vonalszerű áram	I	A	
Mágneses fluxus	Ψ	Vs=Wb	$\Psi=\int_A \vec{B}d\vec{A}$
Feszültség	U	V	$\frac{W_{A\to B}}{Q}=U_{A\to B}=\int_A^B \vec{E}d\vec{l}$
Potenciál	Φ,φ	V	
Indukált feszültség	U_i	V	$U_i=-\frac{d\Psi}{dt}$
Eltolási vektor	$\vec{D}$	$\frac{As}{m^2}$	$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$; gerjesztettségi vektor
Mágneses térerősség vektor	$\vec{H}$	$\frac{A}{m}$	$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}$; gerjesztettségi vektor
Elektromos polarizáció vektor	$\vec{P}$	$\frac{As}{m^2}$	
Elektromos polarizációs állandó	α	$\frac{As}{Vm}$	
Elektromos szuszceptibilitás	κ	-	$\kappa=\frac{n\alpha}{\varepsilon_0}$
Mágnesezettség vektor	$\vec{M}$	$\frac{A}{m}$	
Mágneses polarizációs állandó	α	-	
Mágneses szuszceptibilitás	κ	-	$\kappa=n\alpha$

Név	Jel	Mértékegység	Megjegyzés
Fajlagos vezetőképesség	σ	$\frac{S}{m}$	
Relatív dielektromos állandó	ε_r	-	$\varepsilon_r = 1 + \kappa$
Relatív permeabilitás	μ_r	-	$\mu_r = 1 + \kappa$
Beiktatott térerősség	$\vec{E}_b$	$\frac{V}{m}$	
Skalárpotenciál	φ	V	
Elektromos teljesítménysűrűség	p_e	$\frac{W}{m^3}$	
Elektromos energiasűrűség	w_e	$\frac{Ws}{m^3}$	
Mágneses teljesítménysűrűség	p_m	$\frac{W}{m^3}$	
Mágneses energiasűrűség	w_m	$\frac{Ws}{m^3}$	
Poynting-vektor, teljesítményáram vektor	$\vec{S}$	$\frac{W}{m^2}$	$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
Kapacitás	C	$\frac{As}{V} = F$	$C = \frac{Q}{U}$
Mágneses skalárpotenciál	φ_m	A	
Vektorpotenciál	$\vec{A}$	$\frac{Vs}{m}$	
Indukciós együttható	L	$H = \frac{Vs}{A}$	
Egységnyi hosszú távvezeték ellenállása	R’	$\frac{\Omega}{m}$	Vezetékparaméter
Egységnyi hosszú távvezeték induktivitása	L’	$\frac{H}{m}$	Vezetékparaméter
Egységnyi hosszú távvezeték kapacitása	C’	$\frac{F}{m}$	Vezetékparaméter
Egységnyi hosszú távvezeték vezetése	G’	$\frac{S}{m}$	Vezetékparaméter
Terjedési együttható	γ	$\frac{1}{m}$	$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$
Csillapítási tényező	α	$\frac{1}{m}$	$\gamma = \alpha + j\beta$
Fázistényező	β	$\frac{1}{m}$	$\gamma = \alpha + j\beta$
Hullámimpedancia	Z_0	Ω	$\sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$
Fázissebesség	v_f	$\frac{m}{s}$	$v_f = \frac{\omega}{\beta}$

Név	Jel	Mértékegység	Megjegyzés
Vezetéken terjedő hullámhossz	$\lambda_v = \Lambda$	m	$\frac{2\pi}{\beta}$
Csoportsebesség	v_g	$\frac{m}{s}$	$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2}$
Reflexiós tényező	r	-	$r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$
Állóhullám-arány	SWR	-	Static wave ratio
Behatolási mélység reciproka	k	$\frac{1}{m}$	$k = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
Behatolási mélység	δ	m	$\delta = \frac{1}{k}$
Árnyékolási tényező	K	-	$K = \left\lvert \frac{E(z=0)}{E(z=d)} \right\rvert$

3) Állandók, és közelítések

a) Állandók

- Elemi töltés: Q_e=-1.6*10^{-19} C
- Vákuum dielektromos állandója (permittivitása): $\varepsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
- Vákuum permeabilitása: $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
- Coulomb-féle arányossági tényező: $k = \frac{1}{4\pi * \varepsilon}$
- Fénysebesség: c $\approx 3 * 10^8 \frac{m}{s}$
- Szabadtér hullámellenállása: Z_0=120 $\pi \approx 377\,\Omega$

b) Közelítések $|\delta| < 1\%$ hibával

$Sin\alpha = \alpha$	$\lvert\alpha\rvert$<0.245
$Tg\alpha = \alpha$	$\lvert\alpha\rvert$<0.172
$Cos\alpha = 1$	$\lvert\alpha\rvert$<0.141
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$	-0.247<x<0.328

4) Elmélet

Alapösszefüggések

Lorentz-erő: $\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

Adott térrész összes töltése: $Q_ö = \sum_i Q_i + \int_L q dl + \int_A \sigma dA + \int_V \rho dV$

Coulomb törvény: Két r távolságban lévő töltés között fellépő erőhatás. $F = k * \frac{Q_1 * Q_2}{r^2}$

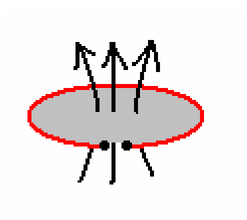
Ponttöltés által létrehozott térerősség r távolságban: $E = \frac{1}{4\pi * \varepsilon} * \frac{Q}{r^2}$

Folytonossági egyenlet: Adott egy A felületű, Q töltésű térfogatdarab kifelé mutató normálissal. Ebből töltések áramolhatnak ki, és be. Ekkor tudjuk, hogy $\Delta Q = i_{be} * \Delta t - i_{ki} * \Delta t$. Ebből viszont i_{be}-i_{ki}-t ki lehet fejezni az áramsűrűség (zárt) felületi integráljával.: $i_{be} - i_{ki} = -\oint_A \vec{J} d\vec{A}$. Most ezt írjuk be az eredeti egyenletbe, és osszunk le Δt -vel. Ezt kapjuk: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\oint_A \vec{J} d\vec{A}$. Tudjuk azt is, hogy a térrész összes töltése (röviden): $Q = \int_V \rho dV$. Írjuk ezt is az egyenletbe, és Δ helyett térjünk át a differenciálra! A végeredmény: $\oint_A \vec{J} d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$.

Két, egymástól d távolságra lévő l hosszú áramjárta vezetőre ható erő: $F = k * \frac{I_1 * I_2}{d} * l$, ahol $k = \frac{\mu_0}{2\pi}$. Tudjuk viszont, hogy $F=B_1*I_2*l$. A két egyenletből következik, hogy egy vezető körül I áram hatására, d távolságban létrejövő mágneses indukció: $B = \frac{\mu * I}{2\pi * d}$.

Zárt felület fluxusa: $\Psi = \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$.

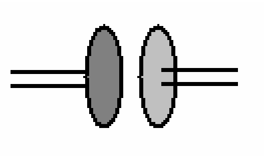
Indukciótörvény (Faraday-törvény): Adott egy A felület, és $\vec{B}(t)$, időben változó mágneses indukció. (A-n áthaladó.)Továbbá adott egy vezetőhurok (l). Ez a vezetőhurok határolja A-t. Az indukált feszültség $U_i = -\frac{d\Psi}{dt}$. Továbbá tudjuk, hogy $U_{A \to B} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$. Ha most l-t kettéosztjuk egy kis réssel (A és B pontokkal) akkor felírhatjuk, hogy $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \int_B^A \vec{E} d\vec{l} + \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$, ahol a jobb oldali első tag a vezetőre vonatkozik, így az 0. Ha most a feszültség képletébe beírjuk U_i-t, akkor kapjuk, hogy: $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$, hiszen $\Psi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$. Megjegyzés: nem szükséges a tényleges fizikailag létező vezető jelenléte l mentén!



Gauss-törvény: Adott egy A zárt felület $\vec{n}$ normálissal, és adott $\vec{E}$. Ha adott a térben ρ sűrűségű töltés, akkor tudjuk, hogy az általa létrehozott elemi elektromos térerősség:
$d\vec{E} = \dfrac{\rho dV}{4\pi * \varepsilon * r^2}$. Ez alapján szuperpozíció segítségével elő tudjuk állítani $\vec{E}$-t. Ekkor $\vec{E}$ és az elemi irányított felületdarabka skalárszorzata: $\vec{E}d\vec{A} = EdA\cos\alpha$, ahol α a dA felület térbeli látószöge. (A teljes térbeli látószög 4π.) Ekkor integrálással kapjuk, hogy:
$\oint_A \vec{E}d\vec{A} = 4\pi * r^2 * E = 4\pi * r^2 * \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon * r^2} = \dfrac{Q}{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}\int_V \rho dV$. Ha az egyenletet beszorozzuk ε-nal, akkor a végeredmény: $\oint_A \vec{D}d\vec{A} = \int_V \rho dV$.

Gerjesztési törvény (Ampére-törvény): Adott egy A felület, melynek határa l. A görbén belül halad i áram. Ω a dl ívdarab látószöge (A teljes síkbeli látószög 2π). Ekkor
$\vec{B}d\vec{l} = Bdl\cos\alpha = Brd\Omega$, ahol α a $d\vec{l}$ és $\vec{B}$ által bezárt szög. Tudjuk, hogy $B = \dfrac{\mu * I}{2\pi * r}$. Ezt beírjuk az egyenletbe, és kapjuk, hogy: $Bdl = \dfrac{\mu * I}{2\pi * r} * rd\Omega$. Most integrálunk:
$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \dfrac{\mu * i}{2\pi} * 2\pi = \mu i$. Leosztunk μ-vel: $\oint_l \vec{H}d\vec{l} = i = \int_A \vec{J}d\vec{A}$, ahol $\vec{J}$ és $d\vec{A}$ jobbsodrású rendszert alkotnak.

Probléma a gerjesztési törvénnyel: Tekintsük először a folytonossági egyenletet:



$\oint_A \vec{J}d\vec{A} = -\dfrac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\dfrac{d}{dt}\oint_A \vec{D}d\vec{A}$. Az utolsó lépés a Gauss-törvényből következik. Nézzünk most egy példát. Legyen adott egy kondenzátor. A fegyverzetek elé felírhatjuk, hogy $\oint_A \vec{J}d\vec{A} = i$, a fegyverzetek közé pedig, hogy $\oint_{A'} \vec{J}d\vec{A}' = 0$. Ezek alapján $\oint_{l'} \vec{H}d\vec{l}' = 0$ a fegyverzetek közt, ami nem igaz.

Megoldás: $\oint_A \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{A} = 0$ (hiszen A zárt felület), amiből kifolyólag
$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{A}$, ahol $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$-t eltolási áramsűrűségnek nevezzük.

Tér és közeg kapcsolata, a közeg hatása: Vákuumban mindig igaz az az összefüggés, hogy $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$. Ha viszont adott valamilyen közeg, akkor a következő igaz: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, ahol $\vec{P}$ a polarizáció vektor. (Látható tehát, hogy vákuumban $\vec{P} = \vec{0}$.) Tudjuk, hogy $\vec{P} = n * \alpha * \vec{E}$, ha az adott közegünk lineáris, ahol n az elemi dipólusok száma, és α a polarizációs állandó. Így tovább folytatva az eredeti egyenletünket, kapjuk, hogy: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + n * \alpha * \vec{E}$.
Emeljünk most ki $\varepsilon_0\vec{E}$-t! Azt kapjuk, hogy $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}\left(1 + \dfrac{n\alpha}{\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0\vec{E}(1+\kappa) = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$.
Természetesen csak lineáris közegre.
Vákuumban igaz az is, hogy $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$. Ha anyag is jelen van, akkor az egyenlet így módosul: $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$. Az $\vec{M}\left(\vec{H}\right)$ függvény általában bonyolult, nemlineáris. Ha viszont a

közeg lineáris (azaz nem ferromágneses a közeg) akkor $\vec{M} = n * \alpha * \vec{H}$. Ezt beírva az egyenletbe, kapjuk, hogy $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + n\alpha\vec{H}\right) = \mu_0\vec{H}(1+n\alpha) = \mu_0\vec{H}(1+\kappa) = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$. Itt jegyezzük meg, hogy általában $\varepsilon_r \geq 1$, de például paramágneses anyagoknál μ_r <1, viszont ferromágneses anyagok esetében μ_r >>1.

Beiktatott térerősség: Adott egy σ fajlagos vezetőképességű folyadék, és ebbe merülő két elektróda. Tudjuk, hogy $\vec{E}$ és U a pozitív elektróda (katód) felől mutat az anód felé. A rendszer pontos leírásához viszont be kell vezetni a beiktatott térerősség fogalmát. Így azt tudjuk mondani, hogy $\vec{J} = \left(\vec{E} + \vec{E}_b\right)\sigma$. Ez alapján üresjárási esetben (J=0) $\vec{E} = -\vec{E}_b$, viszont ha $\vec{J} \neq \vec{0}$ akkor $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_b$.

Maxwell-egyenletek:

1. Az első egyenlet a gerjesztési törvény általánosított alakja: $\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{A}$. Igaz ez, ha veszünk egy kis pontot, és körülötte egy l zárt görbét, ami A felületet zár be (Az A felület normálisa($\vec{n}$) és l természetesen jobbrendszert alkotnak.). Tegyük ezt meg úgy, hogy A értéke kicsi legyen. Ekkor felírhatjuk a jobb oldalra, hogy $\int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{A} \cong \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\Delta A * \vec{n}$. A bal oldalt változatlanul hagyjuk. Osszunk le most ΔA-val! $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\oint_l \vec{H}d\vec{l}}{\Delta A} = \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$. Vegyük észre, hogy a bal oldal éppen $rot\left(\vec{H}\right)$! Ez alapján $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.
2. A második egyenletet az indukciótörvényből származtathatjuk, az elsőhöz hasonló módon. Így azt fogjuk kapni, hogy $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.
3. A harmadik egyenlethez a zárt felület fluxusára felírt egyenletre van szükség. Azaz $\oint_A \vec{B}d\vec{A} = 0$. Ez igaz akkor, ha veszünk egy pontot, és az köré egy kicsi A felületet, ami V térfogatot fog közre. Tegyük ezt meg úgy, hogy V kicsi legyen! Ha leosztunk ezzel az elemi térfogattal akkor kapjuk, hogy $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_A \vec{B}d\vec{A}}{\Delta V} = 0$. A bal oldal most $\vec{B}$ divergenciáját adja. Azaz a végeredményünk: $div\left(\vec{B}\right) = 0$.
4. A negyedik egyenletet a harmadikhoz hasonlóan származtatjuk a Gauss-törvényből. Vagyis $div\left(\vec{D}\right) = \rho$.

Tudjuk, hogy ha van egy vektormezőnk, és vesszük a rotációjának a divergenciáját, akkor 0-t kapunk. Tegyük ezt meg az első egyenlettel: $div\left[rot\left(\vec{H}\right)\right] = div\left[\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right]$. Ez alapján pedig $div\left[\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right] = 0$.

Ehhez a 4 egyenlethez tartozik még 3 kiegészítő egyenlet, ami az egyenletekben szereplő

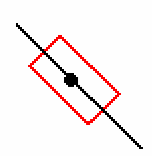
mennyiségek között teremt kapcsolatot: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ és $\vec{J} = \sigma\vec{E}$
Összefoglaló táblázat a Maxwell-egyenletekhez:

Név	Integrális alak	Differenciális alak	Differenciáloperátoros alak
Gerjesztési törvény (Ampére-törvény)	$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{A}$	$rot(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$
Indukciótörvény (Faraday-törvény)	$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B}d\vec{A}$	$rot(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Gauss mágneses törvénye	$\oint_A \vec{B}d\vec{A} = 0$	$div(\vec{B}) = 0$	$\langle\nabla,\vec{B}\rangle = 0$
Gauss-törvény	$\oint_A \vec{D}d\vec{A} = \int_V \rho dV$	$div(\vec{D}) = \rho$	$\langle\nabla,\vec{D}\rangle = \rho$

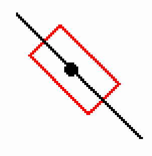
Az egyenletek közül a differenciális alakot akkor érdemes használni, ha egy adott pont kis környezetét vizsgáljuk.

Inhomogén közeg: Amikor megvizsgáltuk a közeg hatását, a közeget homogénnek tekintettük. Most nézzük meg, hogy mi történik akkor, ha ez nincs így. Ezt legegyszerűbben úgy tudjuk szemléltetni, ha két homogén, de egymástól különböző tulajdonságú közeg határfelületét kezdjük vizsgálni. A vizsgálati módszerünk a következő lesz mind a négy esetben: Kiválasztunk egy adott pontot a két közeg határán, majd körülvesszük egy zárt görbével, vagy felülettel. (Ez a vizsgált mennyiségből, és a felhasznált egyenletből logikusan következni fog.) Majd ezek után a görbét vagy felületet rázsugorítjuk a két közeg határára, és figyeljük, hogy mi történik a vizsgált mennyiség tangenciális és normális komponenseivel.

1. Első esetben a pontunkat egy l görbével vesszük körbe, és az indukciótörvénnyel fogunk számolni. A két közeg lényeges tulajdonsága, hogy különbözőek a relatív dielektromos állandóik. Ezeket jelöljük ε_1-gyel és ε_2-vel. Legyen Δh az l görbének a közegek határaira merőleges kiterjedése. Mivel $\Delta h \to 0$, ezért ezeken az oldalakon az integrál értéke is 0 lesz $\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}d\vec{A}$ bal oldalán. Figyelembe véve ezt, és azt, hogy $\vec{B}$ időben állandó, kapjuk, hogy $\Delta l * \vec{E}_{1,t} - \Delta l * \vec{E}_{2,t} = 0$. Ebből az következik, hogy $\vec{E}_{1,t} = \vec{E}_{2,t}$. (Vektoriálisan felírva: $\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$.)

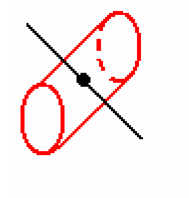


2. A második esetben a pontot szintén egy l görbével vesszük körbe, de most a gerjesztési törvénnyel számolunk. A két közeg lényeges különbsége a relatív mágneses permeabilitásaik különbsége. Legyen Δh az l görbének a közegek határaira merőleges kiterjedése. Mivel $\Delta h \to 0$, ezért ezeken az oldalakon az integrál értéke is 0 lesz $\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{A}$ bal oldalán. Figyelembe véve ezt, és hogy $\vec{D}$ időben állandó, felírhatjuk, hogy $(\vec{H}_{1,t} - \vec{H}_{2,t})\Delta l = \vec{J}_n\Delta h\Delta l + \frac{\partial\vec{D}_n}{\partial t}\Delta h\Delta l$. A jobb oldal második tagja 0, az első tagban pedig felismerhetjük a $\vec{J}_n\Delta h = \vec{K}$ felületi áramot. Ez a közegek határai mentén folyik. Így



tovább írva az egyenletet kapjuk, hogy $\vec{H}_{1,t} - \vec{H}_{2,t} = \vec{K}$. (Vektoriálisan felírva: $\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{K}$.)

3. A harmadik esetben a pontot egy zárt A felülettel vesszük körbe. (Például egy ΔA alapterületű, Δh magas hengerrel, ahol Δh merőleges a közegek határaira.) A használt összefüggés pedig a Gauss-törvény. A közegek közti lényeges különbség a különböző relatív dielektromos állandó. Mivel $\Delta h \to 0$, ezért a paláston vett integrál értéke is 0. Így most felírhatjuk ,hogy $-\vec{D}_{1,n}\Delta A + \vec{D}_{2,n}\Delta A = \rho\Delta h\Delta A$. Vegyük észre, hogy ha $\Delta h \to 0$ akkor $\rho\Delta h \to \sigma$. Így végül azt kapjuk, hogy $\vec{D}_{2,n} - \vec{D}_{1,n} = \sigma$. (Vektoriálisan felírva: $\vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma$.)



4. A negyedik esetben a harmadikhoz hasonló módon dolgozunk a harmadik Maxwell-egyenlettel. A közegeknek a relatív mágneses permeabilitásuk különböző. Végeredményül azt kapjuk, hogy $\vec{B}_{1,n} = \vec{B}_{2,n}$. (Vektoriálisan felírva: $\vec{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$.)

Végeredményben azt mondhatjuk, hogy két közeg határán az elektromos tér tangenciális összetevője és a mágneses tér normális összetevője folytonosan mennek át. Ezzel szemben az elektromos tér normális összetevője, és a mágneses tér tangenciális összetevője ugrásszerűen megváltozhatnak.

<u>További következtetések:</u>

- Tegyük fel, hogy az első közeg fémes vezető. Ekkor σ ~∞. Mivel $E = \frac{J}{\sigma}$, ezért E~0. Ekkor viszont a E tangenciális része is 0. Tehát a fém felszínére merőleges az elektromos térerősség.
- Tegyük fel, hogy az első közeg ferromágneses anyag. Ekkor ideális esetben μ ~∞. Azaz $H = \frac{B}{\mu} \to 0$ .Az előzőhöz hasonló megfontolások alapján H_2 merőleges a ferromágneses anyag felszínére.

<u>Energia összefüggések:</u> Az elektromos tér teljesítménysűrűsége: $p_e = \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$. Ezt idő szerint kiintegrálva megkapjuk az elektromos tér energiasűrűségét: $w_e = \int p_e dt = \int \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}dt = \int_0^D \vec{E}d\vec{D}$.

Ezzel analóg módon a mágneses tér összefüggései: $p_m = \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, illetve $w_m = \int p_m dt = \int \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}dt = \int_0^B \vec{H}d\vec{B}$. Lineáris közeg esetén egyszerűbbek az összefüggések: $w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$, illetve $w_e = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} = \frac{1}{2}\mu H^2$. A kettőt összeadva adódik, hogy: $w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$.

<u>Energia átalakulások:</u> Kíváncsiak vagyunk a teljesítményre. Tudjuk, hogy $p = \frac{\partial w}{\partial t}$. Praktikussági okokból beszorzunk -1-gyel, és beírjuk az egyenletbe p_e és p_m értékét. Így

$-\frac{\partial w}{\partial t}=-\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$. Ezek után a gerjesztési törvényből kifejezzük, hogy $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=-\vec{J}+rot\vec{H}$, az indukciótörvényből pedig, hogy $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=-rot\vec{E}$. Írjuk ezeket vissza az egyenletbe. Így kapjuk, hogy $-\frac{\partial w}{\partial t}=-\left(-\vec{E}\vec{J}+\vec{E}\,rot\vec{H}-\vec{H}\,rot\vec{E}\right)$. Most észrevesszük, hogy $\vec{H}\,rot\vec{E}-\vec{E}\,rot\vec{H}=div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$. Ezt beírva az egyenletbe: $-\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\vec{J}+div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$. Tudjuk azt is, hogy $\vec{J}=\left(\vec{E}+\vec{E}_b\right)\sigma$. Ebből kifejezve $\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\sigma}-\vec{E}_b$. Írjuk be ezt is az egyenletünkbe! $-\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{J^2}{\sigma}-\vec{E}_b\vec{J}+div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$. Az egyenlet jobb oldalán lévő első kifejezés a hővé alakuló teljesítmény, a második a betáplált teljesítmény, míg a harmadik az úgynevezett áramló teljesítmény. Ha most ki szeretnénk terjeszteni az egyenletet egy V tartományra, akkor az egyenlet minden tagját térfogat szerint kell integrálnunk. Ez a harmadik tagnál érdekes. Bevezetve a Poynting-vektort, és alkalmazva a Gauss-Osztrogradszkij-tételt a következőket kapjuk: $-\frac{\partial}{\partial t}\int_V w dV=\int_V \frac{J^2}{\sigma}dV-\int_V \vec{E}_b\vec{J}dV+\oint_A \vec{S}d\vec{A}$.

Ideális vezető: Képzeljük el a következő példát: Adott egy generátor és egy fogyasztó. Köztük pedig vezetékek. A generátor U feszültséget ad le, és ennek hatására i áram indul meg a vezetéken. A vezetékek az egyszerűség kedvéért legyenek téglalap keresztmetszetűek. A két vezető távolsága legyen d, a vezetők szélessége l. és vastagságuk v, hosszuk pedig h. A vezetéket ideálisnak képzeljük el, azaz $\sigma=\infty$. Feltesszük, hogy d<<l, így E megadható úgy, mint a síkkondenzátor esetében, azaz $E=\frac{U}{d}$. H-ra pedig a következő összefüggést írhatjuk fel: $H=\frac{i}{l}$, hiszen a gerjesztési törvény bal oldalán lévő integrál közelítő értéke Hl, a jobb oldal pedig i. Tehát Hl=i. Tudjuk, hogy $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$. Mivel $\vec{E}\perp\vec{H}$, ezért $S=EH=\frac{Ui}{dl}$. Ha most kíváncsiak vagyunk a generátor felől a fogyasztó felé áramló teljesítményről akkor a következőt tehetjük: Vegyük körbe a generátort egy A zárt felülettel úgy, hogy a fogyasztó az A-n kívül legyen, majd integráljuk ezen felületen a Poynting-vektort! Mivel a vezetékeken kívül S=0, ezért $\oint_A \vec{S}d\vec{A}=Sld=\frac{Ui}{dl}*ld=Ui$. Fontos megjegyezni, hogy a generátor felől a fogyasztó felé áramló energiát nem a töltések szállítják, hanem a vezetékek mentén létrejövő elektromágneses tér.

Veszteséges vezető: Az összeállítás hasonló az előzőhöz, de most σ legyen véges érték! Ekkor a vezető belsejében lesz térerősség: $E_v=\frac{J}{\sigma}=\frac{i}{lv\sigma}$, ahol a v index a mennyiség „vezető irányú” mivoltára utal. Ebből az következik, hogy $\vec{E}$ és $\vec{H}$ nem lesznek egymásra merőlegesek. Ebből kifolyólag bizonyos S vonalaknak a vezetőn kell végződniük, így fedezve

a vezető veszteségét. $S_v = E_v H = \frac{i}{lv\sigma}\frac{i}{l}$, a teljesítmény pedig $P_v = S_v hl = \frac{i^2}{l^2 v\sigma}hl = \frac{i^2 h}{lv\sigma}$.
Észrevehetjük viszont, hogy $\frac{h}{lv\sigma} = R_{vezető}$, azaz $P_v = i^2 R_{vezető}$.

Maxwell-egyenletek megoldhatósága: Először is a Maxwell-egyenletekről tudjuk, hogy kielégítik az energiamegmaradás elvét. Legyen adott egy A zárt felületünk, ami egy V térrészt fog közre. A felületen belül ismerjük $\rho, \vec{J}, \varepsilon, \mu, \sigma$ értékeket. Ha adott a gerjesztésünk egy $t_0 \le t \le \infty$ intervallumban, és az A felület mentén valamelyik peremfeltétel, valamint a V térrészben a térvektorok $\left(\vec{B}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{H}\right)$ t=t_0-beli kezdeti értékei, akkor a Maxwell-egyenletek megoldása egyértelmű. A peremfeltételek a következők lehetnek: vagy $\vec{E}_t$-t vagy $\vec{H}_t$-t kell ismerni.

