A413

2021. december 9., csütörtök 12:05

A413

A4 Valószínűségszámítás — XIII. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. december 9.

PZH 1

1) A városi tűzoltóságra ténylegesen tűz miatt beérkező bejelentések száma *Poisson*(1) (naponta). A cicát kell leszedni a fáról típusú bejelentések száma *Poisson*(12). Mi a valószínűsége, hogy

$X \sim \text{Poisson}(12)$

- a) 3 óra alatt több, mint 2 cicás bejelentést kapnak? (2p)
- b) két egymást követő cicás riasztás között több, mint 8 óra telik el? (2p)
- c) egy adott napon a 3. cicás riasztás hajnali 4 előtt lesz? (2p)
- d) ha azt tudjuk, hogy összesen 5 hívás futott be, akkor mi a valószínűsége, hogy köztük két cicás volt? (2p)

$P(X>2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$P(X=0) = \frac{\left(12\cdot\frac{1}{8}\right)^0}{0!} e^{-\frac{12}{8}}$

$P(X=1) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^1}{1!} e^{-\frac{3}{2}}$

$P(X=2) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!} e^{-\frac{3}{2}}$

PZH 1

b.) $Y \sim EXP(12)$ $\quad \lambda = 12$

$$P\left(Y > \tfrac{8}{24}\right) = 1 - P\left(Y < \tfrac{1}{3}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{12}{3}}\right) = e^{-4}$$

c.) $Z \sim \text{Erlang}(\lambda = 12, n = 3)$

$$P\left(Z < \tfrac{4}{24}\right) = 1 - \sum_{j=0}^{2} \frac{\left(12 \cdot \frac{1}{6}\right)^j}{j!} e^{-\frac{12}{6}}$$

d.) 5 [illegible] [illegible] 2 cicás

$$= \frac{P(2 \text{ cicás}) \cdot P(3 \text{ [illegible]})}{P(5 \text{ db eset})} = \frac{\frac{12^2}{2!} \cancel{e^{-12}} \cdot \frac{1^3}{3!} \cancel{e^{-1}}}{\frac{13^5}{5!} \cancel{e^{-13}}} = \binom{5}{2} \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^3$$

BINOMIÁLIS

PZH 2

2) Egy bizonyos elektronikai eszköz élettartama exponenciális eloszlású 5 év várható értékkel. A gyártásába hiba csúszik és néhány eszköz várható élettartama lecsökken 3 évre (de még mindig exponenciális marad). Az ebben az évben kikerült termékek 70%-a volt jó és 30% ilyen csökkent élettartamú.

$X \sim exp\left(\frac{1}{5}\right)$

- a) Ha kiválasztunk egy jó terméket, mi a valószínűsége, hogy az élettartama 2 és 3 év között lesz? (2p)
- b) Mi a valószínűsége, hogy egy jó termék él még pluszban 3 évet, ha már élt 1-et? (2p)
- c) Ha kiválasztok egy tetszőleges terméket, mi a valószínűsége, hogy tovább fog élni, mint 2 év? (2p)
- d) Ha egy terméket utánkövettünk és tovább élt, mint 2 év, mi a valószínűsége, hogy a hibás gyártásból származott? (2p)

$$P(2 < X < 3) = P(X < 3) - P(X < 2) = 1 - e^{-\frac{3}{5}} - \left(1 - e^{-\frac{2}{5}}\right) = e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{3}{5}}$$

PZH 2

b.) $$P(X > 4 \mid X > 1) \overset{\text{örökifjú}}{=} P(X > 3) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{5}}\right) = e^{-\frac{3}{5}}$$

c.) $X \sim exp\left(\frac{1}{5}\right)$ $\quad Y \sim exp\left(\frac{1}{3}\right)$

$P(X > 2) = e^{-\frac{2}{5}}$ $\quad P(Y > 2) = e^{-\frac{2}{3}}$

TELJES VSZÉG TÉTELE

$$0{,}7 \cdot e^{-\frac{2}{5}} + 0{,}3 e^{-\frac{2}{3}}$$

d.) Bayes tétel

$$\boxed{\frac{0{,}3 \cdot e^{-\frac{2}{3}}}{0{,}7 \cdot e^{-\frac{2}{5}} + 0{,}3 \cdot e^{-\frac{2}{3}}}}$$

PZH 3

$f(x)=1$ $\quad f(y)=\frac{1}{2}$

3) Legyen $X \sim Uni(0,1)$, $Y \sim Uni(0,2)$ (egyenletes eloszlásúak) függetlenek.

