Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) 3. pót ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 40 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Legyen $f_n(x) = nxe^{-nx}$. (a) Hol konvergens, és ahol igen, ott mi a határfüggvénye az f_n függvénysorozatnak? (b) Egyenletesen konvergens-e a $K \cap [0,1)$ ill. a $K \cap [1,\infty)$ halmazokon, ahol K a konvergenciatartománya?

Megoldás. (a) Negatív x-ekre $\lim_n f_n(x) = -\infty$; $f_n(0) = 0$ miatt $\lim_n f_n(0) = 0$, és $x > 0$-ra $\lim_n f_n(x) = 0$, pl. hányadoskritériummal, mert $\frac{(n+1)xe^{-(n+1)x}}{nxe^{-nx}} = \frac{n+1}{n}e^{-x} \to e^{-x} < 1$. Tehát $K = [0,\infty]$ és itt a konstans 0 függvény a határfüggvény.
(b) $K \cap [0,1) = [0,1)$-en nem egyenletes a konvergencia, mert $x_n = 1/n$-re $r_n(x_n) = f_n(x_n) = n\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}} = e^{-1} \not\to 0$. De $K \cap [1,\infty) = [1,\infty)$-en egyenletes, mert itt $|r_n(x)| = f_n(x) \le ne^{-n} \to 0$; az egyenlőtlenség azért igaz, mert $g(x) = e^{(x-1)n} - x$-re $g(1) = 0$ és $n, x \ge 1$-re $g'(x) = ne^{(x-1)n} - 1 \ge 0$, így g monoton nő, tehát minden $x \ge 1$-re $x \le e^{(x-1)n} = e^{xn-n}$, amiből, mindkét oldalt megszorozva ne^{-xn}-el kapjuk, hogy $nxe^{-nx} \le ne^{-n}$.

2. Mely pozitív x-ekre konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}$ függvénysor?

Megoldás. $x = 1$-re nem, mert $\frac{1}{1^n + 1^{-n}} = \frac{1}{2} \not\to 0$. De $x \ne 1$-re igen, mert ha $x > 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ konvergens mértani sor, ami majorálja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}$-et, ha pedig $x \in (0,1)$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{-n}}$-ről mondható el ugyanez.

3. (a) Adja meg $f(x) = 1/x$ 1 körüli Taylor-sorát! (b) Hol konvergens ez a sor? (c) Hol állítja elő f-et?

Megoldás. (a) A Taylor-sor definíciójából: $f^0(x) = x^{-1}$, $f^1(x) = -1x^{-2}$, $\dots$, $f^n(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$; tehát $f^n(1) = (-1)^n n!$, és így f 1 körüli formális Taylor-sora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$.
(VAGY: $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ ha $|1-x| < 1$.)
(b) Ez mértani sor, tehát pontosan akkor konvergens, ha $|1-x| < 1$, azaz ha $x \in (0,2)$.
(c) Mivel $x \in (0,2)$-re konvergens mértani sor, az összege $\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$; tehát a konvergenciatartományán előállítja $1/x$-et.

4. (a) Az $a \ne 1$ valós paraméter mely értékeire invertálható az $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{a}{a-1} \\ 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{1-a} \end{pmatrix}$ mátrix, és mi az inverze? (b) Az ilyen értékekre hány olyan x vektor van, amire $\underline{\underline{A}}x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$? (c) Ha van, adjon meg egy ilyen x-et a függvényében!

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{a}{a-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{1-a} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{S_3 += S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{a}{a-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{S_2 *= (1-a)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{S_2 += aS_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vagyis $\underline{\underline{A}}$ minden $a \ne 1$-re invertálható, és $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(b) Vagyis $\underline{\underline{A}}$ invertálható, tehát $\operatorname{Ker}\underline{\underline{A}} = \{0\}$ (következésképp az $\underline{\underline{A}}x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása van) és $\operatorname{Im}\underline{\underline{A}} = \mathbb{R}^3$ (ezért van megoldása).
(c) $x = \underline{\underline{A}}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2+a \\ 3 \end{pmatrix}$.

Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) — 3. pótpót ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 40 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Legyen $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$. (a) $[0,\infty)$ mely részhalmazán konvergens, és ahol konvergens, ott mi a határfüggvénye az f_n függvénysorozatnak? (b) Egyenletesen konvergens-e a $K \cap [0,\infty)$ halmazon, ahol K a konvergenciatartománya?

Megoldás. (a) Konvergens $[0,\infty)$-en és a konstans 0 függvényhez tart, mert $f_n(0) = 0$, és $x \neq 0$-ra $f_n(x) = \frac{1}{1/x+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \to 0$, amiből $|r_n(x)| = f_n(x)$ miatt az is következik, hogy a konvergencia egyenletes $[0,\infty)$-en.

2. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ függvénysor?

Megoldás. Gyökkritériummal: $\sqrt[n]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$, tehát a sor divergens, ha $x>0$ és konvergens, ha $x<0$. $x=0$-ra divergens, mert $\left(1+\frac{0}{n}\right)^{n^2} = 1 \not\to 0$.

3. (a) Mi a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ hatványsor konvergenciasugara és konvergenciatartománya?

Megoldás. Konvergenciasugara: $\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{1/(n+1)}} = 1$; 1-ben konvergens, mert ott az alternáló harmonikus sor, -1-ben pedig divergens, mert ott a harmonikus sor. Tehát a konvergenciatartománya $(-1,1]$.

4. (a) Az $a \neq 1$ valós paraméter mely értékeire lesz a $\underline{\underline{v_1}} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\underline{\underline{v_2}} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{v_3}} = \begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok által kifeszített altér dimenziója 2? (b) Egy ilyen a-ra adja meg ennek a kétdimenziós altérnek egy bázisát, és írja fel ebben mindhárom vektort!

Megoldás. Az altér dimenziója a

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&4\\3&-1&a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&3\\0&-1&-2\\0&-1&a-9\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&1&9-a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&7-a\end{pmatrix}$$

rangja, ami pontosan akkor 2, ha $a=7$. Ilyenkor $\{\underline{\underline{v_1}}, \underline{\underline{v_2}}\}$ bázis, és $\underline{\underline{v_3}} = 3\underline{\underline{v_1}} + 2\underline{\underline{v_2}}$.

IMSc-feladat. Egyenletesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ függvénysor a konvergenciatartományán? Ha nem, adja meg a konvergenciatartománya egy olyan nemüres részintervallumát, ahol igen.

Megoldás. A 2. feladat szerint a konvergenciatartomány a negatív valósak. Ezen a halmazon nem egyenletes a konvergencia, mert $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ nem egyenletesen tart 0-hoz: $x_n = -1/n$-re $r_n(x_n) = f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to 1/e \neq 0$.

De $a<0$-ra $(-\infty, a]$-n már egyenletes a konvergencia, mert elég nagy n-re (nevezetesen ha $|x/n|<1$) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2} \leq \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2}$, és $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2}$ a gyökkritérium miatt konvergens, tehát a Weierstrass-kritérium miatt a függvénysor ezen az intervallumon egyenletesen konvergens.