Az elektrodinamika felosztása a Maxwell-egyenletek alapján:

- Az elektrosztatika egyenletei: Elektrosztatikáról akkor beszélünk, ha nincs időbeli változás, és csak nyugvó töltések vannak, azaz formálisan $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, és $\vec{J} = \vec{0}$. Az egyenletek dielektrikumokban értendők. A Maxwell-egyenletek ekkor a következőképpen néznek ki:
  $rot\vec{E} = 0$
  $div\vec{D} = \rho$
  $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, vagy $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
  $w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
- A magnetosztatika egyenletei: Nincs időbeli változás, a teret permanens mágnesek hozzák létre. Ebben az esetben is dielektrikumokban vagyunk. A Maxwell-egyenletek ekkor:
  $rot\vec{H} = 0$
  $div\vec{B} = 0$
  $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$, vagy $\vec{B} = \mu\vec{H}$ (ekkor a teret nem permanens mágnesek hozzák létre)
  $w = \frac{1}{2}\mu H^2$
- A stacionárius mágneses tér egyenletei: Nincs időbeli változás, de megengedjük a mozgó töltések létezését, azaz $\vec{J} \ne \vec{0}$. A mágneses teret még mindig permanens mágnesek hozzák létre. Ezek az egyenletek is dielektrikumokban értendőek. A Maxwell-egyenletek alakja ekkor:
  $rot\vec{H} = \vec{J}$
  $div\vec{B} = 0$
  $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$, vagy $\vec{B} = \mu\vec{H}$ (ekkor a teret nem permanens mágnesek hozzák létre)
- A stacionárius áramlás egyenletei: Abban különböznek a stacionárius mágneses tér egyenleteitől, hogy az egyenleteket vezetőkben értelmezzük. Így a következő egyenleteket kapjuk:
  $\vec{J} = \left(\vec{E} + \vec{E}_b\right)\sigma$
  $rot\vec{E} = 0$
  $div\vec{J} = 0$

- A kvázistacionárius elektromágneses tér egyenletei: Itt már van időbeli változás is. Vezetőkben vizsgáljuk a teret. Vezetőkben $\vec{J} = \vec{E}\sigma$, $\vec{E}_b$ -nek ugyanis nincs túl nagy jelentősége, valamint lassú változás esetén (kis frekvenciákon) $J >> \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|$, azaz az eltolási áramsűrűség elhanyagolható. Most a következő egyenletekhez jutunk:
  $rot\vec{H} = \vec{J}$
  $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
  $div\vec{B} = 0$
  $div\vec{D} = \rho$
  $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{J} = \left(\vec{E} + \vec{E}_b\right)\sigma$
- Az elektromágneses hullámok egyenletei: Ebben az esetben semmit sem lehet elhanyagolhatni.

Vegyük észre, hogy ha $\vec{E}_b = \vec{0}$, és $\rho = 0$, akkor az elektrosztatika és a stacionárius áramlás egyenletei egymással analógok, a következő megfeleltetés szerint: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{E}$, $\vec{D} \leftrightarrow \vec{J}$, és $\varepsilon \leftrightarrow \sigma$.

Szinuszos időbeli változás: Szinuszos változás leírásához mindig, alapértelmezetten áttérünk a komplex írásmód használatára. Ez nem lesz külön jelölve. A térerősséget a hely és idő függvényében így írhatjuk le: $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right\}$, ahol $\vec{E}(\vec{r})$ a komplex amplitúdó. A Maxwell-egyenletek szinuszos alakjának felírásához tudnunk kell, hogy a komplex időbeli deriválás egyenlő egy $j\omega$ -val történő szorzással. Ezek alapján:

$rot\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$
$rot\vec{E} = -j\omega\vec{B}$
$div\vec{B} = 0$
$div\vec{D} = \rho$
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

Ezek után tekintsük az első egyenlet jobb oldalát, és emeljünk ki $\vec{E}$ -t! Azt kapjuk, hogy $\vec{J} + j\omega\vec{D} = \vec{E}(\sigma + j\omega\varepsilon)$, ha kiemelünk még $j\omega$-t is akkor kapjuk, hogy $\vec{J} + j\omega\vec{D} = j\omega\vec{E}\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)$, ahol $\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$ az úgynevezett komplex dielektromos állandó. Jele ε_k. $\varepsilon_k = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)$. Ha $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ >>1, akkor a zárójelben lévő 1-et el lehet hanyagolni. Ez vezetőkben igaz. Ezt a közelítést, miszerint $\varepsilon_k \approx \frac{\sigma}{j\omega}$ kvázistacionárius közelítésnek nevezzük. A teljesítménysűrűség komplex alakja: $p_k = \frac{1}{2}\vec{E}\left(j\omega\vec{D}\right)^* + \frac{1}{2}j\omega\vec{B}\vec{H}^*$. A komplex Poyting-vektor: $\vec{S}_k = \frac{1}{2}\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$, ennek zárt felületi integrálja pedig: $\oint_A \vec{S}_k d\vec{A} = P + jQ$, ahol P a hatásos teljesítmény, Q pedig a meddő teljesítmény.

Az elektrosztatika Poisson egyenlete: Ismerjük az elektrosztatika egyenleteit ,azaz azt, hogy $rot\vec{E} = 0$, $div\vec{D} = \rho$, és $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Ezekben az egyenletekben ε és ρ ismertek, keressük $\vec{D}$-t és $\vec{E}$-t. Az első egyenlet alapján mondhatjuk azt, hogy $\vec{E} = -grad\varphi$, hiszen ha egy vektormező rotációmentes, akkor értelmezhető egy másik vektormező gradienseként. (A negatív előjel magyarázata: A térősség a magasabb potenciálú hely felől az alacsonyabb potenciálú hely felé mutat, míg a gradiens pont fordítva.) Ezek után a harmadik egyenletből kapjuk, hogy $\vec{D} = -\varepsilon\, grad\varphi$. Ezt beírva a második egyenletbe: $-div(\varepsilon\, grad\varphi) = \rho$. Tekintsük ε-t állandónak. Így átrendezéssel adódik a Poisson-egyenlet: $div\, grad\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$.Röviden: $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$, ahol Δ a Laplace differenciáloperátor. Mint tudjuk, szigetelőkben $\rho = 0$. Ezt beírva az egyenletbe, megkapjuk az úgynevezett Laplace egyenletet: $\Delta\varphi = 0$. Nézzük meg, hogy mi a helyzet közeghatáron. Az egyik közeg jellemzői (dielektromos állandó, és potenciál): ε_1, φ_1, a másik közegé pedig: ε_2, φ_2. Közeghatáron $\vec{E}_{1,t} = \vec{E}_{2,t}$, amiből következik, hogy $\varphi_1 = \varphi_2$. Szintén közeghatáron: $\vec{D}_{1,n} = \vec{D}_{2,n}$, amiből pedig az látszik, hogy $\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_n} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_n}$.

A Poisson-egyenlet általános megoldása: A Green-tétel segítségével megállapíthatjuk, hogy: $\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\Delta\varphi}{r} dV + \frac{1}{4\pi}\oint_A \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{1}{r} d\vec{A} - \frac{1}{4\pi}\oint_A \varphi \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} d\vec{A}$. Ebből az egyenletből ismerjük, hogy $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$, de ez kevés. Kell még valami ismeret a peremekről is. (Peremfeltételek.) Esetleg megtehetjük azt is, hogy az egész teret egyszerre vizsgáljuk ($A \to \infty$ és $V \to \infty$), ekkor ugyanis $\varphi \to 0$ teljesül. $\left(\frac{1}{r} szer\, \mathrm{int}\right)$. Ez azért lesz jó, mert ekkor minden felületi integrál eltűnik. Így azt kapjuk, hogy $\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\Delta\varphi}{r} dV$. Ebbe beírva $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$-t és ε-t állandónak tekintve kapjuk hogy: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r} dV$. Ez persze csak végtelen tér esetén igaz. Az integrandus értelmezése a következő: Van valahol a térben egy térfogatdarab, aminek ρ töltéssűrűsége van. Ezen kívül $\rho = 0$. Ezt a teret osztjuk fel dV darabkákra. Ha tehát most egy P pont térerősségét akarjuk tudni, akkor $\varphi(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}_V)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_V|}$, ahol $\vec{r}_P$ a P pont helyvektora, $\vec{r}_V$ a dV helyvektora, és $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_V$ a dV-ből P-be mutató vektor.

A Poisson-egyenlet megoldásának egyértelműsége: Ha adott egy A felület által határolt V térrész, ahol ismerjük ρ-t és ε-t, valamint valamelyik peremfeltételt akkor a Poisson-egyenlet megoldása egyértelmű. A peremfeltételek: Ha a felületen ismerjük φ-t, azaz $\varphi = \varphi_D$, akkor teljesül a Dirichlet peremfeltétel. Ha pedig $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ van előírva, akkor a Neumann peremfeltétel teljesül.

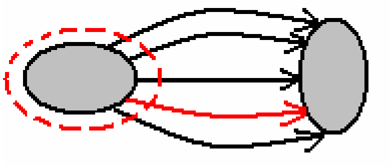
Tétel: Ha Ismerjük egy A felület által határolt V térrészben ρ-t, és ε-t, valamint teljesül valamelyik peremfeltétel, akkor a $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ egyenletnek egy és csak egy megoldása létezik.

Bizonyítás: indirekt módon. Tegyük fel, hogy φ_1 és φ_2 is kielégítik az egyenletet. Legyen ekkor $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Így $\Delta\phi = 0$. Ez után a felületet osszuk két részre. Egy Dirichlet és egy Neumann felületre! A=A_D+A_N.A peremfeltételek: $\phi|_{A_D} = 0$, és $\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{A_N} = 0$ legyenek.

Tekintsük most a Green-azonosságot: $\oint_A \phi\, grad\phi d\vec{A} = \int_V (grad\phi)^2 dV + \int_V \phi\Delta\phi dV$ .Az egyenlet bal oldala nullával lesz egyenlő, hiszen A_D-n: $\phi\, grad\phi = 0$, mert $\phi|_{A_D} = 0$. A_N-n pedig: $grad\phi d\vec{A} = \frac{\partial\phi}{\partial n} dA = 0$, mert $\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{A_N} = 0$. Az egyenlet jobb oldalán lévő második integrál szintén nulla, mert $\Delta\phi = 0$. Így az egyenletünk: $\int_V (grad\phi)^2 = 0$. Ez viszont csak akkor lehetséges, ha $grad\phi = 0$. Ebből viszont az következik, hogy ϕ konstans. Ha viszont figyelembe vesszük, hogy $\phi|_{A_D} = 0$, akkor $\phi = 0$ eredményre jutunk. Vagyis $\varphi_1 = \varphi_2$. Az eddig megismert potenciálfüggvények (ponttöltés tere, hosszú vezető tere…) mind kielégítik a Laplace egyenletet.

<u>Helyettesítő töltések módszere:</u> A gyakorlatban nem pontszerű töltésekkel találkozunk, hanem különféle töltött geometriai formákkal (gömb, henger, sík…). Ha ezeknek a terét szeretnénk számolni akkor jó lenne azt valahogy visszavezetni a jól ismert, egyszerű összefüggésekre. Erre való a helyettesítő töltések módszere. Például adott egy r_0 sugarú gömb, amin van Q töltés. Koncentráljuk a Q töltést a gömb középpontjába. Ekkor a következőket tudjuk mondani: ha $r>r_0$ és $\Delta\phi$=0, akkor $\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$. Ha pedig $\phi(r_0) = \phi_g$ peremfeltétel is teljesül, akkor $\phi_g = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_0}$. Több gömb esetén értelemszerűen szuperponálunk, ha a két gömb távolsága D, sugaraik r_1 és r_2, valamint D>>r_1,r_2. Egy henger esetében a töltéseket a tengelyre koncentráltan vesszük figyelembe. Ha pedig figyelembe kell venni a Föld felszínét is akkor a következő módon járhatunk el. A felszínt egy nagy síkként képzelhetjük el, melynek a potenciálja nulla. Ezt a töltések tükrözésével vehetjük figyelembe. A nulla potenciálos síkra tükrözünk minden töltést, és töltésüket az ellentettjükre változtatjuk. Így a sík nulla potenciálú lesz.

<u>Kapacitás:</u> Adott két elektróda. Az egyik töltése Q, a másiké –Q. Köztük pedig $\vec{E}$ térerősség van. Ekkor a kapacitást a következő módon definiáljuk:



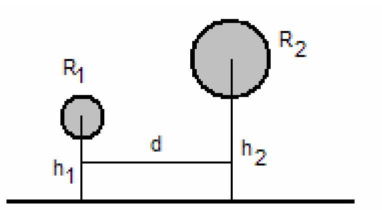
$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_A \varepsilon\vec{E}d\vec{A}}{\int_l \vec{E}d\vec{l}}$. A számláló a Gauss-törvényből következik.

Az A felület az egyik elektródát körülvevő zárt felület, l pedig egy görbe a két elektróda között. Ha kettő helyett N+1 elektródánk van (Az (N+1). a 0 potenciál.),akkor a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= p_{1,1}Q_1 + p_{1,2}Q_2 + \dots + p_{1,N}Q_N \\ \phi_2 &= p_{2,1}Q_1 + p_{2,2}Q_2 + \dots + p_{2,N}Q_N \\ &\dots \\ \phi_N &= p_{N,1}Q_1 + p_{N,2}Q_2 + \dots + p_{N,N}Q_N \end{aligned}$$

, ahol $p_{i,j}$ a potenciáltényező. Röviden írva az egyenletrendszert: $\underline{\phi} = \underline{\underline{p}}\,\underline{Q}$. Ebből kifejezve $\underline{Q}$-t, kapjuk, hogy $\underline{Q} = \underline{\underline{p}}^{-1}\underline{\phi} = \underline{\underline{c}}\,\underline{Q}$, ahol $c_{i,j}$ a kapacitástényező. Az egyenletrendszer együtthatómátrixa értelemszerűen szimmetrikus a főátlóra. A kapacitástényezőkkel viszont nehéz dolgozni, ezért bevezetjük a részkapacitásokat a következő módon: Az egyenletrendszer sorait átalakítjuk a következő módon: A $Q_1 = c_{1,1}\phi_1 - c_{1,2}(\phi_1 - \phi_2) + c_{1,2}\phi_1 - ... - c_{1,N}(\phi_1 - \phi_N) + c_{1,N}\phi_1$ egyenletből elkészítjük a következő egyenletet: $Q_1 = C_{1,1}\phi_1 - C_{1,2}(\phi_1 - \phi_2) + ... + C_{1,N}(\phi_1 - \phi_N)$. Ahol $C_{i,j}$-k a részkapacitások. Könnyen ellenőrizhető, a kapacitástényezők, és a részkapacitások összefüggése: $C_{i,j} = c_{i,1} + c_{i,2} + ... + c_{i,N}$, ahol i=j, valamint $C_{i,j} = -c_{i,j}$, ahol $j \neq i$. A részkapacitásoknak az a haszna, hogy segítségükkel az adott rendszerünket helyettesíthetjük csatolatlan kondenzátorokkal. Ennek megfelelően a részkapacitás-mátrix főátlójában lévő elemeket földkapacitásnak, a többi elemet pedig kölcsönös kapacitásnak nevezzük.

Nézzünk most egy példát a részkapacitásokra! Legyen adott a következő elrendezés: egy R_1 és egy R_2 sugarú fémgömb h_1, illetve h_2 magasságra a nullpotenciállal rendelkező síktól. A középpontjaik x irányban d távolságra vannak egymástól. Az első gömbön Q_1 a másodikon Q_2 töltés van. A közeg pedig levegő. Ha igaz az, hogy R_1, R_2 << h_1, h_2, d, akkor alkalmazhatjuk a helyettesítő töltések módszerét, a síkot pedig töltéstükrözéssel vehetjük figyelembe. Jelöljük Q_1 és Q_2 távolságát a-val, Q_1 és $-Q_2$ távolságát b-vel. Ezek könnyen számolhatók. Ekkor egy-egy pont tere a 2 valós, és a két fiktív töltésünk terének szuperpozíciójával meghatározható. A potenciálok szintén. Írjuk ezeket fel!



$$\phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2h_1 - R_1}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a - R_1} - \frac{1}{b - R_1}\right)$$
$$\phi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a - R_2} - \frac{1}{b - R_2}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{2h_2 - R_2}\right)$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy R_1, R_2 << h_1, h_2, d, akkor néhány dolgot elhanyagolhatunk:

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2h_1}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$
$$\phi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{2h_2}\right)$$

. Mátrixos írásmóddal:

$$\underline{\phi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} - \frac{1}{2h_1} & \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \frac{1}{R_2} - \frac{1}{2h_2} \end{bmatrix}\underline{Q}$$

. Mivel mi a részkapacitásokat keressük, ezért ki kell fejeznünk az egyenletből a töltéseket, azaz meg kell oldani az egyenletrendszert.

$$\underline{Q} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{N}\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} - \frac{1}{2h_2} & -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) & \frac{1}{R_1} - \frac{1}{2h_1} \end{bmatrix}\underline{\phi}$$

, ahol N a Q együtthatómátrixának determinánsa.

$$N = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2h_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{2h_2}\right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2$$

. Ezzel megkaptuk a kapacitástényezőket, hiszen azok ϕ_1 és ϕ_2 együtthatói. Így tehát $c_{1,1} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{N}\frac{1}{R_2 - 2h_2}$, $c_{2,2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{N}\frac{1}{R_1 - 2h_1}$, és

$c_{1,2} = c_{2,1} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{N}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$. Ezek alapján a részkapacitások pedig: $C_{1,1} = c_{1,1} + c_{1,2}$, $C_{2,2} = c_{2,2} + c_{2,1}$, és $C_{1,2} = -c_{1,2} = -c_{2,1} = C_{2,1}$. A rendszer így már helyettesíthető csatolatlan kapacitásokkal.

<u>Az elektromos tér energiája:</u> Láttuk korábban, hogy az elektromos tér energiasűrűsége $w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$. Ezt egy V tartományra integrálva megkapjuk a V tartományban lévő energiát. $W = \int_V wdV = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\vec{D}dV$. Elektrosztatikából láttuk, hogy $\vec{E} = -grad\varphi$. Írjuk be ezt az egyenletbe: $W = \frac{1}{2}\int_V (-grad\varphi)\vec{D}dV$. Tudjuk azt, hogy $div\left(\varphi\vec{D}\right) = grad\varphi\vec{D} + \varphi div\vec{D}$. Írjuk be ezt is az egyenletünkbe. $W = \frac{1}{2}\int_V \varphi div\vec{D} - div\left(\varphi\vec{D}\right)dV$, A Gauss-törvényt is írjuk be az egyenletbe, és az integrandus második tagjára alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt! Azt kapjuk, hogy $W = \int_V \varphi\rho dV - \frac{1}{2}\oint_A \varphi\vec{D}d\vec{A}$. A $\vec{D}d\vec{A}$ skalárszorzatot a következő módon is felírhatjuk: $\vec{D}d\vec{A} = -\varepsilon grad\varphi dA = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}dA$. Ezt beírva az egyenletbe: $W = \int_V \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\oint_A \varepsilon\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dA$. Vizsgáljuk most a végtelen teret. Ha ennek a sugara $r \to \infty$, akkor $\varphi \sim \frac{1}{r}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^2}$. Így tehát $\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^3}$, amiből az következik, hogy $\oint_A \varepsilon\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dA \to 0$. Így azt az összefüggést kaptuk, hogy $W = \int_V \varphi\rho dV$. Ez az összefüggés azonban csak ritkán használható, hiszen olyan V térfogatot igényel, amiben töltések vannak. Így egy olyan térrészben, ahol nincsenek töltések, nem tudunk ezzel számolni. A gyakorlatban a következő módon számolunk: Adott N darab elektróda, és köztük a töltéssűrűség $\rho = 0$. Minden elektródának adott valamilyen ϕ_k potenciálja, és A_k felszíne. Ekkor az energia: $W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\oint_{A_k}\varphi D_n dA = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\phi_k Q_k$, közben alkalmaztuk a Gauss-tételt. Ha adott n+1 darab elektróda (az (n+1). a nullpotenciál), és kapacitástényezőkkel dolgozunk, akkor tudjuk, hogy $Q_k = \sum_{i=1}^{N} c_{k,i}\phi_i$. Ezt beírva az egyenletbe: $W = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} c_{k,i}\phi_i\right)\phi_k}_{Q_k}$. Vegyük észre, hogy n+1=2 elektróda esetén a jól ismert $W = \frac{1}{2}CU^2$ képletet kapjuk vissza.

<u>Stacionárius áramok tere:</u> Az elektrodinamika felosztásánál megismertük a stacionárius áramlás egyenleteit:

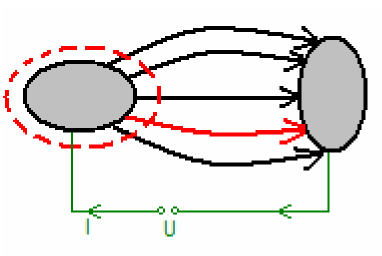
$\vec{J} = \left(\vec{E} + \vec{E}_b\right)\sigma$

$rot\vec{E} = 0$

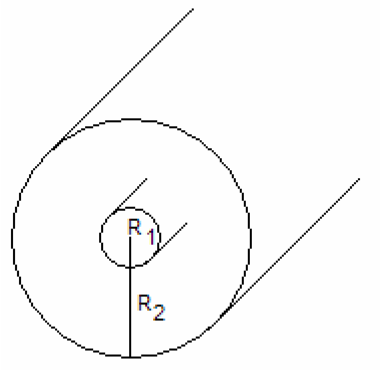
$div\vec{J} = 0$

Az elektrosztatikához hasonlóan $rot\vec{E} = 0$, ebből kifolyólag $\vec{E} = -grad\varphi$. Ezt beírva az első

egyenletbe kapjuk, hogy $\vec{J} = -\sigma grad\varphi + \sigma\vec{E}_b$. ($\vec{E}_b$ ismert mennyiség.). Az áramsűrűség ezen kifejezését írjuk be a harmadik egyenletbe, és tekintsük σ -t konstansnak.
$-div(\sigma grad\varphi) = -div\left(\sigma\vec{E}_b\right)$. Egyszerűsítünk σ -val: $\Delta\varphi = div\vec{E}_b$. Általában azonban $\vec{E}_b = \vec{0}$ -val számolhatunk, így ismét a Laplace egyenlethez jutunk. $\Delta\varphi = 0$. Ez nem is meglepő, hiszen már az elektrodinamika felosztásánál észrevettük az analógiát az elektrosztatika és a stacionárius áramlás egyenletei között.
A két elektróda között felírhatjuk az ellenállást, illetve a vezetést is.



$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint_A \vec{J}d\vec{A}}{\int_l \vec{E}d\vec{l}} = \frac{\sigma\oint_A \vec{E}d\vec{A}}{\int_l \vec{E}d\vec{l}}$. Az $I = \oint_A \vec{J}d\vec{A}$ egyenletben figyelmen kívül hagyjuk a vezetéket, ami az elektródákat táplálja.
Ha most a vezetés ezen képletét összehasonlítjuk a kapacitás $C = \frac{\varepsilon\oint_A \vec{E}d\vec{A}}{\int_l \vec{E}d\vec{l}}$ képletével, akkor egy újabb analógiához jutunk: $C \leftrightarrow G$. E két mennyiség között az összefüggés jól látható: $\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$.
Nézzünk erre egy példát! Legyen a kérdés a koaxiális kábel szigetelési (vagy szivárgási) ellenállása. A kábel belső sugara legyen R1, külső sugara R2. A köpeny nem tökéletes szigetelő, rendelkezzen σ fajlagos vezetőképességgel. A töltéssűrűség pedig legyen q. A kábel vizsgált szakaszának hossza pedig h. Ekkor a h hosszú szakasz kapacitása $C = \frac{Q}{U} = \frac{qh}{\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi h\varepsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$. Az előbb megállapított $\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ összefüggés alapján $G = \frac{\sigma}{\varepsilon}C = \frac{2\pi h\sigma}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$.



Az ellenállás pedig: $R = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi h\sigma}$.
A teljes analógiával viszont vigyázni kell, ugyanis tökéletesen szigetelők esetében $\sigma \cong 0$, de $\varepsilon \neq 0$.
Két különböző vezetőképességű közeg határán az analógia miatt $\vec{J}_{1,n} = \vec{J}_{2,n}$, hiszen $\oint_A \vec{J}d\vec{A} = 0$, és ha egy hengerfelületet rázsugorítunk egy a közeghatáron lévő pontra, akkor az integrálás felületre merőleges komponensei eltűnnek, azaz $-\vec{J}_{1,n}\Delta A + \vec{J}_{2,n}\Delta A = 0$. Kicsit más a helyzet, ha $\sigma_1 = 0$, de $\sigma_2 \neq 0$. Ekkor ugyanis J_1=0, így $J_{1,n}$ is 0. Ekkor viszont $\vec{J}_{1,n} = \vec{J}_{2,n} = \vec{0}$, azaz az áramsűrűség párhuzamos a felülettel. Ennek leírásához a Neumann peremfeltételre van szükség, hiszen $\vec{J}_{2,n} = \vec{0}$ -ból következik, hogy $-\sigma_2\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$.

Időben állandó mágneses tér: A magnetosztatika egyenletei:

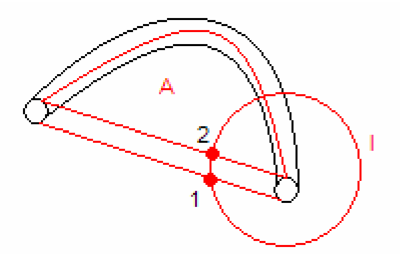
$rot\vec{H} = 0$

$div\vec{B} = 0$

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

Az első egyenletből a következő dolgot írhatjuk fel: $H = -grad\varphi_m$. Ezt beírhatjuk a harmadik egyenletbe: $\vec{B} = -\mu_0(grad\varphi_m) + \mu_0\vec{M}$. Ennek a divergenciája a második egyenlet alapján 0, azaz: $-div(\mu_0 grad\varphi_m) = -div\mu_0\vec{M}$. Egyszerűsítés után a $\Delta\varphi_m = div\vec{M}$ Poisson egyenletet kapjuk. Az analógia miatt bevezetjük a mágneses töltéssűrűség fiktív mennyiségét: ρ_m -t. $\rho_m = div(\mu_0\vec{M})$. Ha $div\vec{M} = 0$, akkor a $\Delta\varphi_m = 0$ Laplace egyenlethez jutunk. Egy rúdmágnest a fiktív mágneses felületi töltéssűrűség, σ_m segítségével tudunk az egyenleteinkben figyelembe venni. Ugyanis $\sigma_m = -\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}$ Neumann peremfeltételhez vezet el minket.

Ha adott egy nagy relatív mágneses permeabilitású közeg vákuumban $(\mu_r >> 1)$, akkor felírhatjuk, hogy $B_{1t} = \mu_0 H_{1t}$ és $B_{2t} = \mu_0 \mu_r H_{2t}$, de mivel $B_{1t} \sim 0$, ezért $\vec{B}$ merőleges a közeg határára.



Legyen most adott egy r0 sugarú vékony vezetőnk, amiben I áram folyik. Mivel most nem tekintünk el a vezető vastagságától, ezért az ábrán látható A felületet a következő módon adhatjuk meg: A vezetővel azonos vastagságú, a vezető által közrefogott térrész felülete. Kérdés, hogy az $\oint_l \vec{H}d\vec{l}$ értéke mindig 0-e? Ezt nem mondhatjuk, mivel az ábrán látható piros l görbére, $\oint_l \vec{H}d\vec{l} = I$. Ha tehát az egyes pont mágneses potenciálja $\varphi_m^{(1)}$, a kettes ponté pedig $\varphi_m^{(2)}$, akkor a $\varphi_m^{(1)} - \varphi_m^{(2)} = I$, tehát a mágneses potenciál értéke „ugrik". Ha ez a vezető többször is meg van tekerve, akkor többször „ugrik" a potenciál. Ezt a potenciált ezért ciklikus potenciálnak nevezzük. Ezt az A felületet modellezhetjük egy $m = \mu_0 I$ momentummal rendelkező kettősréteggel, amelynek egyik oldalán $\varphi_m^{(2)}$, másik oldalán $\varphi_m^{(1)}$ a potenciál. Ez azért jó, mert ha ismerjük a momentumot, akkor ki tudjuk számolni a potenciált.

$\varphi_m = \frac{1}{4\pi\mu_0}\int_A m\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dA = \frac{I}{4\pi}\int_A \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dA$, ahol A a kettősréteg felülete.

Stacionárius áram mágneses tere: Most az alábbi három Maxwell-egyenletből indulunk ki:

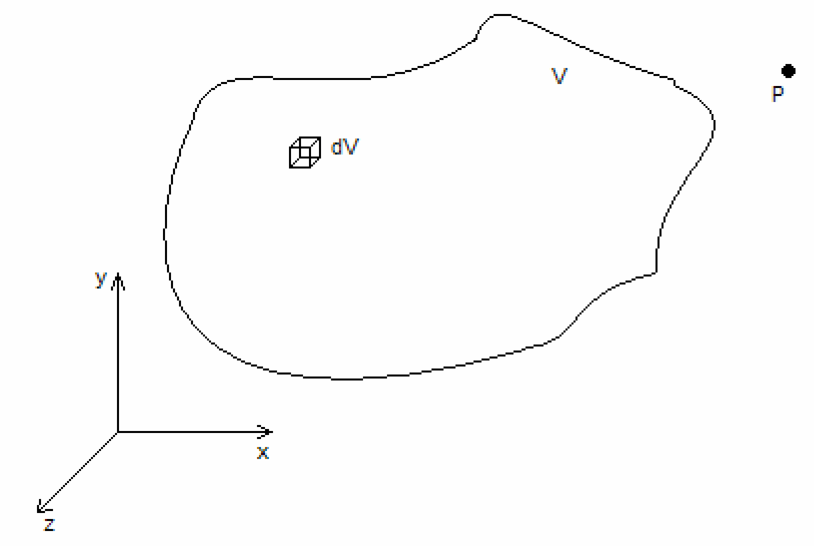
$rot\vec{H} = \vec{J}$

$div\vec{B} = 0$

$\vec{B} = \mu\vec{H}$

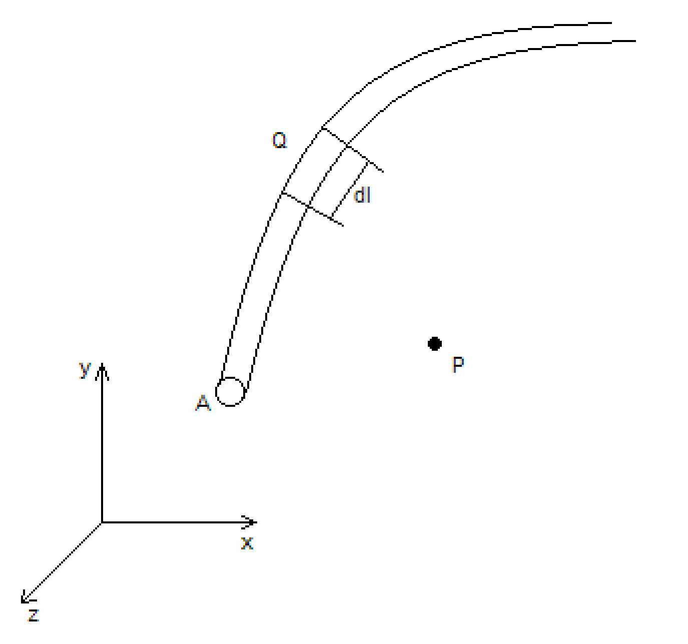
Ha bevezetjük a vektorpotenciál fogalmát, akkor $\vec{B}$ divergenciamentessége miatt mondhatjuk, hogy $\vec{B} = rot(\vec{A})$. Ezt írjuk be a harmadik egyenletbe, és abból fejezzük ki $\vec{H}$ -t! Azt fogjuk kapni, hogy $\vec{H} = \frac{1}{\mu}rot(\vec{A})$. Ezt írjuk be az első egyenletbe, és szorozzunk be μ -vel! Az eredményünk: $rot\,rot(\vec{A}) = \mu\vec{J}$. A kettős rotációképzést viszont át lehet alakítani a következő módon: $\mu\vec{J} = grad\, div(\vec{A}) - \Delta\vec{A}$. A vektorpotenciál egyértelműsítéséért a mértékválasztás alapján mondjuk azt, hogy $div(\vec{A}) = 0$. Ezt egyébként Coulomb-mértéknek nevezzük. Ezt beírva az egyenletbe, megkapjuk a vektoriális Poisson-egyenletet.: $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{J}$. Ismerjük a Laplace operátor vektormezőkön történő alkalmazását, így látjuk, hogy a vektoriális Poisson-egyenlet tulajdonképpen 3 egyenlet (x, y, z, irányú komponensek) összefoglalása egyetlen egyenletbe. Ezen három egyenlet megoldásait ismerjük:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_x}{r}dV \\ A_y &= \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_y}{r}dV \\ A_z &= \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J_z}{r}dV \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV .$$



A jelölések a következők, az ábra szerint: dV helyvektora $\vec{r}\,'$, a P pont helyvektora $\vec{r}$. Ezek alapján a dV-ből P-be mutató vektor az $\vec{r}-\vec{r}\,'$ vektor. A vektorpotenciált a P pontban keressük. Az egyenleteink megoldása azt adja meg. Természetesen bármely tetszőleges P pontban meghatározhatjuk így a vektorpotenciált. Ha pedig az megvan, akkor a térjelllemző vektorok kiszámítása csak néhány lépés.

<u>Biot-Savart törvény:</u> Tekintsük a következő ábrát a következő jelölésekkel: Adott egy vonalszerű vezető, amiben $\vec{J}$ áramsűrűségű áram folyik. Ennek egy $d\vec{l}$ hosszúságú darabját nevezzük Q-nak. Ez a Q pontszerűnek tekinthető, hiszen a vezeték vonalszerű, és $d\vec{l}$ is kicsi. A Q pont helyvektora $\vec{r}\,'$, a P pont helyvektora $\vec{r}$. Az $\vec{r}-\vec{r}\,'$ vektor a P pontból a Q pontba mutat. A továbbiakban használni fogjuk a $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = r_{PQ}$ jelölést. Ekkor $\vec{r}-\vec{r}\,' = r_{PQ} * \vec{r}_0$, ahol $\vec{r}_0$ egy Q-ból P-be mutató egységvektor. Triviális, hogy a $\vec{J}dV$ szorzat előáll $JAd\vec{l}$ alakban, hiszen dV=Adl. Viszont tudjuk, hogy JA=I, így azt mondhatjuk, hogy $\vec{J}dV = Id\vec{l}$. Az



előzőekben láttuk a vektoriális Poisson-egyenlet megoldását. Abban az áramsűrűség térfogati integrálja szerepel. Írjuk be oda, hogy $\vec{J}dV = Id\vec{l}$. Ekkor azt az eredményt kapjuk, hogy $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. Az integrál zártságát a $div\vec{J} = 0$ feltétel miatt követeljük meg. Ez alapján már meg tudjuk mondani a P pontban $\vec{B}$ értékét. (A továbbiakban rot_P jelöli a P pont körüli rotációt.) $\vec{B} = rot_P\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l rot_P\left(\frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l rot_P\left(\frac{d\vec{l}}{r_{PQ}}\right)$. Most teszünk néhány észrevételt az integrandussal kapcsolatban: tudjuk, hogy $rot(u\vec{v}) = grad(u)\times\vec{v} + u\,rot(\vec{v})$. A mi esetünkben $\vec{v} = d\vec{l}$, illetve $u = \frac{1}{r_{PQ}}$. Ezt figyelembe véve látszik, hogy a $rot_P(d\vec{l}) = 0$, hiszen $d\vec{l}$ a Q ponthoz tartozik, de a rotációt P pont körül kell elvégezni. Ezek alapján $grad\frac{1}{r_{PQ}} = -\frac{1}{r_{PQ}^2}\vec{r}_0$. A kapott eredményekkel az integrandusunk a következő alakú lesz: $rot_P\left(\frac{d\vec{l}}{r_{PQ}}\right) = -\frac{\vec{r}_0\times d\vec{l}}{r_{PQ}^2}$. Írjuk ezt be az egyenletünkbe, de cseréljük meg a vektoriális szorzat tényezőit, hogy a negatív előjel eltűnjön! $\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \frac{d\vec{l}\times\vec{r}_0}{r_{PQ}^2}$. Osszunk még le μ-vel, és megkapjuk a Biot-Savart törvényt: $\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_l \frac{d\vec{l}\times\vec{r}_0}{r_{PQ}^2}$. Vegyük figyelembe, hogy ez az alak csak konstans μ esetén használható.

Megjegyzés: az egyenlet differenciális alakja: $d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}_0}{r_{PQ}^2}$ azt sugallja nekünk, hogy ez a megoldás nyitott vezetőkre is érvényes. Ennek viszont nincs fizikai értelme!

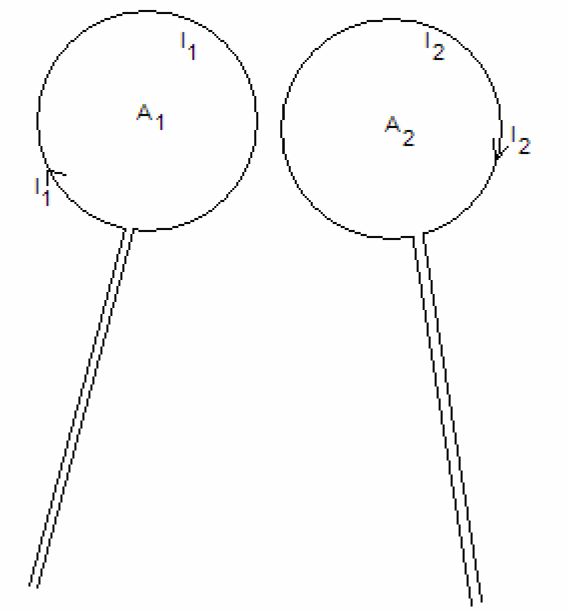
Nézzünk most egy egyszerű példát! Legyen egy végtelen hosszú vezetőnk, amelyik a z tengellyel párhuzamos. Folyjon ebben I áram. Kíváncsiak vagyunk $\vec{B}$-re a vezetőtől r távolságban lévő P pontban. A vektorpotenciál a jelen esetben pusztán z irányú komponensből fog állni, azaz $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$. A_z értéke viszont $A_z = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$. Ez viszont csak x-től és y-tól függ, hiszen a Pitagorasz-tétel alapján $r = \sqrt{x^2+y^2}$. $\vec{B}$ értékét pedig már egyszerűen megkaphatjuk: $\vec{B} = rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$. A második sorban azért van a 0. mert a z-től független r, a harmadik sorban a két 0 pedig azért van, mert a vektorpotenciál csak z irányú komponenst tartalmaz. Kifejtve a determinánst láthatjuk, hogy $B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$, valamint $B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$. B_x kiszámításához $\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right)$-t kell kiszámítani. A lánc-szabály segítségével

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=r\left(\frac{-1}{r^2}\right)*\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{x}{r^2}$. B_y kiszámításához pedig $\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right)$-t kell kiszámolni. Az előbbi módszerhez hasonlóan kaphatjuk, hogy $\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^2}$. Ezeket felhasználva kapjuk, hogy $B_x=\frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{-y}{r^2}\right)$, és $B_y=\frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{x}{r^2}\right)$. Ebből B értéke:

$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}=\frac{\mu I}{2\pi}\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{r^2}=\frac{\mu I}{2\pi r}$. Ez pedig ekvivalens a gerjesztési törvény felhasználásával kapott eredménnyel.

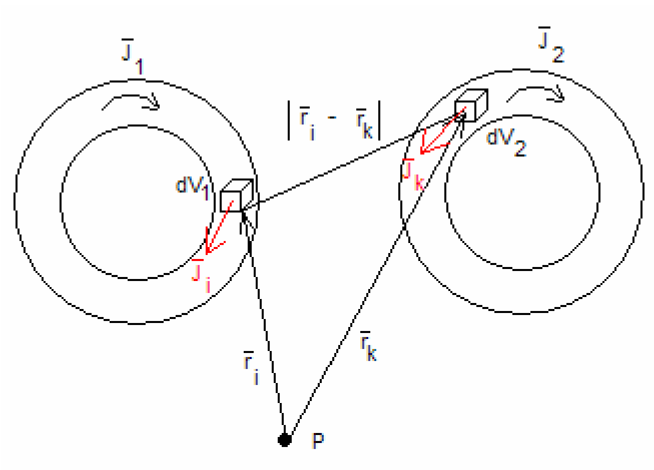
A vektorpotenciál és a fluxus kapcsolata: A következő egyenletben A a felületet, $\vec{A}$ a vektorpotenciált, és $d\vec{a}$ a felületelem-vektort jelöli. Tudjuk, hogy a fluxus $\Psi=\int_A \vec{B}d\vec{a}=\int_A rot\vec{A}d\vec{a}$. Alkalmazva a Stokes-tételt, kapjuk, hogy $\Psi=\oint_l \vec{A}d\vec{l}$.

Vonalszerű vezetők ön-és kölcsönös indukciós együtthatója: Tekintsük a következő ábrát, amin két vonalszerű körvezető látható. A közeg, amiben vannak konstans permeabilitással rendelkezik. Ekkor felírhatunk egy egyenletrendszert a fluxusokra:



$$\begin{aligned}\Psi_1&=L_{11}I_1+L_{12}I_2\\ \Psi_2&=L_{21}I_1+L_{22}I_2\end{aligned}$$

. Az egyenletben L_{11} és L_{22} az önindukciós együtthatók, míg L_{12} és L_{21} kölcsönös indukciós együtthatók. A szimmetria miatt $L_{21}=L_{12}$. A feladat ezen indukciós együtthatók meghatározása, a vezetékeken folyó I_1 és I_2 áramok ismeretében. A második egyenletből kifejezve L_{21}-t: $L_{21}=\left.\frac{\psi_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$. A fluxust viszont ki tudjuk fejezni a vektorpotenciállal, így az egyenletünk a következő formájú lesz: $L_{21}=\frac{1}{I_1}\oint_{l_2}\vec{A}_1 d\vec{l}$. (A továbbiakban természetesen feltételezzük, hogy $I_2=0$.) A vektorpotenciálról viszont tudjuk, hogy $\vec{A}_1=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l}_1}{r}$. Beírva ezt az egyenletbe: $L_{12}=L_{21}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}$. Ezt a formulát Neumann-formulának nevezzük. A kölcsönös indukciós együtthatók tehát megvannak. Nézzük, hogy mit ad a formula, ha önindukciós együtthatókat szeretnénk számolni! $L_{11}=\left.\frac{\psi_1}{4\pi}\right|_{I_2=0}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_1'}{r}$. Ebben az esetben $d\vec{l}_1$, és $d\vec{l}_1'$ is egyazon vezetéken futnak végig. Ezért amikor $d\vec{l}_1=d\vec{l}_1'$, akkor r=0 lenne, aminek következtében a mágneses tér végtelen nagy lenne, ami nem igaz. Tehát ezzel a módszerrel nem tudunk számolni. A megoldást az fogja jelenteni, hogy a mágneses tér energiáját kifejezzük a vektorpotenciál segítségével. Majd látni fogjuk, hogy ebben térfogati integrál van, ezért a vezetők térfogatától nem fogunk tudni eltekinteni, legyen az bármilyen kicsi is. Nézzük tehát a mágneses energiát: $w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H}dV = \frac{1}{2}\int_V rot\left(\vec{A}\right)\vec{H}dV$. Ezt matematikai összefüggések alapján a következő alakúra tudjuk hozni: $w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}rot\vec{H}dV - \int_V \frac{1}{2}div\left(\vec{H}\times\vec{A}\right)dV$. (Azt használtuk fel, hogy $div\left(\vec{H}\times\vec{A}\right) = \vec{A}rot\vec{H} - \vec{H}rot\vec{A}$) Az egyenlet második tagját a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével a következő alakúra hozzuk: $\int_V \frac{1}{2}div\left(\vec{H}\times\vec{A}\right)dV = \oint_A \frac{1}{2}\left(\vec{H}\times\vec{A}\right)$. Ha $A \to \infty$, akkor az integrál értéke 0 lesz, mert $\vec{A} \sim \frac{1}{r}$, valamint $\vec{H} \sim \frac{1}{r^2}$. Ezen megfontolások után az eredményünk az, hogy $w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}rot\vec{H}dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{J}dV$. Ez a teljes tér energiáját jelenti.



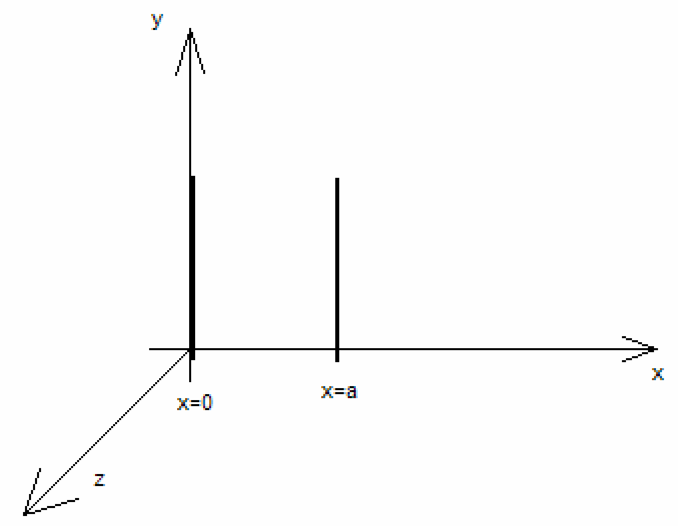
Tekintsük a következő ábrát: az ábrán két körvezető van, amiknek a vastagságától nem tekintünk el. Ezeket felosztjuk elemi térfogatdarabokra. Ezek dV_i és dV_k. A $\vec{J}_1$ és $\vec{J}_2$ vektorok ismertek. $\vec{J}_i$ és $\vec{J}_k$ a dV_i-hez és dV_k-hoz tartozó áramsűrűség-vektorok. A helyvektorok jelölése a szokásos. Tudjuk, hogy a vektorpotenciál: $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V_i} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i)}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_k\right|}dV_i$ alakú. Ezt be fogjuk írni $w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{J}dV$ -be. Ez a kifejezés viszont a <u>teljes</u> tér energiáját adja, ezért nekünk szummázni kell minden i-re és minden k-ra, hogy az egyenlőség fennálljon. Így a következő összefüggéshez jutunk:

$w_m = \frac{\mu}{8\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{V_k}\int_{V_i} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i) * \vec{J}_k(\vec{r}_k)}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_k\right|}dV_i dV_k$. Ez viszont még tovább egyenlő: $w_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\psi_k I_i$, ahol $\Psi_k = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} I_k$. Ezt visszaírva az egyenletbe: $w_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{ik} I_k I_i$. Ha összevetjük az egyenleteinket, akkor azt láthatjuk tehát, hogy

$\frac{\mu}{8\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{V_k}\int_{V_i} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i) * \vec{J}_k(\vec{r}_k)}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_k\right|}dV_i dV_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{ik} I_k I_i$. Ebből az egyenletből már ki lehet fejezni L_{ik}-t: $L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi I_i I_k}\int_{V_k}\int_{V_i} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}_i) * \vec{J}_k(\vec{r}_k)}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_k\right|}dV_i dV_k$. A nevezőben lévő $\left|\vec{r}_i - \vec{r}_k\right|$ jelen esetben is lehet nulla, de az integrál akkor sem lesz szinguláris, tehát ez az egyenlet már jól használható. Az egyenletekben szereplő áramsűrűségeket lehet közelíteni is. $\vec{J}_i \approx \frac{I_i}{A_i}$, illetve $\vec{J}_k \approx \frac{I_k}{A_k}$. Az ezekben a kifejezésekben szereplő A-k természetesen a vezetők keresztmetszeti felületeit jelentik.

A Laplace-Poisson egyenlet megoldása: Az elektromágneses térre jellemző vektorok meghatározásakor a skaláris vagy a vektoriális Laplace-Poisson egyenlethez jutottunk. Az egyenlet megoldására több módszer is van. Ezek közül az egyiket, a helyettesítő töltések módszerét már láttuk korábban. Ez a módszer használható elektrosztatikai, áramlási és mágneses tér esetében. A lehetőségek azonban korlátozottak. Nézzünk most új megoldási módszereket!

A parciális differenciálegyenlet (PDE) közvetlen megoldása: Két esetet fogunk megkülönböztetni. Az egyik az 1 dimenziós eset lesz, a másik pedig a magasabb dimenziószámú eset.
a) Egy dimenziós eset. Nézzünk erre egy példát! Legyen adott egy síkkondenzátor! Ezt azért



tekinthetjük egy dimenziósnak, mert y és z irányban nulla a változás. Legyen a kondenzátor belsejében adott ρ és ε. A Laplace-Poisson egyenlet ekkor a következő alakú: $\frac{d\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$. Az egyenlet két integrálással egyszerűen megoldható. Integrálunk egyszer: $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon}x + c_1$. Majd még egyszer: $\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}x^2 + c_1 x + c_0$. A két konstans megadásához szükség van a peremfeltételekre. A mi példánkban ez azt jelenti, hogy a kondenzátoron U_0 feszültség van. Vagyis $\varphi(x=0)=0$, és $\varphi(x=a)=U_0$.

Az első egyenletből kapjuk, hogy $c_0=0$, a másodikból pedig, hogy $c_1 = \frac{U_0}{a} + \frac{\rho a}{2\varepsilon}$. Ez alapján a potenciálfüggvényünk: $\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2 + \left(\frac{U_0}{a} + \frac{\rho a}{2\varepsilon}\right)x$.

A térerősség pedig: $E(x) = -grad\varphi(x) = \frac{\rho}{\varepsilon}x - \left(\frac{U_0}{a} + \frac{\rho a}{2\varepsilon}\right)$.

b) Magasabb dimenziós eset. Mi a három dimenzióssal fogunk most foglalkozni, abból is az olyanokkal, amikre $\Delta\varphi = 0$. Ilyen esetben a változók szeparálásával érhetünk el eredményeket. Ez azt jelenti, hogy a potenciálfüggvényünk: $\varphi(x,y,z) = X(x)*Y(y)*Z(z)$ alakban felírható. Ezen végrehajtva a Laplace operátort, a következőket kapjuk:

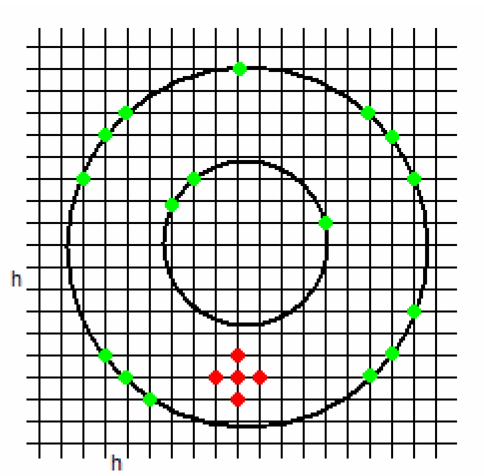
$\Delta\varphi = \frac{d^2X}{dx^2}YZ + \frac{d^2Y}{dy^2}XZ + \frac{d^2Z}{dz^2}XY = 0$. Osszuk el az egyenletet XYZ-vel!

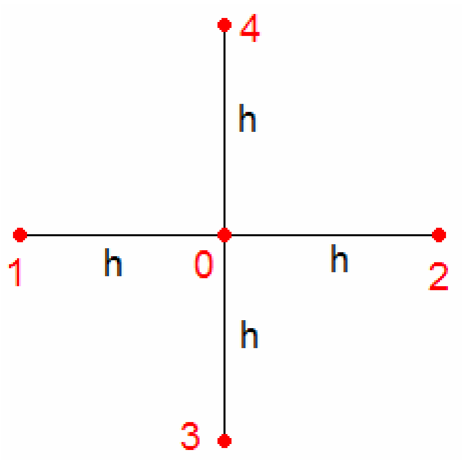
$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$. Látható, hogy ez az egyenlet szétesik három különálló egyenletre, hiszen ha valamelyik két változót lefixáljuk, akkor a harmadik is állandó marad. Így az alábbi megállapításokat tehetjük: $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2$; $\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2$ valamint

$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2$. A megkötésünk csak annyi, hogy $-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0$, hiszen csak ekkor teljesül az eredeti egyenletünk. Ezekből az egyenletekből már közvetlenül megmondhatjuk X(x), Y(y) és Z(z) függvényeket. (Például próbafüggvény módszerrel.) Ezek alapján $X(x) = A * \sin(\alpha x) + B * \cos(\alpha x)$, $Y(y) = C * \sin(\beta y) + D * \cos(\beta y)$, valamint $Z(z) = Ee^{\gamma z} + Fe^{-\gamma z}$. Az egyenletekben szereplő A, B, C, D, E, F, α, β, γ értékeket pedig a peremfeltételek alapján tudjuk meghatározni.

Numerikus megoldás: A numerikus megoldások a függvényt nem adják meg, csak a függvényértékeket bizonyos helyeken. A gyakorlatban azonban ez is elég, hiszen ha kellően sok pontban ismerjük a függvényértékeket, akkor akár interpoláció segítségével megadhatunk olyan megoldásokat, amik a valóságot elég jól közelítik. Numerikus módszereket akkor alkalmazunk, amikor az analitikus megoldás túl bonyolult, vagy ha nincs is szükségünk a matematikailag korrekt megoldásra. Természetesen a pontosságot meg tudjuk választani, ez csak az erőforrásainktól függ. A numerikus megoldások másik nagy előnye, hogy könnyen, és jól algoritmizálhatóak. A három módszer, amit részletesebben megvizsgálunk, a véges differenciák módszere, az integrálegyenletek módszere, és a végeselem-módszer. Nézzük most ezeket sorban!

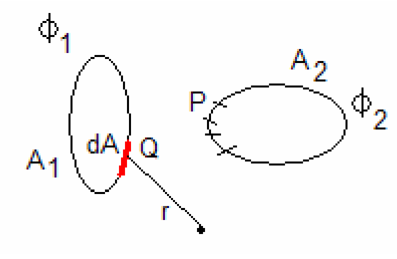
Véges differenciák módszere: Rács-módszernek is nevezik. A módszer lényege, hogy a vizsgált tartományra h rácsszélességű négyzetrácsot fektetünk, majd ennek segítségével dolgozunk tovább. 2 dimenzióban fogjuk megvizsgálni a megoldást. Ez azt jelenti, hogy $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, tehát E_z=0. Ekkor a következő egyenletet tudjuk felírni: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f$. Ebben az egyenletben f az ismert gerjesztő függvényünk. Ez mellett még ismertek a peremfeltételek. Tekintsük a bal oldali ábrát! Ezen egy koaxiális kábel keresztmetszete látható. A rácspontokban vagyunk kíváncsiak a φ értékeire. Amelyik rácspont a peremre esik, ott készen is vagyunk, hiszen a peremfeltételek ismertek. Ezek a pontok az ábrán zöld színűek. A maradék pontok közül kiválasztunk 5 pontot. Ezek az ábrán pirossal vannak jelölve. Fontos, hogy a pontok egymáshoz képest az ábrán látható módon helyezkedjenek el. Az egyszerűség kedvéért kinagyítjuk ezt az öt pontot. Ez látszik a jobb oldali ábrán. A rácspontokban lévő potenciálokat lássuk el indexekkel, a következő módon: a nullás indexű pont legyen $\varphi_0 = \varphi_{i,j}$, ahol i az x irányú, j az y irányú indexet jelöli. A többi pont potenciálja ezek után a nullás ponthoz viszonyítva kapja az indexeit. Így tehát a négyes pont a $\varphi_4 = \varphi_{i,j+1}$, az egyes pedig a $\varphi_1 = \varphi_{i-1,j}$. Ezek után x és y irányban is Taylor sorfejtünk. X irányban a





következő eredményre jutunk: $$\begin{aligned}\varphi_{i-1,j} &= \varphi_{i,j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-h) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{h^2}{2} + \dots \\ \varphi_{i+1,j} &= \varphi_{i,j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}h + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{h^2}{2} + \dots\end{aligned}$$ Adjuk össze a két egyenletet, és rendezzük át! Ekkor azt kapjuk, hogy $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j})\frac{1}{h^2}$.
Ugyanezzel a gondolatmenettel y irányban is hasonló eredményre jutunk:
$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = (\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j})\frac{1}{h^2}$. Most ezt a két egyenletet is összeadjuk. Azt fogjuk kapni, hogy $\Delta\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0}{h^2} = f_0$. Beszorozva h^2-tel a $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = h^2 f_0$ egyenlethez jutunk. Ezt minden belső pontra fel kell írni. Így sok egyenletet fogunk kapni, sok ismeretlennel. Ha a Laplace egyenletet akarjuk megoldani, azaz f=0, akkor
$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = 0$, amiből átrendezéssel adódik, hogy $\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4}$. Ez számtani közép. Ezen alapul az úgynevezett Liebmann-módszer. Ennek lényege az, hogy bizonyos belső pontokhoz felveszünk kezdőértékeket, majd ezen számtani középre vonatkozó képlet alapján egy-egy pont értékét korrigálni tudjuk. Ez után már csak iterálni kell. Vegyük észre, hogy a kezdőértékek megválasztása önkényes ugyan, de nem fogja elrontani az eredményt, hiszen a peremfeltételek adottak. Nem triviális a Neumann peremfeltétel figyelembe vétele. A fenti jobb oldali ábra számozását használva az egyes, nullás és kettes pontok a peremen vannak, így a négyes pont hiányzik. Ekkor a peremre tükrözni kell a hármas pont potenciálját. Ugyanis ha $\varphi_4 = \varphi_3$, akkor $E_y = -\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2h} = 0$, azaz teljesül a Neumann peremfeltétel.
3 dimenzióban hasonló módon járhatunk el, csak ott már z irányban is kellenek rácsvonalak.

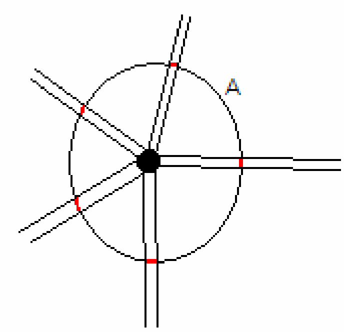
Integrálegyenletek módszere: Adott kettő (vagy több) elektróda. Az első elektródán kijelölünk egy kicsi dA felületet. Ha ez elég kicsi, akkor σdA tekinthető pontszerűnek. Így n darab elektróda esetén felírhatjuk a következő összefüggést: $\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}\frac{\sigma dA}{4\pi\varepsilon r} = \varphi(r)$, a pontszerű töltés terére vonatkozó összefüggés alapján. Ezzel viszont az a gond, hogy a töltéseloszlást nem ismerjük. Ha viszont r az elektródán van, akkor

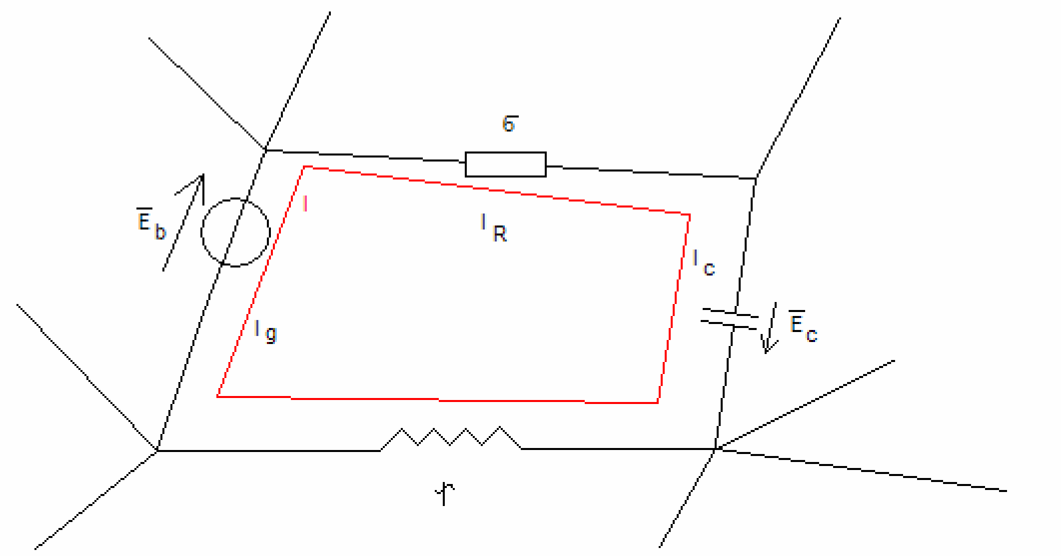


$\phi_i = \sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}\frac{\sigma_j dA_j}{4\pi\varepsilon r_{QP}}$, ahol i=1,2,3…n. Ez alapján σ_j már kiszámolható. Nézzük meg ennek a megoldását numerikusan. Osszunk fel minden felületet kis részekre, amiken σ-t konstansnak tekintünk. Ekkor az integrálást közelíthetjük szummázással. Így azt kapjuk, hogy
$\phi_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_P}\frac{\sigma_k \Delta A_k}{4\pi\varepsilon r_{QP}}$, ahol n_P a felületdarabok számát jelenti, valamint i=1,2,3…n. Így már σ_k kiszámítható. Ez alapján pedig az első összefüggés segítségével a teret is megkaptuk.

Végeselem-módszer: A végeselem-módszer (VEM) nagyon hasonló a véges differenciák módszeréhez. A különbség csak annyi, hogy itt nem ragaszkodunk az ortogonális rácshoz. Felvehetünk három-, négy-, vagy akár ötszögrácsot is. A cél a csúcspontokban meghatározni az ismeretlen függvényt. Most két dimenzióban fogunk dolgozni. (Három dimenzióban annyi a különbség, hogy térben veszünk fel rácspontokat, és felületi integrál helyett térfogati integrállal számolunk.) Felírjuk a következő funkcionált: $F(\phi)=\int_A \overbrace{\frac{1}{2}\varepsilon|grad\varphi|^2}^{\frac{1}{2}\varepsilon E^2}-\rho\varphi dA$. Ez egy energiafunkcionál. Igazolható, hogy az a φ, ami kielégíti a Laplace-Poisson egyenletet, az $F(\phi)$-t minimalizálja. Ez fizikailag tehát azt jelenti, hogy az elrendezésünk energiatartalmi minimális a Laplace-Poisson egyenletnek megfelelő potenciál-eloszlás esetén. A VEM alkalmazásának fő lépései: Először a vizsgált tartományt résztartományokra bontjuk. Ez tetszőleges. Ezeken a résztartományokon a potenciált egyszerű függvényekkel közelítjük (akár elsőfokúakkal is). Ezek a függvények olyanok, hogy az együtthatók a résztartományok meghatározott pontjaiban (pl.: csúcspont) lévő potenciáloktól függenek. Ez után a funkcionált a résztartományokra vett integrálok összegeként számítjuk ki. Ezáltal egy sokváltozós függvényhez jutunk. Ezen függvény szélsőértékének feltétele: $\frac{\partial F(\phi_1,\phi_2,...\phi_N)}{\partial\phi_i}=0$, minden i=1,2…N-re. Ez alapján egy N ismeretlenes algebrai egyenletrendszert kapunk. Ez pedig megoldható az ismeretlen potenciálokra, miután az ismert potenciálokat behelyettesítettük. Ha a csúcspontokban már tudjuk a potenciálokat, akkor interpolációval már a tartományok belsejében is jó közelítést adhatunk a potenciálra.

<u>A Maxwell-egyenletek és a Kirchoff törvények kapcsolata:</u> Elsőként nézzük a csomóponti törvényt! Tekintsük a következő ábrát! Az ábrán egy csomópont látható, amiben vezetékek futnak össze. Ezt a csomópontot egy zárt felülettel vettük körbe. Feltételezzük most, hogy a rendszerben nincs kondenzátor. Ekkor $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$. Ekkor azt tudjuk, hogy $rot\vec{H}=\vec{J}$. Ebből viszont következik, hogy $div\vec{J}=0$. A Gauss-Osztrogradszkij-tétel alapján viszont $\oint_A \vec{J}d\vec{A}=0$. Ez viszont fizikailag azt jelenti, hogy $\sum i_{ki}-\sum i_{be}=0$. Ez pedig a Kirchoff-féle csomóponti törvény. A Kirchoff-féle huroktörvényhez tekintsük a következő ábrát! A hálózatot koncentrált paraméterűnek tételezzük fel. Ez azt jelenti, hogy az összes



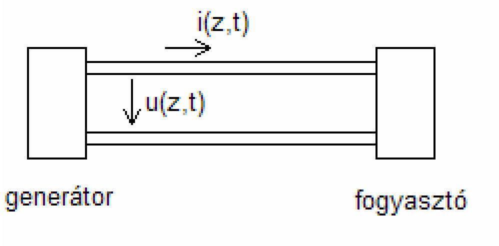


veszteséget az ellenállásra, az elektromos térerősséget a kondenzátor lemezei közé, a mágneses teret pedig a tekercsbe képzeljük, koncentráltan. Az indukciótörvény integrális alakja: $\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B}d\vec{A}$.

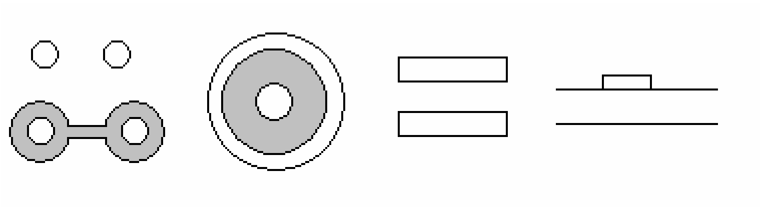
Ez részletesen a következő: $\oint_l \vec{E}d\vec{l} = \underbrace{\int_{l_g} \vec{E}_b d\vec{l}}_{=-U_g} + \underbrace{\int_{l_R} \frac{J}{\sigma} d\vec{l}}_{=i\int \frac{dl}{A\sigma}} + \underbrace{\int_{l_C} \vec{E}_C d\vec{l}}_{=U_C} = -\frac{d\psi}{dt}$. Azt kaptuk tehát, hogy

$-U_g + iR + U_C = -L\frac{di_L}{dt}$. Ez a forma viszont ekvivalens a $\sum U_K = 0$ alakkal, ami pedig Kirchoff huroktörvénye. Jelen esetben, mint az említettük, a hálózatot koncentrált paraméterűnek tekintettük. A valóságot azonban sokkal jobban közelítik az elosztott paraméterű hálózatok, mint például a távvezetékek.

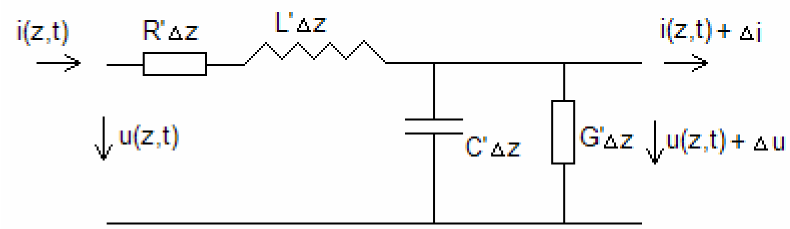
Távvezetékek: Mi a távvezetékek kapcsán kétvezetős rendszerekkel fogunk foglalkozni. A távvezeték a generátor és a fogyasztó között teremti meg a kapcsolatot. A generátor a z=0, a fogyasztó a z=l helyen található.



A vezetékek keresztmetszete sokféle lehet. Az alábbi ábra ezek közül mutat néhányat. Szürke színnel jelöltük a szigetelőanyagot. A bal felső elrendezés neve Lechel-féle távvezetékpár. Balról a második a már jól ismert koaxiális kábel.



Vegyük szemügyre a távvezeték Δz hosszú szakaszát! Ez kinagyítva, és hálózattal helyettesítve a következő ábrán látható módon néz ki. R', G',L',C' a vezetékparaméterek.



Írjuk fel a Kirchoff egyenleteket! A másodrendűen kicsi megváltozásokat el fogjuk hanyagolni. $-u(z,t)+i(z,t)R'\Delta z + L'\Delta z\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + u(z,t) + \underbrace{\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\Delta z}_{\Delta u} = 0$. A csomóponti törvény pedig: $-i(z,t)+G'\Delta z(u(z,t)+\Delta u)+C'\Delta z\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}+i(z,t)+\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\Delta z = 0$. E két egyenlet rendezett alakjait távíróegyenleteknek nevezzük: $\begin{matrix} -\dfrac{\partial u}{\partial z} = R'i + L'\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial z} = G'u + C'\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{matrix}$. Ha R'=0 és G'=0, akkor a vezeték ideális (veszteségmentes). A továbbiakban az időbeli változásra szinuszos változást tételezünk fel. Ennek megfelelően áttérünk a komplex formalizmusra. A távíróegyenletek komplex alakja ez alapján: $\begin{matrix} -\dfrac{dU(z)}{dz} = (R' + j\omega L')I(z) = Z_s I(z) \\ -\dfrac{dI(z)}{dz} = (G' + j\omega C')U(z) = Y_p U(z) \end{matrix}$. Deriváljuk az első egyenletet! (Természetesen hely szerint, hiszen az időbeli változást a komplex formalizmus hordozza magában, így az egyenleteink „csak helytől függőek".) Azt kapjuk, hogy $-\dfrac{d^2U(z)}{dz^2} = Z_s \dfrac{dI(z)}{dz}$. Vegyük észre, hogy az így kapott egyenlet jobb oldalán szerepel a második (az áramra vonatkozó) távíróegyenlet. Írjuk is be oda! $-\dfrac{d^2U(z)}{dz^2} = Z_s Y_p(-U(z))$. A továbbiakban használjuk a $Z_s Y_p = \gamma^2$ helyettesítést. Ekkor a feszültségre a következő differenciálegyenlet adódik: $\dfrac{d^2U(z)}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = 0$. Ezen egyenlet megoldása nem túl nehéz, bárki ellenőrizheti: $U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$. Az U^+ és U^- kifejezések jelentését később látni fogjuk. Hasonló gondolatmenettel az áramra is hasonló összefüggést kaphatunk: $I(z) = I^+ e^{-\gamma z} + I^- e^{\gamma z}$. A két egyenlet azonban nem független egymástól! $I(z) = \dfrac{1}{Z_s}\left(-\dfrac{dU}{dz}\right) = \dfrac{\gamma}{Z_s}U^+ e^{-\gamma z} - \dfrac{\gamma}{Z_s}U^- e^{\gamma z}$. Vezessük be a $\dfrac{\gamma}{Z_s} = \dfrac{1}{Z_0}$ jelölést. Így az áramra vonatkozó összefüggésünk: $I(z) = \dfrac{U^+}{Z_0}e^{-\gamma z} - \dfrac{U^-}{Z_0}e^{\gamma z}$. Tehát arra jutottunk, hogy $I^+ = \dfrac{U^+}{Z_0}$, valamint $I^- = -\dfrac{U^-}{Z_0}$. Vegyük még egy kicsit szemügyre a terjedési együtthatót, azaz a γ-t! $\gamma = \sqrt{Z_s Y_p} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$. Tehát a terjedési együttható általános esetben komplex. Valós részét csillapítási tényezőnek, képzetes részét pedig fázistényezőnek nevezzük. A hullámimpedanciáról láttuk, hogy $\dfrac{\gamma}{Z_s} = \dfrac{1}{Z_0}$. Ebből kifejezve Z_0-t:

$$Z_0 = \frac{Z_s}{\gamma} = \frac{(R' + j\omega L')}{\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}} = \sqrt{\frac{(R' + j\omega L')}{(G' + j\omega C')}}.$$

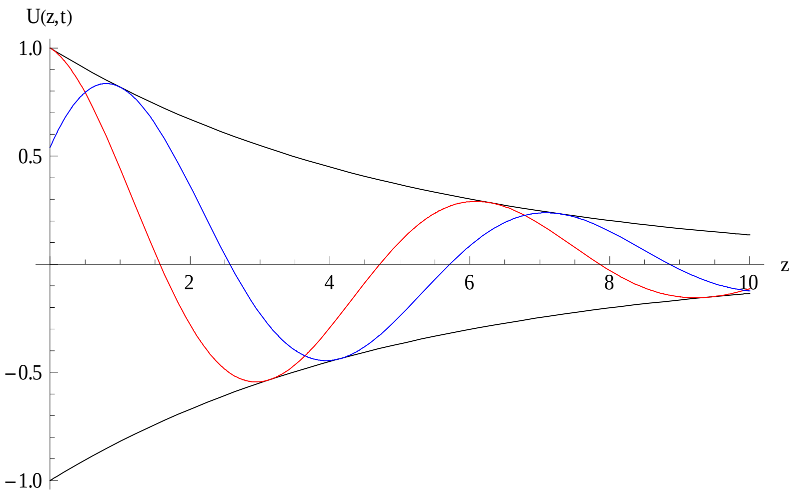
Most foglalkozzunk kicsit a távíróegyenletek megoldásaival, és nézzük meg milyen eredményekre jutunk bizonyos egyszerűsítő feltételek esetén. Először nézzük az ideális vezeték esetét. Ekkor R'=0, és G'=0. Ezeket az értékeket behelyettesítve a terjedési együttható képletébe azt kapjuk, hogy $\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}$. Látható, hogy a terjedési együttható tisztán képzetes, a csillapítási tényező $\alpha = 0$. Igazolható, hogy $L'C' = \mu\varepsilon$. Ha a vezetékünk légszigetelésű, akkor $\mu = \mu_0$ és $\varepsilon = \varepsilon_0$. Ekkor $L'C' = \mu_0\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$. Ekkor a fázistényező $\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \dfrac{\omega}{c}$. Ha a vezeték nem légszigetelésű, akkor azt mondhatjuk, hogy $\mu = \mu_0$, (hiszen a magas permeabilitású anyagok nem szigetelők) és $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Ekkor a fázistényező $\beta = \sqrt{\varepsilon_r}\frac{\omega}{c}$. A hullámimpedancia $Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$. Erről azt kell megjegyezni, hogy ez ideális távvezeték esetében mindig valós.

Kis csillapítású vezetékek esetében azt tudjuk mondani, hogy R'<< $\omega L'$, és G'<< $\omega C'$. Ekkor a terjedési együtthatónk:

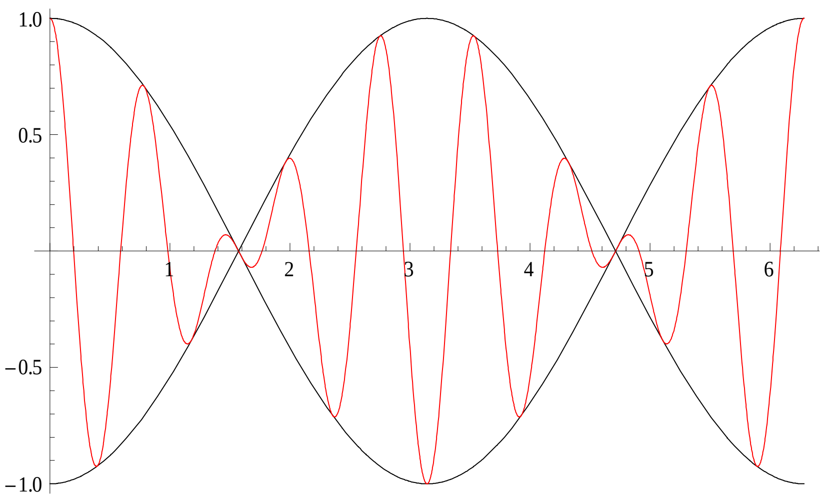
$\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{\left(1-j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1-j\frac{G'}{\omega C'}\right)} \cong j\omega\sqrt{L'C'}\left(1-j\frac{R'}{2\omega L'}\right)\left(1-j\frac{G'}{2\omega C'}\right)$. Jelen esetben alkalmaztuk a Taylor-soros közelítést. Látható, hogy kis csillapítású esetben a terjedési együtthatónak valós és képzetes része is van. Ha a másodrendűen kicsi tagokat elhanyagoljuk, akkor azt mondhatjuk, hogy $\beta \cong \omega\sqrt{L'C'}$, az ideális esethez hasonlóan, valamint $\alpha \cong \frac{R'}{2}\sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2}\sqrt{\frac{L'}{C'}}$. A csillapítási tényező tehát nem függ a frekvenciától. A hullámimpedancia: $Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\sqrt{\frac{\left(1-j\frac{R'}{\omega L'}\right)}{\left(1-j\frac{G'}{\omega C'}\right)}} \cong \sqrt{\frac{L'}{C'}}\left[1+\frac{1}{2j\omega}\left(\frac{R'}{L'}-\frac{G'}{C'}\right)\right]$.

Létezik egy elméleti eset is, az a torzításmentes vezeték. Ebben az esetben $\frac{R'}{L'} = \frac{G'}{C'}$. A csillapítási tényező: $\alpha = R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}$. A fázistényező: $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$. A hullámimpedancia: $Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$.

U(z) és I(z) értelmezése: Először tegyük fel, hogy U^-=0. Ekkor a megoldásaink így néznek ki: $U(z) = U^+ e^{-\gamma z}$, valamint $I(z) = \frac{U^+}{Z_0}e^{-\gamma z}$. Az áram és a feszültség amplitúdó aránya minden helyen egyenlő a hullámimpedanciával: $\frac{U(z)}{I(z)} = Z(z) = Z_0$. A vezetékünk ne legyen ideális, azaz $\gamma = \alpha + j\beta$. Ekkor $u(z,t) = \mathrm{Re}\{U^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\}$. Tegyük fel, hogy U^+ valós. Ekkor $u(z,t) = |U^+| e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$. Ebből az alakból már látszik, hogy miért lesz α a csillapítási tényező, β pedig a fázistényező. A következő ábrán ezt a megoldást ábrázoltuk, két különböző időpontban, feltüntetve a burkoló görbét is. Látszik, hogy a hullám +z irányba halad egy bizonyos v_f sebességgel, amit fázissebességnek nevezünk. Az ábrán a kék színű hullámhoz tartozik a későbbi időpont. Kérdés a hullám fázissebessége. Ezt úgy kapjuk meg, hogy tudjuk, hogy $\omega\Delta t = \beta\Delta z$. Ebből átrendezéssel adódik, hogy

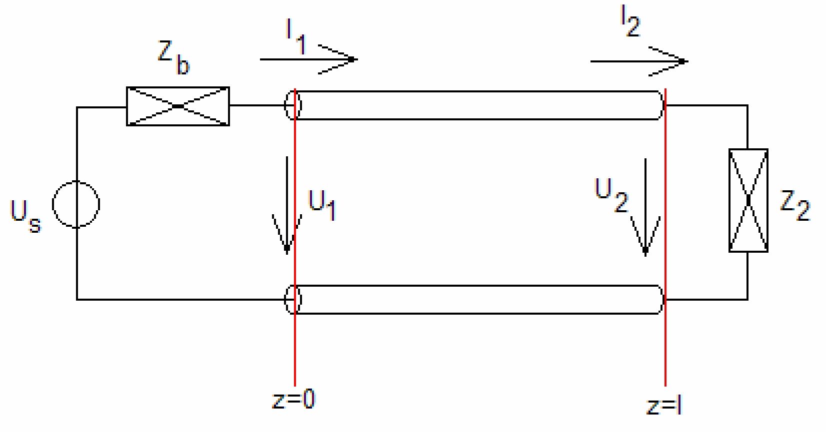


$\frac{\Delta z}{\Delta t} = v_f = \frac{\omega}{\beta}$. Ideális vezeték esetén tudjuk, hogy $\beta = \sqrt{\varepsilon_r}\frac{\omega}{c}$. Így azt kapjuk, hogy $v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. Most már Értelmet nyer az U^+ és U^- jelölés is. Hiszen most $U^-=0$, ami viszont így megmaradt, az egy + irányba terjedő hullám.
Most tegyük fel, hogy $U^+=0$. Ekkor az előzőhöz teljesen hasonló gondolkodásmóddal azt kapjuk, hogy $u(z,t) = \left|U^-\right| e^{-\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$. A hullám tehát –z irányba terjed.
A vezetéken terjedő hullámhosszt is könnyen meghatározhatjuk. Ennek jele λ_v. A $\beta\lambda_v = 2\pi$ egyenletből λ_v-t kifejezve: $\lambda_v = \frac{2\pi}{\beta}$. Ideális vezetékre azt is mondhatjuk, hogy $\lambda_v = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{v_f}{f}$, hiszen $\omega = 2\pi f$, és $v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. Nézzünk erre egy példát. Ha a frekvencia f=50Hz, és légszigetelésű, ideális vezetékünk van, akkor $\lambda_v = \frac{v_f}{f} = \frac{c}{50Hz} = 6*10^6 m$. Erre azt lehet mondani, hogy a hullám nem nagyon jelenik meg a vezetéken. Ha viszont a frekvencia f=50MHz, akkor $\lambda_v = 6m$.
Csoportsebesség: a csoportsebességnek a modulált jelek esetében van nagy szerepe. A távvezetékünk legyen ideális. A gerjesztés legyen ω_1 és ω_2 körfrekvenciájú. Ekkor a feszültség függvénye: $u(z,t) = U_m[\cos(\omega_1 t - \beta_1 z) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 z)]$. Az ismert trigonometrikus azonosság alapján ezt szorzattá tudjuk alakítani a következő módon:
$u(z,t) = 2U_m\left[\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}z\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}z\right)\right]$. Ezen az alakon már látszik, hogy ez olyan, mint egy modulált jel. A második koszinusz a vivő jel, az első a moduláló jel. A vivő jelnek $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ a körfrekvenciája, és $v_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\beta_1 + \beta_2}$ a fázissebessége. A moduláló jel ezzel szemben $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ körfrekvenciájú, és $v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2}$ a sebessége. Ezt a sebességet hívjuk csoportsebességnek. Nézzük meg ennek az ábráját!



Piros színnel van ábrázolva a vivő jel. A fekete a burkoló. A vivő jel hordozza az információt. Ez terjed a csoportsebességgel. Tehát ezért fontos a csoportsebesség, hiszen maga az információ terjed ezzel a sebességgel. Ha a moduláló jel „keskeny”, vagyis $\omega_1 - \omega_2 \to 0$, akkor $\omega_1 \sim \omega_2 = \omega$. Ez esetben $v_f = \frac{\omega}{\beta}$, valamint $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$.

Lezárások: Tekintsük a következő ábrán látható Z_2-vel lezárt U_s gerjesztésű távvezetékpárt!



Amit tudunk az a két távíróegyenlet megoldása: $U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$, valamint $I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}$. Először nézzük, hogy mit mondhatunk a távvezetékpár távolabbi végénél, azaz, ha z=l. Ekkor $U_2 = U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{\gamma l}$, valamint $I_2 = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma l}$. A lezárásból tudjuk, hogy $\frac{U_2}{I_2} = Z_2$. Ha ezt részletesen kifejtjük, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{U_2}{I_2} = Z_2 = Z_0 \frac{U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{\gamma l}}{U^+ e^{-\gamma l} - U^- e^{\gamma l}}$. Vezessük be a reflexiós tényező fogalmát, a következő módon: $r_2 = \frac{U^- e^{\gamma l}}{U^+ e^{-\gamma l}}$. Ekkor $Z_2 = Z_0 \frac{1 + r_2}{1 - r_2}$. Ebből az alakból ki lehet fejezni a reflexiós tényezőt a lezáró impedancia és a hullámimpedancia segítségével: $r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = |r_2| e^{j\delta}$.

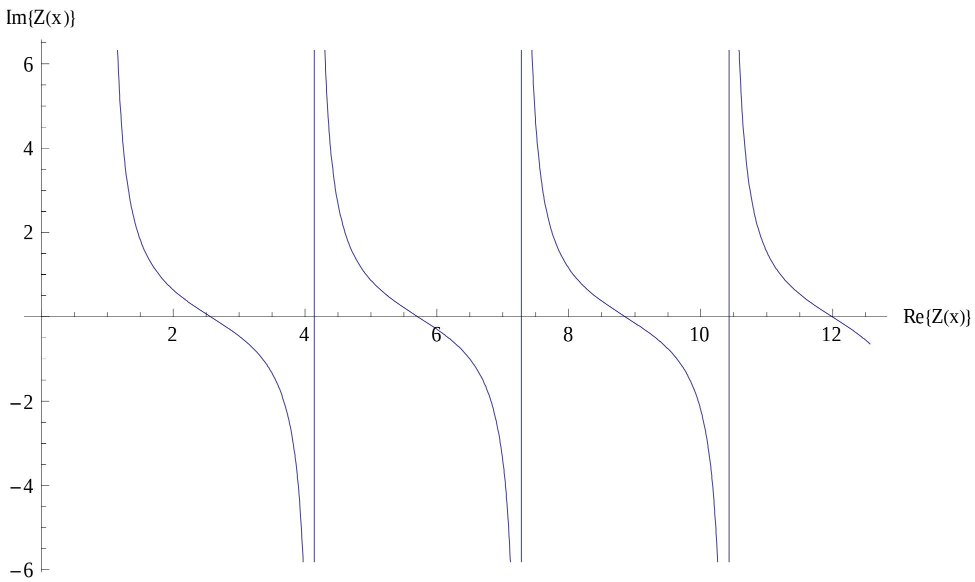
Látható, hogy ha $Z_2 = Z_0$, akkor $r_2 = 0$. Ekkor nincs reflexió. Ezt hívjuk illesztésnek. Most már U^--t ki tudjuk fejezni: $U^- = U^+ r_2 e^{-2\gamma l}$. Ezt visszaírva az eredeti egyenletbe kapjuk, hogy $U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^+ r_2 e^{-2\gamma l} e^{\gamma z}$. Ezt alakítsuk egy kicsit tovább! $U(z) = U^+ e^{-\gamma l}\left(e^{\gamma(l-z)} + r_2 e^{-\gamma(l-z)}\right)$.

Vezessük be a következő jelöléseket: $U^+ e^{-\gamma l} = U_2^+$, illetve l-z=x. Ekkor $U(x) = U_2^+\left(e^{\gamma x} + r_2 e^{-\lambda x}\right)$. Az áram esetében hasonló eredményre jutunk: $I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0}\left(e^{\gamma x} - r_2 e^{-\lambda x}\right)$. Ezekben az egyenletekben már csak U_2^+ az ismeretlen. Ezt viszont már egyszerű megkapni: x=l-t kell behelyettesíteni az egyenletekbe, és akkor megkapjuk az egyes oldalra felírható összefüggéseket. (Itt z=0.)

Nézzünk meg most néhány speciális lezárást! Először nézzük azt az esetet, amikor a reflexiós tényező nulla. Ez esetben csak haladó hullámok vannak a vezetéken. Ez akkor fordul elő, ha $Z_2 = Z_0$. Ekkor $U(x) = U_2^+ e^{\gamma x}$, valamint $I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x}$. A hullámimpedancia $\frac{U(x)}{I(x)} = Z(x) = Z_0$.

A komplex teljesítmény ebben az esetben: $S(x)=\frac{1}{2}U(x)I(x)^{*}=\frac{\left|U_2^+\right|^2}{Z_0{}^*}e^{(\gamma+\gamma^*)x}$. Ha a távvezeték ideális, akkor $S(x)=P(x)=\frac{\left|U_2^+\right|^2}{Z_0}$.

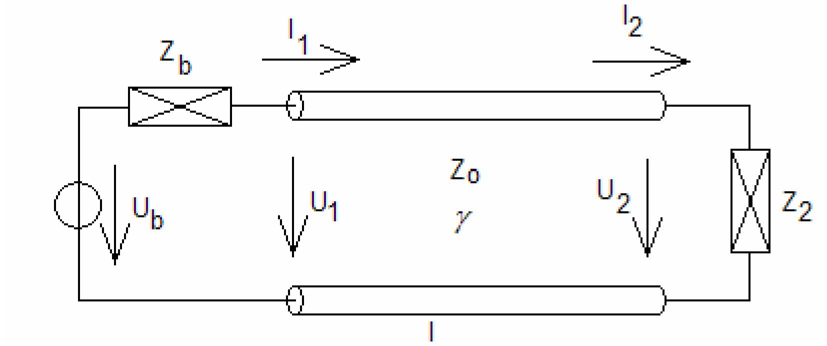
Nézzük meg, hogy mi a helyzet, ha lezárásunk rövidzár, azaz $Z_2=0$. A reflexiós tényező ekkor $r_2=-1$. Ebben az esetben $U(x)=2U_2^+\sinh(\gamma x)$, az áram pedig $I(x)=2\frac{U_2^+}{Z_0}\cosh(\gamma x)$. Ha ideális a vezetőnk, akkor a terjedési együttható tisztán képzetes. Ekkor a hiperbolikus függvényeket átírhatjuk trigonometrikusokra. Ekkor a feszültség és az áram: $U(x)=2jU_2^+\sin(\beta x)$, valamit $I(x)=2\frac{U_2^+}{Z_0}\cos(\beta x)$. Az impedancia ezek alapján: $Z(x)=Z_0\, j\tan(\beta x)$. Visszaírva a feszültséget időfüggő alakba: $u(x,t)=2\left|U_2^+\right|\sin(\beta x)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$. Látható, hogy csak a koszinuszos tag függ az időtől. A többi tényező nem. Ezért ez a függvény egy állóhullámot fog adni, melynek amplitúdója szinuszosan változik. A távvezetéken tehát nincs haladó hullám, csak álló. Ez azt jelenti, hogy az időtől függetlenül lesznek olyan helyek, ahol a feszültség nulla. Ezek a csomópontok. A csomópontok közti távolság $\frac{\lambda_v}{2}$. Azt, amikor a reflexiós tényező abszolút értéke eggyel egyenlő, úgy hívjuk, hogy teljes reflexió. Most láttuk, hogy rövidzárral lezárt távvezeték esetén teljes reflexió lép fel a vezeték végénél. Ha a távvezeték szakadással van lezárva, akkor $r_2=1$, azaz ebben az esetben is teljes reflexióról beszélhetünk. Ekkor a feszültség és áram függvénye: $U(x)=2U_2^+\cosh(\gamma x)$, illetve $I(x)=2\frac{U_2^+}{Z_0}\sinh(\gamma x)$. Ideális esetben ismét könnyen kifejezhetjük a feszültség, áram és impedancia függvényét, az előbb látott módszer segítségével. $U(x)=2U_2^+\cos(\beta x)$, az áram: $I(x)=2j\frac{U_2^+}{Z_0}\sin(\beta x)$, és az impedancia: $Z(x)=\frac{Z_0}{j\tan(\beta x)}$. A következő ábrán az impedanciát ábrázoltuk. Ahol a függvény képe metszi a reális tengelyt, azokban a pontokban találhatóak a



soros rezgőkör rezonanciapontjai. Ahol az aszimptóták metszik a reális tengelyt, ott a párhuzamos rezgőkörrel analóg a távvezetékünk, így ott a párhuzamos rezgőkör rezonanciapontjai vannak. Induktív a hálózatunk, amikor a valós tengely felett vagyunk. Alatta kapacitív.
Ha $r_2 \neq 0$ és $|r_2| \neq 1$, akkor álló és haladó hullámok együtt lépnek fel a vezetéken. Ekkor $r_2 = |r_2| e^{j\delta}$. A következőkben feltételezzük, hogy a távvezeték ideális. A feszültség függvénye: $U(x) = U_2^+ \left(e^{j\beta x} + |r_2| e^{j\delta} e^{-j\beta x}\right)$. Ehhez most hozzáadunk $U_2^+ |r_2| e^{j\beta x} - U_2^+ |r_2| e^{j\beta x}$-t, azaz nullát, de ez segíteni fog nekünk tovább alakítani az összefüggést. Így most
$U(x) = U_2^+ e^{j\beta x}\left(1 - |r_2|\right) + U_2^+ |r_2| e^{j\frac{\delta}{2}} \left(e^{-j\left(\beta x - \frac{\delta}{2}\right)} + e^{j\left(\beta x - \frac{\delta}{2}\right)} \right)$. Az utolsó zárójelben lévő tag viszont összevonható koszinusszá. A végeredményünk tehát az, hogy

$$U(x) = \underbrace{U_2^+ e^{j\beta x}\left(1 - |r_2|\right)}_{haladó \quad hullám} + \underbrace{U_2^+ |r_2| e^{j\frac{\delta}{2}} 2\cos\left(\beta x - \frac{\delta}{2}\right)}_{állóhullám}.$$

Nézzük meg a feszültség amplitúdójának változását! $|U(x)| = |U_2^+| \underbrace{|e^{j\beta x}|}_{=1} \left|1 + |r_2| e^{j\delta} e^{-j2\beta x}\right|$. Ha $\delta - 2\beta x = 0 + k\pi$, akkor a kifejezésnek szélsőértéke van. Ha $\delta - 2\beta x = 2k\pi$, akkor maximuma van, ha $\delta - 2\beta x = (2k+1)\pi$ akkor minimuma van, ahol k=0,1,2…
$|U(x)|_{\max} = |U_2^+| \left(1 + |r_2|\right)$, valamint $|U(x)|_{\min} = |U_2^+| \left(1 - |r_2|\right)$. Ezek alapján be lehet vezetni az úgynevezett állóhullám-arányt. Ezt mi a feszültségre vonatkozóan tesszük meg.
$VSWR = \frac{|U(x)|_{\max}}{|U(x)|_{\min}} = \frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|}$. Látható, hogy ha $|r_2| = 1 \Rightarrow VSWR \to \infty$, illetve ha $|r_2| = 0 \Rightarrow VSWR \to 1$.
A távvezeték, mint kétkapu: Tekintsük a következő ábrát: Ezen egy távvezeték látható, adott



paraméterekkel, és lezárással. Ismerjük a távíróegyenletek megoldásait:
$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$, és $I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}$. Helyettesítsünk ezekbe először z=0-t, majd z=l-t!

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U^+ + U^- \\ I_1 &= \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$

A második esetben pedig:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{\gamma l} \\ I_1 &= \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$. Ebből mátrixegyenletből invertálással kifejezhetjük $\begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$-t, majd az első egyenletbe visszaírva megkaphatjuk a távvezetékünk lánckarakterisztikáját. Könnyen kiszámítható, hogy ezt fogjuk kapni:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0}\sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$. Látható a lánckarakterisztika alapján, hogy az elrendezésünk reciprok és szimmetrikus.

Definiáljuk a bemeneti impedanciát a következő módon:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{Z_2 I_2 \cosh(\gamma l) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma l)}{Z_2 \frac{I_2}{Z_0}\sinh(\gamma l) + I_2 \cosh(\gamma l)} = \frac{Z_2 \cosh(\gamma l) + Z_0 \sinh(\gamma l)}{Z_0 \cosh(\gamma l) + Z_2 \sinh(\gamma l)} = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_0 + Z_2 \tanh(\gamma l)}$$. Ha ezt megtesszük, akkor láthatjuk, hogy a generátor szempontjából a távvezeték, a lezárásokkal olyan, mintha egyedül a bemeneti impedancia lenne rákapcsolva. Így a következő módon is ki lehet fejezni I_1-t és U_1-t: $I_1 = \frac{U_b}{Z_1 + Z_b}$, valamint $U_1 = \frac{U_b Z_1}{Z_1 + Z_b}$. Ha feltesszük, hogy a távvezeték ideális, akkor $Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta l)}$. Ha most $l = \frac{\lambda}{4}$, akkor

$\beta l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\beta l) \to \infty \Rightarrow Z_1 = \frac{Z_0^2}{Z_2}$. Ezt hívjuk impedancia-transzformációnak.

Ha $Z_2 = 0 \Rightarrow Z_1^r = Z_0 \tanh(\gamma l)$. Ez a rövidzárási bemeneti impedancia. Ha $Z_2 \to \infty \Rightarrow Z_1^ü = \frac{Z_0}{\tanh(\gamma l)}$. Ez az üresjárási bemeneti impedancia. Ezek alapján $Z_0 = \sqrt{Z_1^r Z_1^ü}$, illetve $\tanh(\gamma l) = \sqrt{\frac{Z_1^r}{Z_1^ü}}$, amiből γl számolható.

Elektromágneses hullámok: Ebben a témában feltételezzük, hogy $\rho = 0$, $\vec{E}_b = 0$, és a közeg, amiben vizsgálódunk homogén. A téma tárgyalásához elevenítsük fel a Maxwell-egyenleteket!

(1) $rot(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

(2) $rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(3) $div(\vec{B}) = 0$

(4) $div(\vec{D}) = \rho$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, valamint $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

Ezek után vegyük a második egyenlet rotációját! $rotrot\vec{E} = -rot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu rot\vec{H}$. Ez után alakítsuk át az első egyenletet, és írjuk be az imént kapott egyenletbe! Átalakítás:

$rot(\vec{H}) = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Beírás: $rotrot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\left(\sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$. A dupla rotációra vonatkozó összefüggés alapján: $graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$. Mivel $\rho = 0 \Rightarrow div\vec{D} = 0 \Rightarrow div\vec{E} = 0$. Az egyenletünk tehát így néz ki: $\Delta\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$.
Ez az egyenlet pedig egy homogén hullámegyenlet. Ez megy fordítva is, a mágneses tér jellemző vektoraival. Ekkor azt kapjuk, hogy $\Delta\vec{H} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$. Ügyelni kell arra, hogy a két egyenlet megoldásai nem feltétlenül tartoznak össze! Ha viszont megoldjuk például $\vec{E}$-t, akkor a $rot(\vec{E}) = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ egyenlet alapján $\vec{H}$ számolható.
Két esetet különböztetünk meg: Az első eset a szigetelőké, ahol $\sigma = 0$. Az egyenletünk ekkor $\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ alakú, ami nem hullámegyenlet. A másik eset a vezetőké, amikor $\sigma \sim \infty$.
Az egyenlet ekkor $\Delta\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$ alakú. Ezt az egyenletet diffúziós egyenletnek nevezzük.
A továbbiakban időben szinuszos változást fogunk feltételezni, így természetesen a komplex leírást fogjuk alkalmazni. Az egyenletünk ezzel az írásmóddal a következőképpen néz ki: $\Delta\vec{E} - \mu\sigma j\omega\vec{E} - \mu\varepsilon(j\omega)^2\vec{E} = 0$. Az egyenletbe írjuk be a komplex dielektromos állandót, illetve emeljünk ki $j\omega\mu$-t! $\Delta\vec{E} - j\omega\mu j\omega\varepsilon_K\vec{E} = 0$. Most mondjuk azt, hogy $j\omega\mu j\omega\varepsilon_K = \gamma^2$.
Ezt visszaírva az egyenletbe: $\Delta\vec{E} - \gamma^2\vec{E} = 0$. Ez az egyenlet a Helmholtz egyenlet. A mágneses tér: $\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}rot\vec{E}$. Természetesen a mágneses térre is fel lehet írni a Helmholtz egyenletet: $\Delta\vec{H} - \gamma^2\vec{H} = 0$. Ekkor az elektromos térerősség: $\vec{E} = \frac{1}{j\omega\mu}rot\vec{H}$.

<u>Síkhullámok:</u> Síkhullámok esetében $\vec{E}(z)$ csak z-től függ. $\vec{E}$ az (x,y) síkkal párhuzamos síkokban állandó. Ez azzal jár, hogy $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ és hogy $\Delta\vec{E} = \frac{d^2\vec{E}}{dz^2}$. A hullám terjedési iránya mindig z irányú lesz.
A Helmholtz egyenlet: $\frac{d^2\vec{E}}{dz^2} = \gamma^2\vec{E}$. Ez az egyenlet hasonlít a távvezetékek egyenleteire. Az egyenlet megoldása: $\vec{E} = \vec{E}_1 e^{-\gamma z} + \vec{E}_2 e^{\gamma z}$, ahol $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_K}$ a terjedési együttható. Számoljuk ki most ennek a rotációját! $rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{d}{dz}\left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right)$. Így már könnyen ki tudjuk számolni $\vec{H}$-t. $\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}rot\vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{d}{dz}\left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right)$. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy $\vec{E} \perp \vec{H}$, valamint $\vec{H}_z = \vec{E}_z = 0$. Az ilyen hullámokat transzverzális elektromos és mágneses hullámoknak nevezzük. Röviden TEM.

Írjuk fel most a komplex Poynting-vektort!

$$\vec{S}_K = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & E_y & 0 \\ H_x^* & H_y^* & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\vec{e}_z\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right)$$ Legyen $\vec{E} = E\vec{e}_x$! Ekkor

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{d}{dz}\left(\vec{e}_z\times\vec{E}\right) = -\frac{1}{j\omega\mu}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{d}{dz}E & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{dE}{dz}\vec{e}_y .$$

Most már látjuk, hogy $E(z) = E_1^+ e^{-\gamma z} + E_1^- e^{\gamma z}$ alakú. H(z) pedig:

$H(z) = -\frac{1}{j\omega\mu}\left(-\gamma E_1^+ e^{-\gamma z} + \gamma E_1^- e^{\gamma z}\right)$ alakú. Vizsgáljuk meg ennek a kifejezésnek a részeit:

$\frac{\gamma}{j\omega\mu} = \frac{\sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon+\sigma)}}{j\omega\mu} = \sqrt{\frac{j\omega\varepsilon+\sigma}{j\omega\mu}} = \frac{1}{Z_0}$. Ez alapján a közeg hullámimpedanciája:

$Z_0 = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon+\sigma}}$. Írjuk ezt be H(z)-be! $H(z) = \frac{E_1^+}{Z_0}e^{-\gamma z} - \frac{E_1^-}{Z_0}e^{\gamma z}$. Ezek után már fel is állíthatjuk a síkhullám-távvezeték analógiát! Ezt a következő táblázatban foglaljuk össze.

Síkhullám	Távvezeték
E	U
H	I
Z_0	Z_0
γ	γ
μ	L'
-	R'
ε	C'
σ	G'

Síkhullámok reflexiója merőleges beesés esetén: Adott két közeg. A határfelületükön z=0. Mind az elektromos, mind a mágneses térerősség érintőirányú a közeghatáron.. Ekkor az első közeg egyenletei: $E = E_1^+ e^{-\gamma z} + E_1^- e^{\gamma z}$ és $H = \frac{E_1^+}{Z_{01}}e^{-\gamma z} - \frac{E_1^-}{Z_{01}}e^{\gamma z}$. A második közeg egyenletei:

$E = E_2^+ e^{-\gamma z}$ és $H = \frac{E_2^+}{Z_{02}}e^{-\gamma z}$. A második közeg egyenleteiből a második tagok azért maradtak le, mert ott nincs reflexió, mert a közeget z irányban végtelennek tekintjük. A határfelületen z=0, ezért az egyenletek: $E_1^+ + E_1^- = E_2^+$, valamint $\frac{E_1^+}{Z_{01}} + \frac{E_1^-}{Z_{01}} = \frac{E_2^+}{Z_{02}}$, hiszen az elektromos tér tangenciális komponense a közeghatáron állandó. Bevezetve a reflexiós tényezőt: $r_{12} = \frac{E_1^-}{E_1^+}$, az egyenletek a következőképpen alakulnak: $E_1^+(1+r_{12}) = E_2^+$, és $\frac{E_1^+}{Z_{01}}(1-r_{12}) = \frac{E_2^+}{Z_{02}}$. Most osszuk el egymással a két egyenletet! Azt kapjuk, hogy $Z_{02} = Z_{01}\frac{1+r_{12}}{1-r_{12}}$. Ebből már a reflexiós tényező meghatározható. $r_{12} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}}$. A távvezeték analógia alapján ez egy végtelen hosszú Z_{01} hullámimpedanciájú, és egy szintén végtelen hosszú Z_{02} hullámimpedanciájú távvezeték összekapcsolásának felel meg. Ha megvan a reflexiós tényező, akkor $E_2 = E_1^+(1 + r_{12}) = E_1^+ \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}}$, valamint $H_2 = \frac{E_2}{Z_{02}} = \frac{2E_1^+}{Z_{01} + Z_{02}}$. Az (1+r) együtthatót behatolási tényezőnek nevezzük.

Ha a második közeg fém, azaz $\sigma_2 = \infty$, akkor $Z_{02} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2}} \to 0$. Ekkor E_1=E_2=0, és H_2=0. Teljes reflexió lép fel, így az első közegben állóhullámok alakulnak ki. Ez a jelenség az elektromos fal. Távvezetékek esetében ez a rövidzár lezárást jelenti. Vegyük észre mg, hogy a közeghatáron $\vec{K} = \vec{H}_1 \times \vec{e}_z$ felületi áram fog folyni.

Ha a második közeg permeabilitása végtelen $(\mu_2 = \infty)$, akkor $Z_{02} \to \infty$. Ez a jelenség a mágneses fal. Az első közegben szintén állóhullámok alakulnak ki. A szakadással lezárt távvezetékkel analóg.

Tekintsük most a következő, általános esetet: $\vec{E} = \vec{e}_x\left(E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z}\right)$, $H = \vec{e}_y\left(\frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z}\right)$. A terjedési együttható $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$, a hullámimpedancia: $Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}}$. Nézzük meg, hogy mit mondhatunk erről a hullámról szigetelőanyagban, amikor $\sigma = 0$. Ekkor $\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. A csillapítási tényező 0, a fázistényező pedig $\beta = \frac{\omega}{v_f}$. A fázissebesség $v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, ahol $\sqrt{\varepsilon_r} = n$, a közeg törésmutatója. A hullámimpedancia $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$. Levegőben μ_0-t és ε_0-t helyettesítve megkapjuk a szabadtér hullámellenállását, $120\pi\Omega$-t, ami közelítőleg 377Ω.

Most nézzük meg, mi történik ha közeg nem ideális szigetelő, hanem veszteséges! Most $\sigma \neq 0$. Ekkor $\gamma = \sqrt{j\omega\mu j\omega\varepsilon\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)}$. Vezessük be a veszteségi tényezőt, a következő módon: $\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$. Ezt lehetséges mérni. Ezt beírva a terjedési együtthatóba, majd azt közelítve a Taylor-sor első két elemével: $\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\tan\delta} \cong jw\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\tan\delta}{2}\right)$.

Most már a csillapítási tényező nem nulla, hanem $\alpha = \frac{\tan\delta}{2}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

<u>Síkhullám jó vezetőben:</u> Ez a fémeket jelenti, ám most nem ideális fémekről lesz szó, hanem véges vezetőképességűekről. Jó vezető egy fém, ha $\frac{\left|\vec{J}\right|}{\left|\vec{J}_{eltolási}\right|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$. Ha például azt mondjuk, hogy $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \geq 10$, akkor a frekvenciára azt kapjuk, hogy $\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon * 10} \geq f$. A fémekre

$\sigma \sim 10^7 \frac{S}{m}$. Mivel az eltolási áramsűrűséget fémekben nem lehet mérni, ezért a permittivást nem nagyon tudjuk. Legyen $\varepsilon = \varepsilon_0$. Ezeket az értékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy $f \leq 10^{17}\,Hz$. Tehát használható a dolog. (Ahol alkalmazhatóak a Maxwell-egyenletek, tehát nem kvantumfizikai problémákkal szembesülünk, ott alkalmazható.)
Nézzük a terjedési együtthatót! $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$. A nagy σ mellett $j\omega\varepsilon$ -t elhanyagolhatjuk. Így $\gamma \cong \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$. Ebben a kifejezésben a négyzetgyökös tagot jelöljük k-val! Így $\gamma = (1+j)k$. Ez azért jó, mert így látszik, hogy a csillapítási-, és a fázistényező is egyaránt k. Ezen kívül megjegyezzük, hogy a csillapítási tényező nagy. A hullámellenállás: $Z_0 \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{\gamma}{\sigma} = \frac{(1+j)k}{\sigma}$. Ezekkel a jelölésekkel a vezetőben terjedő síkhullám a következő módon írható fel: $\vec{E} = \vec{e}_x\left(E^+e^{-(1+j)kz} + E^-e^{(1+j)kz}\right)$, az áramsűrűség: $\vec{J} = \sigma\vec{E} = \vec{e}_x\left(\sigma E^+e^{-(1+j)kz} + \sigma E^-e^{(1+j)kz}\right)$, a mágneses térerősség pedig: $\vec{H} = \vec{e}_y\left(E^+e^{-(1+j)kz} - E^-e^{(1+j)kz}\right)\frac{\sigma}{\gamma}$.
Végtelen vezető féltér: Nézzük meg most azt az esetet, amikor a hullám egy nagy kiterjedésű vezetővel találkozik. A nagy kiterjedés jelentse azt, hogy z irányban végtelen, y irányban pedig legyen b széles a vezetőnk. Első megállapításunk az, hogy $E^-=0$, mert $e^{(1+j)kz} \to \infty$, ha $z \to \infty$, de végtelen nagy hullám nem lehetséges. Így az elektromos tér $E = E^+e^{-(1+j)kz}$, az áramsűrűség: $J = \sigma E^+e^{-(1+j)kz}$, a mágneses tér pedig: $H = \frac{\sigma}{\gamma}E^+e^{-(1+j)kz}$. A kérdés E^+ értéke. Ezt úgy fogjuk meghatározni, hogy feltesszük, hogy a végtelen félterünk egy (y,z) síkkal párhuzamos síkmetszetén átfolyó áramot ismerjük. Legyen ez I_0. Ennek a felületnek a határát jelöljük l-lel. (Ez az l a végtelenben záródik!) Ekkor azt mondhatjuk, hogy $\oint_l \vec{H}d\vec{l} = I_0$. Az integrál értékét viszont könnyen kiszámíthatjuk, nem fog zavarni, hogy l végtelen, hiszen $\oint_l \vec{H}d\vec{l} = H(z=0)b$. A két egyenlet alapján $H(z=0)b = I_0$. Beírva a mágneses tér helyettesítési értékét: $\frac{\sigma}{\gamma}E^+\underbrace{e^{-(1+j)k0}}_{=1}b = I_0$. Innen már nincs nehéz dolgunk: $E^+ = \frac{I_0}{\sigma b}\gamma$. Ezek után nézzük meg, hogy hogyan változik az áramsűrűség! Az előbb kapott eredményt felhasználva: $J(z) = \frac{I_0}{b}(1+j)ke^{-(1+j)kz}$. Most feltesszük, hogy I_0 valós. Így $|J(z)| = \frac{I_0}{b}\sqrt{2}ke^{-kz}$. A hullámhossz természetesen $\Lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k}$. Az áramsűrűség egy hullámhossznyi távolságra: $J(z=\Lambda) = J_0e^{-2\pi}$, ahol $J_0 = |J(z=0)| = \frac{I_0}{b}\sqrt{2}k$. Ennek segítségével: $|J(z)| = J_0e^{-kz} = \frac{J_0}{e}$, ha kz=1. Ekkor $\frac{1}{k} = \delta$ a behatolási mélység. Ez a jelenség az áramkiszorítás.

Nézzünk erre egy példát! Legyen a frekvencia f=50Hz. A vezető legyen rézből. Ez azt jelenti, hogy $\sigma = 57*10^6 \frac{S}{m}$. A behatolási mélység: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} = 9.44\,mm$. A δ-nál vastagabb vezető végtelen vastagnak tekinthető.
Impedancia (lxb méretű hasábra): Legyen adott most egy hasábunk. X irányban l, y irányban b méretű. Z irányban végtelen. Kérdés ennek az impedanciája. Ezt a teljesítmény segítségével fogjuk meghatározni úgy, hogy tudjuk, hogy $P + jQ = \frac{1}{2} I_0^2 Z_b$. A teljesítményt pedig a Poynting-vektor integráljaként állítjuk elő. Pontosabban annak a mínusz egyszereseként, mert a felületi normális kifelé mutat, de akkor a teljesítmény kiáramló lenne. Továbbá tudjuk azt, hogy teljesítmény csak az (x,y) síkban áramlik át. Ezek után:
$P + jQ = \frac{1}{2} I_0^2 Z_b = -\oint_A \vec{S}_K d\vec{A} = -\frac{1}{2}\oint_A \left(\vec{E}\times\vec{H}*\right) d\vec{A}$. Ez alapján az impedancia:
$Z_b = -\frac{1}{I_0^2}\oint_A \left(\vec{E}\times\vec{H}*\right) d\vec{A}$. Ezt az integrált már nem nehéz kiszámítani:
$Z_b = -\frac{1}{I_0^2} lbE_x(0)H_y^*(0) = \frac{lb}{I_0^2}\frac{I_0\gamma}{\sigma b}\frac{I_0^*}{b} = \frac{l\gamma}{\sigma b} = \frac{l(1+j)}{\sigma b\delta}$. Az impedanciát megkaptuk. Azonban $Z_b = R_b + j\omega L_b$. Jelen esetben jól látszik, hogy $R_b = \omega L_b = \frac{l}{\sigma b\delta}$. Tehát a végtelen vastag vezető váltakozó áramú ellenállása megegyezik a δ mélységű szakasz egyenáramú ellenállásával. Ha a vezető keresztmetszete nem hasáb, hanem valamilyen tetszőleges alakzat, akkor a következőket mondhatjuk. Legyen D a vezető átlagos átmérője, K a kerülete. Ha $D >> \delta$, akkor $R_b = \omega L_b \sim \frac{l}{\sigma K\delta}$.
Kör keresztmetszetű vezető esetén a Helmholtz egyenletet henger-koordinátarendszerben kell megoldani. Ennek eredménye az lesz, hogy $R_0 = \frac{l}{\sigma r_0^2\pi}$, ahol r_0 a vezető sugara, R_0 pedig az egyenáramú ellenállás. Jelöljük x-szel a következő mennyiséget: $x = \frac{r_0}{2\delta}$. Ha x>1, akkor $\frac{R}{R_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x}$, illetve $\frac{\omega L_b}{R_0} = x - \frac{3}{64x}$.
Ha x<1, akkor Rb~R0, valamint $L_b = \frac{x^2 R_0}{\omega} = \frac{r_0^2\omega\mu\sigma}{8\omega}\frac{l}{r_0^2\pi\sigma} = \frac{\mu l}{8\pi}$.
Ha x>>1, akkor R_b~xR_0=$\frac{r_0}{2\delta}\frac{l}{r_0^2\pi\sigma} = \omega L_b$.
Lemez alakú vezető: Jelen esetben a lemeznek van vastagsága is. Legyen ez d. Így most a z=d helyen már lesz reflexió. A távvezeték analógia esetén ez azt jelenti, hogy a távvezeték $Z_{02}=120\pi\Omega$ ellenállással van lezárva. (Szabadtér!) A reflexiós tényező: $r = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$. Z_{02}-t ismerjük, Z_{01} pedig: $Z_{01} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} << Z_{02} \Rightarrow r \to 1$. Ebből viszont az is következik, hogy $E^- = E^+ e^{-2\gamma d}$. Ezt felhasználva: $E(z) = E^+ e^{-\gamma d}\left(e^{\gamma(d-z)} + 1* e^{-\gamma(d-z)}\right)$. A zárójeles tag összevonható: $E(z) = 2E^+ e^{-\gamma d}\cosh(\gamma(d-z))$. Ez alapján már tudjuk az áramsűrűséget, és a

mágneses térerősséget is: $J(z) = 2\sigma E^{+} e^{-\gamma d} \cosh(\gamma(d-z))$, valamint $H(z) = \dfrac{2\sigma E^{+} e^{-\gamma d}}{Z_{01}} \sinh(\gamma(d-z))$. A továbbiakban használjuk az $E^{+} e^{-\gamma d} = E_2^{+}$ jelölést. A terjedési együttható meghatározása nem nehéz, hiszen $\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)k = \dfrac{1+j}{\delta}$, a hullámimpedancia pedig $Z_0 = \dfrac{\gamma}{\sigma}$. A kérdés a lemezünk impedanciája. Ha a b szélességű szakasz árama ismert (b y irányú): $I = \int_0^d J(z) b dz = \dfrac{2\sigma b E_2^{+}}{\gamma} \sinh(\gamma d)$. Így azt kapjuk, hogy $E_2^{+} = \dfrac{\gamma I}{2\sigma b \sinh(\gamma d)}$. Most kiszámítjuk a teljesítményt a bxl méretű lemezre:

$$\frac{1}{2} I^2 (R_b + j\omega L_b) = \frac{1}{2} lb \left(E(0) H^{*}(0) - E(d) \underbrace{H^{*}(d)}_{=0} \right) = \frac{lb}{2} \frac{4|E_2^{+}|}{Z_0^{*}} \cosh(\gamma d) \sinh^{*}(\gamma d)$$

. Ebbe most beírhatjuk az előbbi eredményünket, azaz, hogy $E_2^{+} = \dfrac{\gamma I}{2\sigma b \sinh(\gamma d)}$. Így most $R_b + j\omega L_b = \dfrac{l(1+j)}{\delta\sigma} \dfrac{\cosh(\gamma d)}{\sinh(\gamma d)}$. Jelöljük $\dfrac{d}{\delta}$-t v-vel! Így $R_b + j\omega L_b = \dfrac{l(1+j)}{\delta\sigma} \dfrac{1}{\tanh((1+j)v)}$, mert $\gamma d = (1+j)\dfrac{d}{\delta}$.

Ha v<<1 az azt jelenti, hogy a lemez a behatolási mélységhez képest vékony. Ekkor tanh(x)~x, azaz $R_b + j\omega L_b = \dfrac{l}{\delta b\sigma} \Rightarrow \omega L_b = 0$. Így $R_b = R_0$. Ebben az esetben nincs áramkiszorítás.

Ha v>>1 az azt jelenti, hogy a lemez a behatolási mélységhez képest vastag. Ekkor $\dfrac{\cosh(\gamma d)}{\sinh(\gamma d)} \approx 1$, amiből az következik, hogy $R_b + j\omega L_b = \dfrac{l}{\delta b\sigma}(1+j) \Rightarrow R_b = \omega L_b = \dfrac{l}{\delta b\sigma}$.

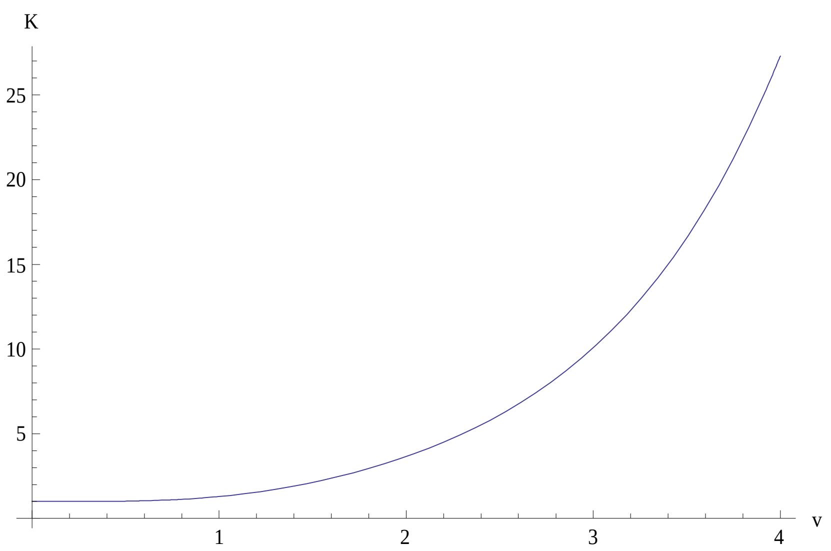
Definiáljuk az árnyékolási tényezőt a következő módon:

$$K = \left| \frac{E(z=0)}{E(z=d)} \right| = \left| \frac{2E_2^{+} \cosh(\gamma d)}{2E_2^{+} \cosh(0)} \right| = |\cosh(\gamma d)| = |\cosh((1+j)v)|$$

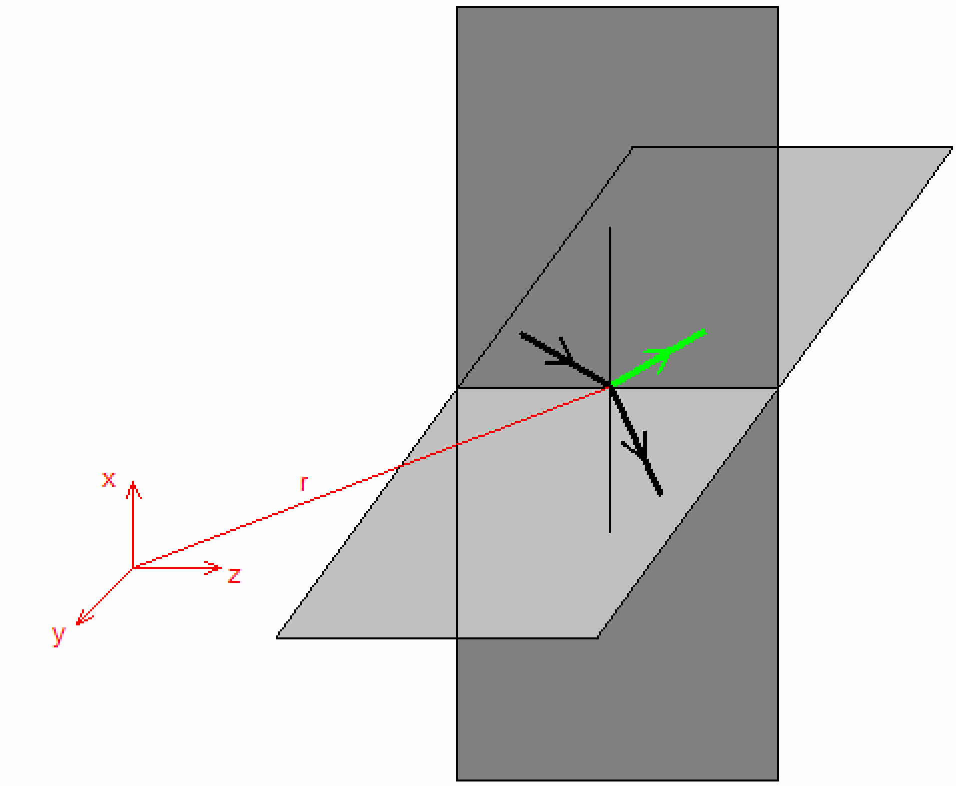
. Ez az utóbbi alak a trigonometrikus azonosságokkal átalakítható, így K értéke a következő lesz:

$$K = \sqrt{\frac{\cosh(2v) + \cos(2v)}{2}}$$

. Ábrázolva ez így fog kinézni:



Síkhullám reflexió ferde beesésnél: Tekintsük a következő ábrát: A világosszürke sík a két



közeg határfelülete. A sötétszürke a reflexió síkja. A Reflexió helyének helyvektora r, az ábrán pirossal van jelölve. A zöld nyíl a visszaverődő hullám, jele $E_1^{'}$, irányvektora. $\vec{e}_1^{'}$ Az érkező hullám jele E_1, irányvektora. $\vec{e}_1$ A behatoló hullám jele E_2 lesz, irányvektora pedig. $\vec{e}_2$. A beesési, visszaverődési, és elhajlási szögek sorban: $\alpha_1;\alpha_1^{'};\alpha_2$ A határfelületen $\left(\vec{E}_1+\vec{E}_1^{'}\right)\times\vec{n}=\vec{E}_2\times\vec{n}$, valamint $\left(\vec{H}_1+\vec{H}_1^{'}\right)\times\vec{n}=\vec{H}_2\times\vec{n}$. Ezek alapján a beeső, visszaverődő, és behatoló hullámok egyenletei: $E_1=E_{01}e^{j\omega\left(t-\frac{\vec{r}\vec{e}_1}{v_1}\right)}$, $E_1^{'}=E_{01}^{'}e^{j\omega\left(t-\frac{\vec{r}\vec{e}_1^{'}}{v_1}\right)}$, valamint $E_2=E_{02}e^{j\omega\left(t-\frac{\vec{r}\vec{e}_2}{v_1}\right)}$. A fázisok egyenlősége akkor áll fenn, ha $\frac{\vec{r}\vec{e}_1}{v_1}=\frac{\vec{r}\vec{e}_1^{'}}{v_1}=\frac{\vec{r}\vec{e}_2}{v_2}$. Az elrendezés geometriájából adódóan ez más alakban: $\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_1^{'}}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$. Az első két tag egyenlőségéből következik, hogy $\alpha_1=\alpha_1^{'}$. Így $\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$. Ezt átrendezve adódik, hogy $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{v_1}{v_2}$. Ha most feltesszük, $\sigma_1=\sigma_2=0$, és $\mu_1=\mu_2=\mu_0$, akkor –mivel $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ - azt kapjuk, hogy $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=n_{2,1}$. A térerősségek ampitúdójára a Fresnel-képletek vonatkoznak.

Nézzük először a transzverzális elektromos beesést. Ez röviden TE beesés. Abból indulunk ki, hogy $E_1+E_1^{'}=E_2$, valamint $H_1\cos\alpha_1-H_1^{'}\cos\alpha_1=H_2\cos\alpha_2$. Legyen $r_{TE}=\frac{E_1^{'}}{E_1}$. Ha

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, akkor $Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$, és $Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$. Ezek alapján már meg lehet határozni a reflexiós tényezőt: $r_{TE} = \frac{Z_{02}\cos\alpha_1 - Z_{01}\cos\alpha_2}{Z_{02}\cos\alpha_1 + Z_{01}\cos\alpha_2}$. Brewster-szögnek hívjuk azt a szöget, amikor a reflektált hullám amplitúdója: $E_1^{'} = 0$.

Ezek után nézzük meg a TM hullám beesését is! A TE módushoz képest annyi a különbség, hogy E és H szerepe felcserélődik. Így, kis számolással adódik, hogy

$r_{TM} = \frac{E_1^{'}}{E_1} = \frac{Z_{02}\cos\alpha_2 - Z_{01}\cos\alpha_1}{Z_{02}\cos\alpha_2 + Z_{01}\cos\alpha_1}$.

Síkhullámok polarizációja: Adott két síkhullám. Ezek között mindig φ a fáziskülönbség. Ezek összegének viselkedéséről fogunk most megállapítani néhány dolgot. Először legyen $E_x = E_1\cos(\omega t)$, és $E_y = E_2\cos(\omega t + \varphi)$. Már az elnevezés is sugallja, hogy ez a két síkhullám tulajdonképpen egy síkhullám x és y irányú komponense. Ha a két egyenletet ilyen általános formában nézzük, akkor az tűnik fel, hogy ez egy ellipszis paraméteres egyenlete. Ez azt jelenti, hogy azon síkhullám elektromos térerősség komponensének vége, amelynek a komponensei fent láthatóak, az (x,y) síkban, egy ellipszist ír le. Ha szűkítünk az általánosságon, és azt mondjuk, hogy $E_1 = E_2 = E_0$, és $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, akkor az ellipszis egy E0 sugarú kör lesz. Ez a jelenség a cirkuláris polarizáció. Ekkor a térerősség-komponensek: $E_x = E_0\cos(\omega t)$ és $E_y = \pm E_0\cos(\omega t + \varphi)$, ahol a pozitív irány az óramutató járásával megegyező forgásra utal.

Abban az esetben ha a fáziskülönbség nulla, lineáris polarizációról beszélünk. Ekkor $E_x = E_1\cos(\omega t)$ és $E_y = \pm E_2\cos(\omega t)$. Az egyenesünk iránytangense értelemszerűen $\tan\alpha = \pm\frac{E_2}{E_1}$. A lineáris polarizáció speciális esete a vízszintes és a függőleges polarizáció. Előbbi esetben $E_y = 0$, utóbbiban pedig $E_x = 0$ teljesül.

Elektromágneses hullámok gerjesztése: Most a tér gerjesztettségi vektoraival fogunk foglalkozni, a Maxwell-egyenletekből kiindulva. Adottnak tekintjük $\vec{J}(\vec{r},t)$, és $\rho(\vec{r},t)$ gerjesztési adatokat. Bevezetjük a vektorpotenciált, és a skalárpotenciált, majd ezekkel fogunk tovább dolgozni. Így Gauss mágneses törvénye a következő alakú: $\vec{B} = rot\vec{A}$, az indukciótörvény pedig: $rot\left(\vec{E} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$. Ebből az egyenletből az látszik, hogy $\vec{E} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ mindig rotációmentes. Így bevezetjük a skalárpotenciált. $\vec{E} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -grad\varphi$. Ezt kicsit átrendezve: $\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$. Most már csak a potenciálokat meg meghatározni. Ehhez szükség van a maradék két egyenletre. A gerjesztési törvénybe beírjuk, hogy $\vec{H} = \frac{1}{\mu}rot\vec{A}$. Így a $rot\left(\frac{1}{\mu}rot\vec{A}\right) = \vec{J} - \underbrace{\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}grad\varphi}_{=\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\vec{E}}$ egyenlethez jutunk. Ezek után μ-t konstansnak tekintjük, és átalakítjuk a dupla rotációt. Az egyenletünk ekkor így néz ki:

$grad\left(div\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}=\mu\vec{J}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon grad\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. A mértékválasztás még nem történt meg. Célszerű olyan mértéket választani, hogy az egyenlet egyszerűsödjön. Jelen esetben a Lorentz-féle feltételt alkalmazzuk, azaz $div\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Ekkor ez egyenletünk az alábbi formára egyszerűsödik: $\Delta\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}$. Ez egy vektoriális, inhomogén hullámegyenlet. Kérdés, hogy φ-t hogyan tudjuk meghatározni. Erre ott van még a Gauss-törvény. Ez a potenciálokkal így néz ki: $div\varepsilon\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\varphi\right)=\rho$. Ezek után tekintsük ε-t is konstansak, és az egyenletbe írjuk be az előbb választott mértéket! Azt kapjuk, hogy $\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}$. Rendezzük még át egy kicsit: $\Delta\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$. Ezzel kaptunk egy inhomogén skaláris hullámegyenletet. Ezen egyenletek megoldásai:

$\vec{A}(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\left(t-\frac{r}{v}\right)\right)}{r}dV$, ahol v-re az adódik, hogy $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

(ξ_1,ξ_2,ξ_3) a gerjesztés helye, és $\frac{r}{v}$ a (ξ_1,ξ_2,ξ_3) pontból (x_1,x_2,x_3) pontba jutáshoz szükséges idő. Magyarul ez egy késleltetést jelent. Ezért ez a potenciál retardált (=késleltetett). Ha megoldásban $\left(t+\frac{r}{v}\right)$ lenne, akkor a potenciál avanzsált (=siettetett) lenne, de akkor a rendszer akauzális lenne, így ennek fizikai tartalma nincs. Hasonló módon a skalárpotenciál is retardált: $\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho\left(\vec{r}_g,\left(t-\frac{r}{v}\right)\right)}{r}dV$, ahol $\vec{r}_g$ a gerjesztés helye. Értelem szerűen mindkét integrálban az r a gerjesztés és megfigyelési pont közötti távolságot jelenti. Mondtuk, hogy a sebességre a $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ összefüggés adódik. Ha $\mu=\mu_0$ és $\varepsilon=\varepsilon_0$, akkor v=c, ami egy fizikai állandó. Ez mellett még μ_0 is fizikai állandó. ε_0 viszont már nem az, hiszen az az $\varepsilon_0=\frac{c^2}{\mu_0}$ összefüggés alapján adódik.

<u>Hertz-dipólus:</u> A Hertz-dipólus egy +Q és egy –Q töltés egymástól l távolságra. Ha a töltések időben állandóak, akkor statikus a dipólus, ha időben változnak, akkor rezgő. Rezgő dipólus esetén a negatív töltés felől áram fog folyni a pozitív töltés felé. Ez az áramkör az eltolási áramok által fog záródni. A továbbiakban a rezgő dipólussal foglalkozunk, szinuszos időbeli változást feltételezve (->komplex írásmód!). A dipólus hosszáról azt tudjuk, hogy $l<<\lambda$, és a megfigyelési pont messze van. Ez azt jelenti, hogy $r>>l$. Az előző pontban kapott eredményeket fogjuk felhasználni, de előtte kicsit átalakítjuk azt. Ott az integrandusban szerepel a következő kifejezés: $\vec{J}dV$. Ezt alakítjuk át: $\vec{J}dV=JAd\vec{l}=Id\vec{l}$. Ekkor a vektorpotenciál: $\vec{A} = \frac{I_0\mu}{4\pi}\int_l \frac{e^{jw\left(t-\frac{r}{v}\right)}}{r} d\vec{l} = A\vec{e}_z = \frac{I_0\mu}{4\pi}\frac{e^{jw\left(t-\frac{r}{v}\right)}}{r}\vec{e}_z$. Ezt azért tudtuk megtenni, mert r értékét állandónak tekintettük, hiszen r>>l. A továbbiakban gömbi koordinátarendszerben dolgozunk. Ennek megfelelően ϑ fogja jelölni az elevációs szöget. (Egy adott pont helyvektorának a z tengellyel bezárt szöge.) Az azimutszöget φ-vel fogjuk jelölni, így az most nem skalárpotenciál. (Azimutszög: egy adott pont helyvektorának vesszük az (x,y) síkra vett merőleges vetületét. Ennek a vetületnek az x tengellyel bezárt szöge az azimutszög.) A harmadik koordináta a gömbi koordinátarendszerben a sugár. Jele: r. A gömbön a jobbsodrás a következő sorrendben van: első r, második ϑ, és a harmadik φ. Ezek után nézzük a vektorpotenciál komponenseit: $A_r = A\cos\vartheta$, $A_\vartheta = A\sin\vartheta$, és $A_\varphi = 0$. A

mágneses térerősség: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} rot\vec{A} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\vartheta} & \frac{\vec{e}_\vartheta}{r\sin\vartheta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\vartheta} & 0 \\ A_r & rA_\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \frac{\vec{e}_\varphi}{r\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)$. Ha

most visszaemlékezünk arra, hogy $\vec{A} = \frac{I_0\mu}{4\pi}\frac{e^{jw\left(t-\frac{r}{v}\right)}}{r}\vec{e}_z$, akkor ezt átírhatjuk gömbi

koordinátarendszerbe: Így most $A_r = \frac{I_0\mu_0 l}{4\pi}\frac{e^{jw\left(t-\frac{r}{v}\right)}}{r}\cos\vartheta$, valamint

$A_\vartheta = \frac{-I_0\mu_0 l}{4\pi}\frac{e^{jw\left(t-\frac{r}{v}\right)}}{r}\sin\vartheta$. Ezek alapján a mágneses térerősség:

$H_\varphi = \frac{I_0 l}{4\pi} e^{jw\left(t-\frac{r}{v}\right)}\left(\frac{1}{r^2} + j\frac{\beta}{r}\right)\sin\vartheta$, ahol $\beta = \frac{\omega}{v}$, és $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$. A másik két komponens: $H_r = H_\vartheta = 0$.

Az elektromos térerősség: $\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, de a skalárpotenciált nem számoltuk ki. Ez viszont nem probléma. Tudjuk, hogy $div\vec{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, ami szinuszos esetben $div\vec{A} = -\mu\varepsilon j\omega\varphi$ alakú, amiből a skalárpotenciál számolható. Ez viszont hosszú. Ezért visszanyúlunk ismét a Maxwell-egyenletekhez. A gerjesztési törvényből kifejezzük a térerősséget: $\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} rot\vec{H}$,

mert az áramsűrűség a dipóluson kívül nulla. $\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\vartheta} & \frac{\vec{e}_\vartheta}{r\sin\vartheta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & H_\varphi \end{vmatrix}$. Ez alapján a

térerősség-komponensek: $E_\varphi = 0$, $E_\vartheta = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0 r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\vartheta H_\varphi\right)$, és

$E_r = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0 r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\vartheta H_\varphi\right)$. Ha ezekbe beírjuk $H_\varphi = \frac{I_0 l}{4\pi}e^{jw\left(t-\frac{r}{v}\right)}\left(\frac{1}{r^2}+j\frac{\beta}{r}\right)\sin\vartheta$ értékét, akkor a következőket kapjuk: $E_r = \frac{I_0 l}{2\pi}\frac{e^{j(\omega t-\beta r)}}{r^2}\cos\vartheta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(1+\frac{1}{j\beta r}\right)$, valamint $E_\vartheta = \frac{I_0 l}{4\pi}\frac{e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}\sin\vartheta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}j\beta\left(1+\frac{1}{j\beta r}+\frac{1}{(j\beta r)^2}\right)$. Ebben az utolsó összefüggésben jelöljük $\left(1+\frac{1}{j\beta r}+\frac{1}{(j\beta r)^2}\right)$-t δ_S -sel. Ez a sugárzási tényező. Ennek segítségével a dipólus környezetét közeltérre, indukciós térre, és távoltérre oszthatjuk. Ha $\beta r = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{\lambda}{4\pi}$. Közel vagyunk a dipólushoz. Itt a dipólus úgy viselkedik, mint egy töltés. A sugárzási tényezőben $\frac{1}{(j\beta r)^2}$ dominál. Jelen esetben $\delta_{közeltér} = -3 - j2$.

Ha $\beta r = 1 \Rightarrow r = \frac{\lambda}{2\pi}$. Ez az indukciós tér. A sugárzási tényezőben $\frac{1}{j\beta r}$ dominál. Jelen esetben $\delta_{indukciós} = -j$.

Ha $\beta r = 2 \Rightarrow r = \frac{\lambda}{\pi}$. Ez a távoltér. A sugárzási tényezőben az 1-es dominál. Jelen esetben $\delta_{távoltér} = -0.75 - j0.5$. A távoltér másik elnevezése a sugárzási tér. A továbbiakban a távoltér viselkedését vizsgáljuk, ugyanis ez lényeges az antennák szempontjából. Az antennák ugyanis szuperpozíció segítségével modellezhetőek Hertz-dipólusokkal.

A következő közelítéseket tesszük meg: $H_\varphi \cong \frac{I_0 l}{4\pi}j\beta\sin\vartheta\frac{e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}$, és $E_\vartheta = \frac{I_0 l}{4\pi}j\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sin\vartheta\frac{e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}$. Vegyük észre, hogy $\frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 = 120\pi\Omega$, vagyis a szabadtér hullámellenállása. Áttérünk komplex amplitúdókra, és beírjuk, hogy $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, illetve, hogy $Z_0 = 120\pi\Omega$. Ekkor azt kapjuk, hogy $H_\varphi = j\frac{I_0 l}{2\lambda}\sin\vartheta\frac{e^{-j\beta r}}{r}$ és, hogy $E_\vartheta = j\frac{60\pi I_0 l}{\lambda}j\beta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sin\vartheta\frac{e^{-j\beta r}}{r}$.

A következőkben két fontos antennajellemzőt ismerünk meg: a sugárzási diagramot, és a sugárzási ellenállást.

Sugárzási diagram: Ez az elektromos térerősség változását mutatja meg egy adott, R=állandó sugarú gömbön. Ez tehát egy ilyen alakú függvény képe: $f(\vartheta,\varphi) = \left.\frac{|E(\vartheta,\varphi)|}{|E|_{\max}}\right|_{R=állandó}$. Hertz-dipólus esetén a térerősség akkor maximális, ha $\vartheta = 90°$. $E_{\max} = \frac{I_0 l}{4\pi}\beta Z_0\frac{1}{r}$. Ezért $f(\vartheta,\varphi) = \sin\vartheta$, csak ϑ-tól függ.

Sugárzási ellenállás: Az elején le kell szögezni, hogy a sugárzási ellenállás fiktív mennyiség! Jelöljük a sugárzási ellenállást R_s-sel! Ekkor tudjuk, hogy $P = \frac{1}{2} I_0^2 R_S = \mathrm{Re}\left\{ \int_A \vec{S}_K d\vec{A} \right\}$, ahol A a teljes gömbfelület. $\vec{S}_K = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 l}{4\pi} \right)^2 \beta^2 Z_0 \sin^2 \vartheta \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$. Ez viszont szerencsére valós. Így tehát $P = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 l}{4\pi} \right)^2 \beta^2 Z_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta \frac{1}{r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 l}{4\pi} \right)^2 \beta^2 Z_0 \frac{8\pi}{3}$. Ez alapján $R_s = \left(\frac{\beta l}{4\pi}^2 \right) Z_0 \frac{8\pi}{3} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$, mert beírtuk a szabadtér hullámellenállását és β-t. Vigyázni kell azonban, mert az antennához közel meddő teljesítmény is van. Nézzünk egy példát. Legyen a frekvencia f=30MHz, és l=0.5m. Ezen adatok alapján a sugárzási ellenállásra körülbelül1.97Ω adódik.

Számoljuk még ki a maximális térerősséget. $E_{\max} = \frac{I_0 l}{4\pi} \beta Z_0 \frac{1}{r}$. Ezt írjuk be a teljesítmény képletébe! $P = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{I_0 l}{4\pi} \right)^2 \beta^2 Z_0 = r^2 \pi \frac{4}{3} \frac{1}{Z_0} \left| E_{\max} \right|^2$. Ez alapján $S_{átlag} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{\left| E_{\max} \right|^2}{3 Z_0}$, valamint $S_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\left| E_{\max} \right|^2}{Z_0}$. Látható, hogy $\frac{S_{\max}}{S_{átlag}} = \frac{3}{2}$. Ezt hívnánk az antenna nyereségének, ha ideális lenne, de nem az. Ebből következtethetünk, az irányhatásra is. Az antenna nem anizotróp módon sugároz. Mindezek alapján: $\left| E_{\max} \right| = \sqrt{\frac{3 Z_0 P}{4\pi r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{90 P}$.

<u>Hullámvezetők:</u> A következőkben a csőtápvonalakról lesz szó. A hengeres csőtápvonalat például úgy képzelhetjük, el, mint egy koaxiális kábelt, amiből ki lett húzva az ér. Ennek számítása azonban bonyolult, ezért mi a téglalap keresztmetszetű csőtápvonallal fogunk foglalkozni. A tér a csőtápvonalak belsejében tud terjedni, ehhez azonban nagy frekvencia kell. A hullámterjedés iránya mindig z irányú. A csőtápvonal x irányú mérete a, y irányú mérete b lesz. A gerjesztésről feltételezzük, hogy időben szinuszosan váltakozik, így a komplex leírást fogjuk alkalmazni. A csőtápvonalak belsejében az áramsűrűség, és a töltések eloszlása zérus.

TM módus: Ezen egyszerűsítések megtétele után a vektoriális inhomogén hullámegyenletünk homogénné válik, és így fog kinézni: $\Delta \vec{A} - \mu\varepsilon (j\omega)^2 \vec{A} = 0$. Tovább egyszerűsítünk a dolgokon: A vektorpotenciálról feltételezzük, hogy csak z irányú komponense van. Ekkor a mágneses térnek is csak z irányú komponense van. Így kapjuk a TM módusú megoldásokat. A vektorpotenciál tehát így néz ki: $\vec{A} = A(x, y, z) \vec{e}_z$. Még egyszerűbb lesz a helyzet a szorzatszeparációt követően. Azt mondjuk, hogy $A(x, y, z) = X(x) Y(y) e^{-\gamma z}$ alakú. Helyettesítsük ezt be az egyenletbe. Azt fogjuk kapni, hogy $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 = -\omega^2 \mu\varepsilon$.

A Laplace-Poisson egyenlet megoldásánál látottakhoz hasonló módon: $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2$ és $\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 = -k_y^2$. Ez alapján a diszperziós egyenlet: $-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 = -\omega^2 \mu\varepsilon$. Ez rendezve:

$\gamma^2 = k_x^2 + k_y^2 - \omega^2\mu\varepsilon$. Ezek után a két differenciálegyenletünk megoldásai a következők lesznek: $X(x) = b_x \cos(k_x x) + c_x \sin(k_x x)$, és $Y(y) = b_y \cos(k_y y) + c_y \sin(k_y y)$. A konstansok meghatározásához szükség van a peremfeltételekre: $\vec{E}$ merőleges a cső falára, mert az ideális. Ezért E_z=0 teljesül a cső falán. Ez azt jelenti, hogy $E_z = -j\omega A + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z} divA = 0$. Viszont tudjuk, hogy $divA = \frac{\partial A}{\partial z} = -\gamma XYe^{-\gamma z}$. Ezt visszaírva az egyenletbe: $E_z = \left(\frac{\gamma^2}{j\omega\mu\varepsilon} - j\omega\right)A = 0$ egyenlethez jutunk. Ez viszont azt jelenti, hogy A=0 a cső falán. Akkor vagyunk a cső falán, ha x=0, vagy y=0, vagy x=a, vagy y=b. Az első két feltételből adódik, hogy b_x=b_y=0, mert cos0=1, és akkor nem lenne A=0. A harmadik és a negyedik feltételből adódik, hogy sin(k_xa)=0, és sin(k_yb)=0. Ezekből a feltételekből adódik, hogy $k_x = \frac{m\pi}{a}$, és $k_y = \frac{n\pi}{a}$, ahol m=1,2,3… és n=1,2,3… Ez az m és az n a módusindex. A vektorpotenciálunk tehát jelenleg így néz ki: $A = c_x \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)c_y \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$. A továbbiakban $c_x c_y$=C A diszperziós egyenletből kifejezhető a terjedési együttható: $\gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$. Ha a terjedési együttható valós, akkor a hullám csillapodik, nem terjed. Ez nem jó. Ha tisztán képzetes, akkor csillapítatlan a hullámterjedés. Ez akkor lehetséges, ha $k_x^2 + k_y^2 < \omega^2\mu\varepsilon$. Ez alapján meg lehet adni egy határfrekvenciát, amely alatt nem terjed a hullám. Tegyük ezt meg. Legyen a jele $f_{h,m,n}$ így jelölve a módust is. $k_x^2 + k_y^2 = (2\pi f_{határ})^2\mu\varepsilon$. Ez alapján $f_{h,m,n} = \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{4\pi^2\mu\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}c$. A legkisebb határfrekvencia akkor adódik, ha m=n=1. $f_{h,1,1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}c$. Lehet számolni határhullámhosszt is, ez azonban fiktív. Ez ugyanis nem a csőben terjedő hullámhossz lesz, hanem a határfrekvenciához tartozó szabadtéri hullámhossz. $\lambda_{h,m,n} = \frac{c}{f_{h,m,n}} = \frac{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$. Például, ha $\mu_r = \varepsilon_r = 1$, a=b, n=m=1, akkor $\lambda_{h,1,1} = \sqrt{2}a$. Ezek alapján például ha a=10cm, akkor a határfrekvencia 1,1-es módusnál körülbelül 3GHz. Általában a csőtápvonalakon csak egyetlen módust engednek terjedni. Nézzük meg a térjellemzők viselkedését. A mágneses tér:
$\vec{H} = \frac{1}{\mu}rot\vec{A} = \frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix}$. Ez alapján $H_x = \frac{C}{\mu}k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-\gamma z}$, az y irányú komponens: $H_y = -\frac{C}{\mu}k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-\gamma z}$, és $H_z = 0$. Az elektromos tér:

$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} rot\vec{H} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$. Ez alapján nem nehéz kiszámítani az elektromos tér komponenseit: $E_x = -\frac{C\gamma}{j\omega\varepsilon} k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-\gamma z}$, az y irányú komponens:

$E_y = -\frac{C\gamma}{j\omega\varepsilon} k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-\gamma z}$, a z irányú pedig:

$E_y = C\frac{\gamma^2 - \omega^2\mu\varepsilon}{j\omega\varepsilon}\sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-\gamma z}$.

TE módus: a transzverzális elektromos hullámok megismeréséhez bevezetjük az elektromos vektorpotenciál fogalmát. Jele $\vec{F}$. Mivel a csőtápvonalban $div\vec{D} = 0$, ezért azt fogjuk mondani, hogy $\vec{D} = \varepsilon rot\vec{F}$. A gerjesztési törvény alapján $rot\vec{H} = \varepsilon rot\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}$. Ezt rendezzük: $rot\left(\vec{H} - \varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right) = 0$. Itt viszont be tudjuk vezetni a mágneses skalárpotenciált, mert $\vec{H} - \varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}$ mindig rotációmentes. Azt fogjuk kapni, hogy $\vec{H} = -grad\varphi^m + \varepsilon\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}$. Itt térünk át a komplex írásmódra, majd a kapott eredményt beírjuk az indukciótörvénybe. Ezt fogjuk kapni: $rotrot\vec{F} = -j\omega\vec{B} = -\mu\varepsilon(j\omega)^2\vec{F} + j\omega\mu grad\varphi^m$. Rendezve, és kiküszöbölve a dupla rotációt: $grad\left(div\vec{F}\right) - \Delta\vec{F} = -\mu\varepsilon(j\omega)^2\vec{F} + j\omega\mu grad\varphi^m$. Most következik a mértékválasztás: A Lorentz-feltétel fogja nekünk leegyszerűsíteni az egyenletet: $div\vec{F} = j\omega\mu\varphi^m$. Az egyenletünk végső alakja: $\Delta\vec{F} - \mu\varepsilon(j\omega)^2\vec{F} = \vec{0}$. Az egyenlet neve: Helmholtz egyenlet. Ha a vektorpotenciálnak csak z irányú komponense van, akkor E_z=0. Ekkor a Helmholtz egyenlet egyszerűsödik a következő, skaláris alakra: $\Delta F - \mu\varepsilon(j\omega)^2 F = 0$. A TM módushoz hasonlóan egyszerűsítsük a dolgot a szorzatszeparáció segítségével: $F(x,y,z) = X(x)Y(y)e^{-\gamma z}$. Ennek megoldását már láttuk a TM módus esetén, így azt nem részletezzük. A diszperziós egyenlet is teljesen azonos. Ezek szerint F a következő alakú:
$F(x,y,z) = (b_x\sin(k_x x) + c_x\cos(k_x x))(b_y\sin(k_y y) + c_y\cos(k_y y))e^{-\gamma z}$. Az elektromos tér innen már könnyen meghatározható, ugyanis $\vec{E} = rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix}$. Ez alapján $E_x = \frac{\partial F}{\partial y}$, valamint $E_y = -\frac{\partial F}{\partial x}$. Nézzük a peremfeltételeket: Ha x=0 vagy x=a, akkor E_y=0. Ebből az következik, hogy b_x=0. Ha pedig y=0 vagy y=b, akkor E_x=0. Ebből pedig az következik, hogy b_y=0. Így most a vektorpotenciálunk: $F(x,y,z) = C\cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{-\gamma z}$. Már csak k_x és k_y a kérdés. Ha y=b, akkor E_x=0. Ez akkor lehetséges, ha sin(k_yb)=0. Ha pedig x=a, akkor E_y=0. Ez akkor lehetséges, ha sin(k_xa)=0. Ezekből a feltételekből: $k_y = \frac{n\pi}{b}$ és $k_x = \frac{m\pi}{a}$, ahol n=0,1,2… és m=0,1,2…, de ügyelni kell arra, hogy m és n egyszerre nem lehet nulla, mert akkor F konstans lenne, így nem lenne elektromos tér. A határhullámhosszra és a terjedési

együtthatóra tett megállapítások itt is érvényesek, azzal a kikötéssel, hogy itt m és n közül az egyik, de csak az egyik nulla is lehet. Ezért TE módus esetében három alapmódus létezik. TE_{10}, TE_{01} és TE_{11}. Az első index m, a második n. A határhullámhosszokra a következő összefüggések adódnak: $\lambda_{h,1,0} = 2a$, $\lambda_{h,0,1} = 2b$ és $\lambda_{h,1,1} = \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}}$.

Ezek után nézzük meg TE módus esetén is a térkomponenseket. Azt már tudjuk, hogy $E_x = \dfrac{\partial F}{\partial y} = -k_y C \cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-\gamma z}$, valamint $E_y = -\dfrac{\partial F}{\partial x} = k_x C \sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-\gamma z}$, és E_z=0. Ezek alapján a mágneses tér komponensei meghatározhatóak az indukciótörvényből.

$\vec{H} = -\dfrac{1}{j\omega\mu} rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix}$. Ez alapján a mágneses tér komponensei:

$H_x = -\dfrac{C\gamma}{j\omega\mu} k_x \sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-\gamma z}$, az y irányú komponens:

$H_y = -\dfrac{C\gamma}{j\omega\mu} k_y \cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-\gamma z}$, és végül a z irányú:

$H_y = -\dfrac{C\gamma}{j\omega\mu} (k_x^2 + k_y^2)\cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{-\gamma z}$.

Nézzük meg, hogy mi adódik a csőben terjedő hullám hullámhosszára, azaz Λ-ra! Láttuk, hogy ha $k_x^2 + k_y^2 < \omega^2\mu\varepsilon$, akkor $\gamma = j\beta$. Ebből $\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_x^2 - k_y^2} = \dfrac{2\pi}{\Lambda}$, azt is láttuk korábban, hogy határesetben $k_x^2 + k_y^2 = \left(\dfrac{2\pi}{\lambda_{h,m,n}}\right)^2 \mu_r\varepsilon_r$. Ebből már ki lehet fejezni a csőben terjedő hullámhosszt a szabadtéri hullámhosszal. $\Lambda_{m,n} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda_{h,m,n}^2}}}$, ahol λ a szabdtéri hullámhossz. Ezt kicsit tovább alakítva: $\Lambda_{m,n} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \dfrac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{h,m,n}}\right)^2}}$. Ebből látszik, hogy ha $\lambda > \lambda_{h,m,n}$, akkor nincs terjedés z irányban, mert képzetes lenne $\Lambda_{m,n}$.

Hullámimpedancia (vagy módusimpedancia): $\dfrac{E_x}{H_y} = -\dfrac{E_y}{H_x} = Z_0$. Ez a hullámimpedancia definíciója. Például TE módusra: $Z_0^{TE} = \dfrac{-Ck_y \cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-\gamma z}}{-\gamma Ck_y \cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-\gamma z}} j\omega\mu = \dfrac{\omega\mu}{\beta}$. Hasonló módon $Z_0^{TM} = \dfrac{\beta}{\omega\varepsilon}$. Mindezt ki lehet fejezni hullámhosszakkal, vagy frekvenciákkal is, felhasználva, hogy $\beta = \frac{2\pi}{\Lambda_{m,n}}$, $\Lambda_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{h,m,n}}\right)^2}}$, valamint, hogy $\frac{\lambda}{\lambda_h} = \frac{f_h}{f}$. Így a következő összefüggésekhez juthatunk:

$$Z_0^{TM} = \frac{2\pi\sqrt{1-\left(\frac{f_h}{f}\right)^2}}{\lambda 2\pi f \varepsilon} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f_h}{f}\right)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{f_h}{f}\right)^2}$$

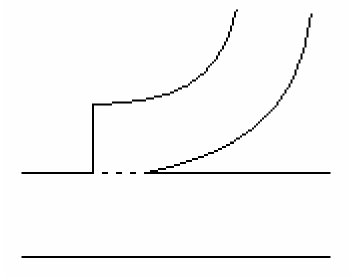
. Ehhez hasonlóan

$$Z_0^{TE} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_h}{f}\right)^2}}.$$

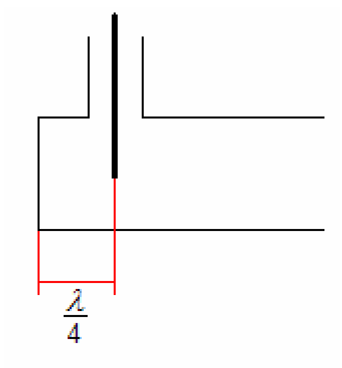
Nézzük még meg a teljesítményáramlást is. (TE és TM módusra egyaránt igazak a következő megállapítások.) $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & E_y & X \\ H_x^* & H_y^* & X \end{vmatrix}$. A determinánsban X-szel jelölt helyeken teljesen mindegy, hogy mi szerepel a z irányú terjedés szempontjából. Így

$$S_z = \frac{1}{2}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) = \frac{1}{2Z_0}\left(|E_x|^2 + |E_y|^2\right) = \frac{Z_0}{2}\left(|H_x|^2 + |H_y|^2\right).$$

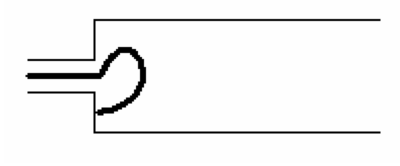
Csatolási módok: most azt fogjuk megnézni, hogy miként kerül a hullám a csőbe. A bemutatott módszerek mindegyike oda-vissza működik.
Lehetséges, hogy két hullámvezetőt kell összekapcsolni. Ezt az alábbi ábrán láthatjuk. A lyukaknak kell csak megfelelő méretűeknek lenniük.



Előfordulhat olyan eset is, hogy koaxiális kábellel kell összekapcsolni a hullámvezetőt. Ennek két módja lehet. Az egyik, amikor az elektromos teret csatoljuk:



A másik pedig, amikor a mágneses teret csatoljuk:



Ezeken kívül lehetséges még sugárzókhoz (antennákhoz) csatolni. Ez a legegyszerűbb, azt ugyanis tölcsér segítségével tehetjük meg. Gyakorlatilag szétnyitjuk a cső száját.

Üregrezonátorok: Nagy frekvencián nem lehetséges L és C tagok összekapcsolásával rezgőkört létrehozni. Erre vannak az úgynevezett üregrezonátorok. Ezeket úgy kell elképzelni, hogy egy csőtápvonalba beteszünk egy fém falakat, oda, ahol a térerősség amúgy is nulla. Ezzel azt érjük el, hogy lesz egy lezárt, üreges fémdobozunk, amibe be van zárva a tér, és abban állóhullám alakul ki. Legyen l az üregrezonátorunk hossza. Ekkor $l = \frac{\Lambda}{2} p$, ahol p nemnegatív egész szám. Ezek után $\Delta_{m,n} = \frac{2l}{p} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{h,m,n}^2}}}$. Rendezés után az adódik, hogy $\lambda = \frac{2\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}{\sqrt{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$. Ez lesz az üregrezonátorunk rezonancia hullámhossza. A rezonancia frekvencia pedig $f = \frac{c}{\lambda}$. Az indexes sorrendje a továbbiakban m, n, p lesz. A minimális értékeket TM módus esetén az 1,1,0 indexnél, TE módus esetén pedig 0,1,1 vagy 1,0,1 indexeknél kaphatjuk. Ha például f=3GHz a rezonancia frekvencia, és ehhez kell egy kocka alakú rezonátor, akkor a következő lehetőségeink vannak: TE_{101}, TE_{011}, TM_{110}. A rezonátorban belül levegő van. Mivel kocka alakú, ezért a=b=l, így

$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2}}} = \sqrt{2}a = \frac{c}{f} = 0.1m$. Ebből az következik, hogy $a = \frac{0.1}{\sqrt{2}} \approx 7.1cm$.

Felmerülhet a kérdés, hogy TM módusnál miért lehet p=0. Ennek az a magyarázata, hogy a TM_{11} módusú tér esetén E körülbelül állandó és merőleges a falakra. Így l értéke nem fix, az változhat.

Dielektromos hullámvezető: dielektromos hullámvezető például az üvegszál. Ennek tárgyalásához azonban a Bessel-függvények behatóbb ismerete szükséges, így csak a dielektromos réteggel fogunk foglalkozni. Z irányú terjedést vizsgálunk, x irányban nincs változás. Az áramsűrűség zérus, az időbeli változás szinuszos. A két közeg neve mag, illetve héj. A mag dielektromos állandója ε_1, a héjé pedig ε_2. Mi azonban együttesen fogjuk kezelni a két csoportot, és ε_i-vel jelöljük a dielektromos állandót, ahol i=1 vagy 2, attól függően, hogy a magról vagy a héjról van-e szó. Mind az elektromos, mind a mágneses térnek van x, y és z irányú komponense. Ismét elővesszük a Maxwell-egyenleteket.

$rot\vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - \vec{e}_z \frac{\partial H_x}{\partial y}$ Ha most felírjuk a komponensekre vonatkozó egyenleteket, akkor kapunk 3 egyenletet:

(1) $\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon_i E_x$

(2) $-j\beta H_x = j\omega\varepsilon_i E_y$

(3) $\frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_i E_z$

Ez eddig három egyenlet hat ismeretlennel. Kell még három egyenlet, amit hasonló módon az indukciótörvényből kapunk.

(4) $\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 E_x$

(5) $-j\beta E_x = -j\omega\mu_0 H_y$

(6) $\frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z$

Az egyenletek felírásakor felhasználtuk, hogy $\frac{\partial}{\partial z} = j\beta$, illetve, hogy a két közeg permeabilitása egyaránt μ_0. Ezek után vegyük észre, hogy az (1), (5), (6) számú egyenletekben csak H_z, H_y, és E_x szerepel. Ez a három egyenlet tehát független a másik háromtól, így önmagukban megoldhatóak. Ezek a megoldások fogják adni a TE módusú terjedést. A (2), (3) és (4) számú egyenletek pedig csak H_x-et, E_y-t, és E_z-t tartalmaznak. Ezekből az egyenletekből a TM módusú terjedést kapjuk meg.

5) Gyakorlati példák

Pontforrás által keltett térerősség meghatározása r távolságban a Gauss-törvény segítségével: Adott tehát egy pontforrásunk. Ez nyilván gömbszimmetrikus teret hoz létre maga körül. Ha most a ponttöltés köré felveszünk egy r sugarú gömböt, kifelé mutató normálissal, hogy $\vec{D}$ párhuzamos és egyirányú $d\vec{A}$-val, hiszen $\vec{E}$ radiális irányú. Vegyük most a Gauss-törvény bal oldalát: $\oint_A \vec{D}d\vec{A} = \int_A DdA$, a párhuzamosság, és egyirányúság miatt. (Mert az integrál mögött szereplő $\vec{D}d\vec{A}$ kifejezés tulajdonképpen egy skaláris szorzat. Viszont ha két vektor párhuzamos, és egyirányú, akkor skaláris szorzatuk egyenlő a nagyságuk szorzatával.) A következő lépés az, hogy észrevesszük, hogy D a gömb felületén állandó nagyságú, így kihozható az integrál elé. $\int_A DdA = D\int_A dA$, ahol viszont $\int_A dA$ a gömb felülete. Így azt kapjuk, hogy $\oint_A \vec{D}d\vec{A} = D*4\pi*r^2$. Most nézzük a Gauss-törvény jobb oldalát: $\int_V \rho dV = Q$, hiszen a gömbön belüli töltés az Q. Az eredményünk tehát a következő: $D*4\pi*r^2 = Q$. Ebből kifejezve E-t: $E = \frac{Q}{4\pi*\varepsilon*r^2}$. Ha $\vec{E}$-ra vagyunk kíváncsiak, akkor használjuk ki, hogy $\vec{E} = E\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

Hosszú, q töltéssűrűségű egyenes vezető térerősségének meghatározása r távolságban: Ismét a Gauss-törvénnyel számolunk. Vegyünk fel egy r sugarú, l hosszú hengert a vezető köré, úgy, hogy a henger tengelye és a vezető egybeessen. A paláston a hengerszimmetria miatt $\vec{D}$ ismét radiális irányú. Ebből kifolyólag $\vec{D}$ és $d\vec{A}$ a paláston egyirányúak, és párhuzamosak. Az alapkörökön $\vec{D}$ és $d\vec{A}$ merőlegesek egymásra. Ezért ott az integrál értéke nulla lesz. Nézzük most akkor a Gauss-törvény bal oldalát: $\oint_A \vec{D}d\vec{A} = \int_{palást} \vec{D}d\vec{A} + \int_{alapkörök} \vec{D}d\vec{A}$. Az előzőek alapján ez továbbírva: $\oint_A \vec{D}d\vec{A} = \int_{palást} DdA = D\int_{palást} dA = D*2\pi*r*l$. A jobb oldal pedig $\int_V \rho dV = q*l$. Így azt kapjuk, hogy $D*2\pi*r*l = q*l$. Ebből E-t kifejezve: $E = \frac{q}{2\pi*\varepsilon*r}$.

Nagyméretű, adott töltéssűrűségű töltött sík térerősségének meghatározása r távolságban: Ismét Gauss-törvény segítségével. Vegyünk fel a sík alatt és felett egyaránt d távolságban egy-egy A_0 méretű síkot. Nyilván a Gauss-törvény bal oldalán szereplő integrálban 0 lesz minden olyan tag, ahol $\vec{D}$ és $d\vec{A}$ merőlegesek. Így azonnal írhatjuk, hogy: $\oint_A \vec{D}d\vec{A} = \int_{2\,db\,A_0\,\text{méretű sík}} DdA = D\int dA = D*2*A_0$. A jobb oldal pedig $\int_V \rho dV = \sigma * A_0$. Így most azt kaptuk, hogy $D*2*A_0 = \sigma*A_0$. Kifejezve E-t: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$.

Ahhoz, hogy két pont között meg tudjuk mondani a feszültséget az kell, hogy ismerjük azok potenciáljait. A potenciált viszont egy referenciaponthoz viszonyítjuk. A referenciapont ponttöltés esetén a végtelenben van, hosszú vezető esetében (definíció szerint!) 1-ben található. Továbbá tudjuk, hogy egy adott pont potenciálja: $\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}d\vec{l}$, ahol $\vec{r}_0$ a referenciapont.

Pontforrás elektromos mezejében található két pont: A és B. Mennyi a köztük lévő feszültség? Tudjuk, hogy a ponttöltés elektromos mezeje $E = \frac{Q}{4\pi * \varepsilon * r^2}$. Így Egy adott pont potenciálja: $\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}d\vec{l} = \int_{r}^{r_0} \frac{Q}{4\pi * \varepsilon * r^2} dr = \frac{Q}{4\pi * \varepsilon}\left[\frac{-1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{Q}{4\pi * \varepsilon * r}$. Így ha adott a két pont helyvektora akkor felírhatjuk, hogy $U_{A \to B} = \Phi(r_A) - \Phi(r_B) = \frac{Q}{4\pi * \varepsilon}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$.

Hosszú vezető mezejében található két pont: A és B. Mennyi köztük a feszültség? Az előző esethez hasonlóan járunk el. Egy adott pont potenciálja:
$\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}d\vec{l} = \int_{r}^{r_0} \frac{Q}{2\pi * \varepsilon * r} dr = \frac{Q}{2\pi * \varepsilon} * \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) = \frac{Q}{2\pi * \varepsilon} * \ln\left(\frac{1}{r}\right)$. Így a két pont közötti feszültség: $U_{A \to B} = \Phi(r_A) - \Phi(r_B) = \frac{Q}{2\pi * \varepsilon} * \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$.

Nagyméretű sík mezejében van két pont: A és B. Mennyi köztük a feszültség? A sík felületi töltéssűrűsége σ. Most látható, hogy a feszültség csak a z irányú komponenstől fog függeni. Így a potenciál: $\Phi(z) = \int_{z}^{z_0} \frac{\sigma}{2\varepsilon} dz = \frac{\sigma}{2\varepsilon}(z - z_0)$. Ha most például a síkot 0-nak tekintjük, akkor $\Phi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon} * z$. Így a két pont közötti feszültség:
$U_{A \to B} = \Phi(r_A) - \Phi(r_B) = z_A - z_B$.

Síkkondenzátor kapacitása: Adott két, egymástól d távolságra lévő A felületű töltött fémlap. Az egyik töltése Q a másiké –Q. Tudjuk, hogy csak a lemezek között lesz térerősség, hiszen a lemezeken kívül Q és –Q terei kioltják egymást. Tudjuk, hogy egy síklap térerőssége mindig $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$. Most nekünk két síkunk van, az eredő tér így szuperponálással
$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$. Tudjuk még azt is, hogy $\sigma = \frac{Q}{A}$, így tehát $E = \frac{Q}{\varepsilon A}$. A potenciál:
$\varphi = \int_{x}^{x_0} E dx = \int_{x}^{d} \frac{Q}{\varepsilon A} dx = \frac{Q}{\varepsilon A}(d - x)$. Most a nulla potenciált x=d-be tettük, x=0 pedig a Q töltésű sík helye. Ezek alapján $U = \frac{Q}{\varepsilon A} d$. Most már ki tudjuk számolni a kapacitást:
$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon A} d} = \varepsilon \frac{A}{d}$.
Most a síkok közé két szigetelőt teszünk, úgy, hogy a szigetelők határfelülete merőleges legyen a síkokra. A szigetelők felülete A_1 és A_2, $A=A_1+A_2$. A kondenzátoron lévő feszültség: $U=E_1d=E_2d$. A kondenzátor töltése pedig: $Q = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$. Tudjuk azt is, hogy

$\vec{D}_1=\varepsilon_1\vec{E}_1=\varepsilon_1\frac{U}{d}$, valamint $\vec{D}_2=\varepsilon_2\frac{U}{d}$. Ha most alkalmaznánk a Gauss- törvényt az egyik síklapot körülvevő felületre, azt kapnánk, hogy Q=D*A, viszont tudjuk azt is, hogy Q=σ*A, így tehát D=σ. Ez azért lesz jó, mert így fel tudjuk írni a kapacitást:

$$C=\frac{\varepsilon_1\frac{U}{d}A_1+\varepsilon_2\frac{U}{d}A_2}{U}=\varepsilon_1\frac{A_1}{d}+\varepsilon_2\frac{A_2}{d}$$

. Ebből látszik, hogy két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor eredő kapacitása megegyezik a kapacitásaik összegével. Kérdés lehet még a kritikus térerősség is. Most ez egyszerű, ugyanis értelemszerűen a két dielektrikumban fellépő kritikus térerősségek közül a kisebbik lesz a meghatározó. $E_{max}=\min\{E_{krit1}, E_{krit2}\}$. A maximális feszültség pedig $U_{max}=E_{max}$*d.
Most a síkok közé úgy tesszük a szigetelőket, hogy azok határfelülete párhuzamos legyen a síkokkal. Az egyik vastagsága legyen d_1, a másiké d_2, és teljesüljön, hogy $d_1+d_2=d$. A közeghatáron D1=D2=konstans. A térerősségről tudjuk, hogy $E_1=\frac{D}{\varepsilon_1}=\frac{Q}{\varepsilon_1 A}$, valamint $E_2=\frac{Q}{\varepsilon_2 A}$. A potenciál:

$$\varphi=\int_x^d E\,dx=\begin{cases}\int_x^{d_2}E_2\,dx=\frac{Q}{\varepsilon_2 A}(d-x)\\ \int_x^{d_1}E_1\,dx+\int_{d_1}^{d}E_2\,dx=\frac{Q}{\varepsilon_2 A}d_2+\frac{Q}{\varepsilon_1 A}(d_1-x)\end{cases}$$

. A feszültséget megkapjuk x=0 helyettesítéssel a potenciálból: U=$\frac{Q}{\varepsilon_1 A}d_1+\frac{Q}{\varepsilon_2 A}d_2$. A kapacitást pedig már nem nehéz számolni: $C=\frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 A}+\frac{d_2}{\varepsilon_2 A}}=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$. A maximális megengedhető térerősség most $E_{max}=\min\{\varepsilon_1 E_{krit1}, \varepsilon_2 E_{krit2}\}$.

Két, adott sugarú gömb kapacitása: Adott tehát két gömb. Az egyiknek R_1, a másiknak R_2 a sugara. Az egyik töltése Q, a másiké –Q. Egymástól h távolságra vannak, a középpontjaik az x tengelyen vannak. Ha egy olyan pontban nézzük a térerősséget, ami nincs az x tengelyen, akkor ott a két gömb terének szuperpozíciójával számolhatunk. Ez megadja a tér nagyságát és irányát is. Ha viszont az x tengely egy pontján vizsgálódunk, akkor az iránnyal nem kell törődni, azt tudjuk, hogy ott a pozitív töltésű gömb felől a negatív töltésű gömb felé mutat a térerősség. Legyen E^+ a pozitív töltésű gömb tere, E^- pedig a negatívé. Ekkor (az x tengelyen):
$E(x)=E^+(x)+E^-(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{x^2}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(h-x)^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(h-x)^2}\right)$. Ha $R_2<R_1$, akkor a kisebb sugarú gömbön lesz nagyobb a térerősség, azaz (x=h-R_2 helyettesítéssel)
$E_{max}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{(h-R_2)^2}+\frac{1}{R_2^{\,2}}\right)$. A potenciál: $\varphi(x)=\varphi^+ +\varphi^- =\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{x}+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h-x}\right)$. A feszültség: $U=\varphi(x=R_1)-\varphi(x=h-R_2)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{h-R_1}-\left(\frac{1}{h-R_2}-\frac{1}{R_2}\right)\right)$. Van feszültségünk, és töltésünk. A kapacitás innen már csak egy lépés:

$C=\frac{Q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\left(\frac{1}{h-R_1}+\frac{1}{h-R_2}\right)}$. Speciális esetben, ha $R_1=R_2=R$, akkor a kapacitás:

$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\frac{1}{R}-\frac{1}{h-R}}$. A továbbiakban ezzel számolunk. Szeretnénk tudni a maximális térerősséget a feszültség függvényében. Azt már kiszámoltuk, hogy $E_{max}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{(h-R)^2}+\frac{1}{R^2}\right)$.

Kiszámoltuk azt is, hogy $U=\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{h-R}\right)$. Ebből kifejezve $\frac{Q}{4\pi\varepsilon}$-t és beírva E_{max}-ba, megkapjuk a keresett függvényt. $\frac{Q}{4\pi\varepsilon}=\frac{\frac{U}{2}}{\frac{1}{R}-\frac{1}{h-R}}$. Így

$E_{max}(U)=\frac{\frac{U}{2}}{\frac{1}{R}-\frac{1}{h-R}}\left(\frac{1}{(h-R)^2}+\frac{1}{R^2}\right)$.

Koaxiális kábel kapacitása: A koaxiális kábel belső sugara legyen R1, külső sugara R2, köztük ε dielektromos állandójú közeg. A belső vezetőn legyen q töltéssűrűség, a külsőn pedig –q. A vizsgált kábel hossza legyen l. Ha adott egy $R_1<r<R_2$ sugár, akkor oda felírhatjuk, hogy $2\pi r l D=ql$, azaz $D=\frac{q}{2\pi l}$, és $E=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$. Ha esetleg $r>R_2$, akkor $2\pi r l D=0$, azaz D=0. Nézzük a potenciált: $\varphi(r)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}$. A kábel külső és belső felülete közti feszültség: U=$\varphi(belül)-\varphi(kívül)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}$. Ezek alapján egy l hosszú darab kapacitása:

$C=\frac{Q}{U}=\frac{ql}{\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$. A maximális térerősség R_1-felületén lesz, mert annak kisebb a sugara. $E_{max}=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{R_1}$. A feszültség képletéből kifejezve $\frac{q}{2\pi\varepsilon}$-t, és beírva a maximális térerősség képletébe, megkapjuk, hogy $E_{max}(U)=\frac{U}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)R_1}$.

Vezetőhenger, és vezető féltér kapacitása: Adott egy ideális vezetőképességű féltér, és felette h magasságban egy R sugarú henger, rajta q töltéssűrűséggel. A nullpotenciállal rendelkező síkot töltéstükrözéssel lehet figyelembe venni. Ezek szerint -h magasságban egy -q töltésű henger van. A z tengely mentén z magasságban a térerősség: $E=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{h-z}+\frac{1}{h+z}\right)$.

A legnagyobb térerősség a henger felületén lesz. $E_{\max}=E(z=h-R)=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2h-R}\right)$. A

potenciál szintén csak a z iránytól fog függeni.
$\varphi(z) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{h-z} + \frac{-q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{h+z} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{h+z}{h-z}$. A feszültség a henger és a féltér potenciálkülönbségeként adódik:

$$U = \varphi(henger) - \varphi(féltér) = \varphi(z = h-R) - \varphi(z=0) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{2h-R}{R} - \ln\frac{h}{h}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h-R}{R}$$

A henger adott, l hosszára a kapacitás: $C = \frac{ql}{\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h-R}{R}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{2h-R}{R}}$. A maximális térerősség a feszültség függvényében: $E_{max}(U) = \frac{U}{\ln\frac{2h-R}{R}}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2h-R}\right)$

Árammal táplált gömb tere: Adott egy R sugarú gömb, amibe I áram folyik. Kérdés a térerősség. Tudjuk, hogy $I = 4\pi R^2 J$. Ebből az áramsűrűség: $J = \frac{J}{4\pi R^2} = \sigma E$. Innen a térerősség: $E = \frac{I}{4\pi\sigma R^2}$. Ha a nulla potenciál végtelen távol van, akkor a feszültség: $U = \frac{1}{4\pi\sigma R}$. Ha két gömbünk van, és az egyikből ki-, a másikba belép az áram, akkor szuperpozícióval tudunk számolni.

Lépésfeszültség: Adott egy R sugarú gömb, ami h mélységbe van süllyesztve. A felszínen adott két pont közöttük L=0,8m méter távolság van (ezért lépésfeszültség). Milyen messze kell lenni x irányban a gömbtől, hogy a lépésfeszültség maximális legyen? A megoldás egyszerű. A töltéstükrözést kell alkalmazni, de az áramlási tér szerint, ugyanis a föld vezetőképessége nem nulla. Így ott áram fog folyni. Tehát a tükrözött töltésnek nem változik a töltése mínusz egyszeresre. Ezek után a potenciál x távolságban: $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}}$.
Ebből a lépésfeszültség: $U_{lépés} = \varphi(x) - \varphi(x+L)$. A maximumot ezek után Taylor-sorral célszerű közelíteni.

Ellenállás: Adott egy négyszögletes keresztmetszetű (axb méretű) gyűrű alakú vezető. Mennyi az ellenállása? Egyszerűen úgy kell vele számolni, mintha egyenes lenne: $R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{K}{\sigma ab}$, ahol K a kerület. Más megoldás: megszakítjuk a gyűrűt és rákapcsolunk U feszültséget. Ekkor $U = \int_r E dl = 2\pi r E$, ahol r a sugár. Ebből az áramsűrűség: $J = \frac{\sigma U}{2\pi r}$. Az áram ezekből: $I = b\int_r^{r+a} J dr$. Adott az áram és a feszültség. Ebből már lehet ellenállást számolni.

Toroid: Adott egy N menetű, A felületű, R sugarú toroid. Mennyi az önindukciós együtthatója? Tudjuk, hogy a mágneses térerősség N menet esetén $H = \frac{NI}{2\pi R}$. A fluxus N menet esetén: $\Psi = NBA = N\mu HA = \frac{N^2 IA}{2\pi R}\mu = LI$. Ebből az önindukciós együttható:

$L = \frac{N^2 A}{2\pi R}\mu$.

Távvezeték1: Adott egy l=20km hosszú távvezeték, a következő paraméterekkel: $\gamma = 1.1*10^{-3} e^{j79.9°} \frac{1}{km}$, $Z_0 = (818 - j145.7)\Omega$, U_2=90kV, $I_2 = 400e^{-j30°} A$. Kérdés: U_1 és I_1.
Kezeljük a távvezetéket kétkapuként. A bementi mennyiségre felírhatjuk a következő összefüggést: $U_1 = U_2 \cosh(\gamma l) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma l)$, illetve $I_1 = \frac{U_2}{Z_0}\cosh(\gamma l) + I_2 \sinh(\gamma l)$. Innen már csak számolni kell. $U_1 = 94*10^3 e^{j3.85°} V$, illetve $I_1 = 399.5e^{-j9.6°} A$

Távvezeték2: $Z_0 = 160\Omega$, ideális, légszigetelésű távvezeték. L_1=500m. Lezáró ellenállás: $Z_2 = (100 + j10)\Omega$, U_1=110V, f=1MHz.

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{3} * 10^{-2} \frac{1}{m}$$

$$\beta l = 3\pi + \frac{\pi}{3}$$

Lánc karakterisztika alapján: $U_1 = U_2 \left(\cos(\beta l) + Z_0 \frac{1}{Z_2} \sin(\beta l) \right)$. Ez alapján U_2-re

$U_2 = 66e^{j245.05°} V$ adódik. Továbbá $I_2 = \frac{U_2}{Z_2} = 0.67e^{j239.25} A$

Távvezeték3: Ebben a példában két távvezeték lesz összekapcsolva. Megnézzük, hogy ilyenkor mi a teendő. Legyen a TV ideális, és légszigetelésű. A második távvezeték lezárása $Z_3 = (120 + j40)\Omega$. További adatok: Z_{10}=100 Ω, Z_{20}=160 Ω, f=50MHz, U_1=60V, l_1=10m, l_2=0.5m. A feladatban jelöljük g-vel a βl szorzatot. Nincs más dolgunk ezután, minthogy kétszer alkalmazzuk a lánckarakterisztika egyenleteit: $U_1 = U_2 \cos g_1 + jZ_{10} I_2 \sin g_1$. Ez tovább írva: $U_1 = \left(\underbrace{U_3 \cos g_2 + jZ_{20} I_3 \sin g_1}_{=U_2} \right) \cos g_1 + jZ_{10} \left(\underbrace{\frac{U_3}{Z_{20}} \cos g_2 + jI_3 \sin g_1}_{=I_2} \right) \sin g_1$.

Rendezgetés, és számolás után kijön, hogy $U_3 = \frac{U_1}{0.417 + j0.864} = 62.3e^{j15.15°} V$, valamint

$I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = 0.493e^{j97.24°} A$.

Távvezeték4: Képzeljük el azt az esetet, amikor egy távvezetékre négy másik, teljesen egyforma távvezeték kapcsolódik. Ez a négy távvezeték egymáshoz képest párhuzamosan van kötve. Mindegyik végén ugyanolyan lezáró ellenállás van. Ilyen például adótornyokban fordulhat elő. Mit tudunk ilyenkor mondani? Az a teendőnk, hogy mind a négy távvezetéket helyettesítjük egyetlen impedanciával, majd ezek eredő impedanciájával zárjuk le az első távvezetékünket.

Távvezeték5: Adott egy távvezeték, a következő adatokkal: U_1, U_2, Z_0, β, l. Kérdés U(z) és I(z). Megoldás: Ismerjük a távíróegyenletek megoldásait: $U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$, és $I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}$. Ezekbe először z=0-t majd z=l-t helyettesítve két egyenletet kapunk két ismeretlennel. Ezt megoldani nem nehéz. A függvények ismeretében pedig akár a feszültség illetve áram maximumát, és maximumának helyét is megadhatjuk.

Távvezeték6: Adott egy távvezeték a következő paraméterekkel: $Z_0 = 75\Omega$, l=200m, $\omega = 5*10^6 \frac{rad}{s}$, légszigetelésű, ideális, a generátor belső ellenállása: $R_1 = 12\Omega$, a lezárás: $Z_2 = (100 + j200)\Omega$, U_0=100V. Kérdések: reflexiós tényező, U(z), maximális és minimális feszültség.

A reflexiós tényező: $r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 0.7584 e^{j0.595}$. A feszültség függvényének meghatározásához pedig így járunk el. A távíróegyenletek megoldásaiba z=0-t és z=l-t helyettesítünk be. Ezzel kis számolgatással ki is jön az eredmény: $U^+ = 55.93 e^{-j0.075}$ V és $U^- = 42.42 e^{j0.136}$ V. Adott tehát U^+, U^- és r. Ekkor a feszültség függvénye: $U(z) = U^+ \left(e^{-j\beta z} + |r| e^{j\beta z + \delta}\right)$. Ebből következően: $|U_{max}| = U^+(1 + |r|)$, és $|U_{min}| = U^+(1 - |r|)$.

Távvezeték7: A speciális lezárásokkal ellátott távvezetékekkel is könnyű dolgozni. Például ha egy C kapacitású kondenzátorral van lezárva a TV, akkor $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$ lesz a lezáró impedancia. Tekercs esetén pedig $Z_2 = j\omega L$.

Síkhullám1: Adott a síkhullám frekvenciája: f=2000MHz, szabadtéri hullámhossza: $\Lambda = 10cm$, $\mu_r = 1$. Kérdés ε_r, ha ideális a dielektrikum.

Tudjuk, hogy $\beta = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\Lambda}$., valamint $\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$ Ez alapján $\lambda = 15cm$., és $\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{\Lambda}$. Így a relatív dielektromos állandó 2.5-tel egyenlő.

Síkhullám2: Egy f=10MHz frekvenciájú síkhullám $\sigma = 0;\ \varepsilon_r = 4;\ \mu_r = 1$ tulajdonsággal rendelkező falnak ütközik. A feladat az, hogy egy másik falat kell ez elé tenni, aminek $\sigma = 0;\ \varepsilon_r = 1;\ \mu_r = 1$ tulajdonságai vannak, úgy, hogy az elrendezés reflexiómentes legyen. Milyen messze kell tenni a falat?

A megoldás során $\frac{\lambda}{4}$-es impedancia transzformációt kell végrehajtani. Ez során megkapjuk, hogy $\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{f\sqrt{2}} = 21.22m$. Innen az l távolság: $l = \frac{\Lambda}{4} = 5.23m$.

Síkhullám3: Adott két ideális szigetelő. $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0;\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_0;\ \varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$. Azt mondhatjuk, hogy $E_2 = E_2^+$, mert nincs jobbról jövő visszavert hullám. Tudjuk, hogy $Z = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$, ezért behelyettesítve az adatokat, a reflexiós tényezőre r=0.172 adódik. Ha a szigetelők veszteségesek, akkor figyelembe kell venni, hogy $\tan\delta = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$. Ekkor a komplex permittivitással számolunk: $\varepsilon_K = \varepsilon(1 - j\tan\delta)$. Természetesen, ha $\tan\delta$ kicsi, akkor el is lehet hanyagolni, és közelíteni a feladat megoldását az ideális esettel.

Fémfelületre beeső síkhullám: Ha levegőből esik például rézre a síkhullám, akkor tudjuk, hogy $Z_0 = 120\pi\Omega$, valamint $Z_{10} = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \approx \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = 3.7 * 10^{-4} e^{j\frac{\pi}{4}}$. Ezen adatok alapján a reflexiós tényező igen jó közelítéssel: $r \cong -1$. Ha kiszámítjuk ennek a pontos értékét, akkor megkaphatjuk, hogy a továbbhaladó hullám amplitúdója körülbelül 10^{-7} nagyságrendű. Ezt pedig már el lehet hanyagolni.

6) Matematikai emlékeztető

Vonalintegrál: Adott egy l(t): $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ görbe, és egy f $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ függvény. Az l görbe kezdőpontjai: A=l(α) és B=l(β). Ekkor az f függvény l görbe menti vonalintegrálján értjük a következőt: $\int_l \vec{f} d\vec{l} = \int_\alpha^\beta \left\langle \vec{f} \circ \vec{l}, \frac{d\vec{l}}{dt} \right\rangle dt$.

Felszín szerinti integrál: Adott F(u,v): $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ felület, és f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvény. Ekkor f F felszín szerinti integrálja: $\int_F \vec{f} \times d\vec{F} = \int_T \vec{f} \circ \vec{F} \cdot \left| \frac{d\vec{F}}{du} \times \frac{d\vec{F}}{dv} \right| dudv$, ahol T az F paraméterezése szerinti integrálási tartomány.

Felületi integrál: Adott F(u,v): $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ felület, és f $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ függvény. Ekkor f F felületi integrálja: $\int_F \vec{f} d\vec{F} = \int_T \left\langle \vec{f} \circ \vec{F}, \frac{d\vec{F}}{du} \times \frac{d\vec{F}}{dv} \right\rangle dudv$, ahol T az F paraméterezése szerinti integrálási tartomány.

Nabla differenciáloperátor: A nabla(∇) egy formális vektor, 3 dimenzióban, Descartes koordinátarendszerben: $\left(\frac{\partial}{\partial \vec{e}_i} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{e}_j} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{e}_k} \right)$.

Laplace differenciáloperátor: Egy vektormező gradiensének divergenciáját a Laplace operátorral tudjuk megadni. Jele: Δ. Descartes koordinátarendszerben a Laplce operátor a nabla operátor „négyzetével" egyenlő, azaz a nabla operátor ismétlésével a Laplace operátort kapjuk.

Divergencia: Adott f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvény. Divergenciája a Descartes-féle koordinátarendszerben: $div\ f = \langle \nabla, f \rangle = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i} + \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_j} + \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}$. Bázisfüggetlen értelmezés: $div\ f = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_A F dA$, ahol V az A által határolt térrész.

Rotáció: Adott f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ függvény. Rotációja a Descartes-féle koordinátarendszerben:

$$rot\ f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} \vec{e}_i & \vec{e}_j & \vec{e}_k \\ \frac{\partial}{\partial \vec{e}_i} & \frac{\partial}{\partial \vec{e}_j} & \frac{\partial}{\partial \vec{e}_k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

. Bázisfüggetlen értelmezés: $rot\ f = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_l F dl$.

Gauss-Osztrogradszkij-tétel: $\oint_A \vec{F} d\vec{A} = \int_V div\, \vec{F} dV$, ahol A a V felszíne.

Stokes-tétel: $\oint_l \vec{F} d\vec{l} = \int_A rot \vec{F} d\vec{A}$, ahol l az A felület határoló görbéje.

Green-azonosság: Először nézzük meg, hogy mivel egyenlő $div(\phi\, grad\phi)$. A szorzat deriválására vonatkozó összefüggés alapján $div(\phi\, grad\phi) = \nabla(\phi * \nabla\phi) = \nabla\phi * \nabla\phi + \nabla\nabla\phi * \phi = (grad\phi)^2 + \phi\Delta\phi$. Alkalmazzuk ez után a jobb és a bal oldalakra a Gauss-Osztrogradszkij-tételt! Azt fogjuk kapni, hogy: $\oint_A \phi\, grad\phi d\vec{A} = \int_V (grad\phi)^2\, dV + \int_V \phi\Delta\phi dV$. Ezt nevezzük Green-azonosságnak.

Dupla rotáció: $rot\, rot\vec{X} = grad\, div\vec{X} - \Delta\vec{X}$, ahol $\Delta\vec{X} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$. Vegyük észre, hogy $\vec{X}$ nem egyértelmű, ugyanis ha $\vec{Y} = \vec{X} - grad(u)$ alakú, akkor $rot\vec{Y} = rot\vec{X} - rot\, grad(u)$, de $rot\, grad(u) \equiv 0$, így $rot\vec{Y} = rot\vec{X}$. Az egyértelműséghez kellene $div\vec{X}$. $div\vec{X}$ megválasztását mértékválasztásnak nevezzük.