- a) Mennyi az $X+Y$ sűrűségfüggvénye ($f_{X+Y}(s)$ konvolúciós függvény)?(6p)
- b) (extra) Ha két ember egyenletes eloszlással érkeznek, egyikük 11 és 12, másikuk 11 és 13 óra között, és legfeljebb fél órát várnak egymásra, mi a valószínűsége, hogy találkoznak? (+3p)

$$f_{X+Y}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(s-x)\,dx$$

$0<s=x+y<3$

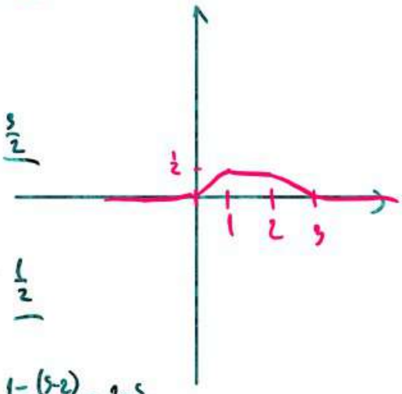
$0<s-x<2$

$s-2<x<s$

$$\int_0^s \frac{1}{2}\,dx=\frac{s}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}$$

$$\int_{s-2}^1 \frac{1}{2}\,dx \quad \frac{1-(s-2)}{2}=\frac{3-s}{2}$$



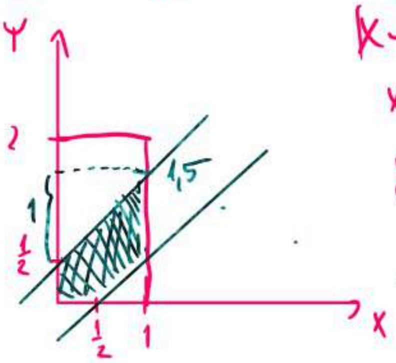
PZH 3

$X\sim Uni(0,1)$ $\quad Y\sim Uni(0,2)$

$|X-Y|<\frac{1}{2}$

$x-y<\frac{1}{2}$ $\quad x-\frac{1}{2}<y<x+\frac{1}{2}$

$y-x<\frac{1}{2}$



$2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1=\boxed{\frac{1}{4}}$

$P=\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$

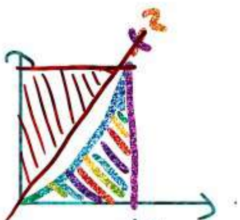
PZH 4

4) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye
2 $f(x,y)=c\cdot(x+y)$ a $0<x<1, 0<y<x^2$ tartományon. Számold ki a c-t. Mennyi a valószínűsége, hogy Y nagyobb, mint X, illetve mennyi Y feltételes várható értéke, ha már tudjuk X értékét? ($P(X<Y)$, $E(Y|X)=?$) (5p)

$$1=\int_0^1\int_0^{x^2} c(x+y)\,dy\,dx=\int_0^1\left[c\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^{x^2}=c\int_0^1\left(x\cdot x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{7}{20}$$

$\boxed{c=\frac{20}{7}}$

$P(X<Y)=0$



PZH 4

$$E(Y|X) = \int_0^{x^2} y \cdot f_{2|1}(y|x)\,dy = \frac{1}{x^3+\frac{x^4}{2}} \int_0^{x^2} xy+y^2\,dy = \frac{1}{x^3+\frac{x^4}{2}} \left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{3}}{x^3+\frac{x^4}{2}}$$

$$f_1(x) = \frac{20}{7} \int_0^{x^2} x+y\,dy = \frac{20}{7}\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\cancel{\frac{20}{7}}(x+y)}{\cancel{\frac{20}{7}}\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)}$$

PZH 5

$X_i \sim N(10, 1)$

5) Egy alkatrész súlya normális eloszlású 10 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Ha a gyártósorra több, mint 0,5 kilogrammnyi alkatrész kerül, akkor az leáll.

- a) Hány alkatrész kerülhet legfeljebb a gyártósorra, hogy 90%-os valószínűséggel menjen (azaz ne álljon le)? (3p)
- b) Ha kiválasztunk (visszatevéssel) 10 alkatrészt, mi a valószínűsége, hogy legalább 2 közülük nehezebb lesz, mint 11 dkg? (2p)
- c) (extra) Ha sorban húzunk (visszatevéssel) mi a valószínűsége, hogy 5.-re lesz a harmadik olyan, amelyik nehezebb, mint 11dkg? (+2p)

NEGATÍV BINOM

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\cdot 10, \sqrt{n}\cdot 1)$$

$$P\left(\sum_1^n X_i < 50\right) =$$

$$P\left(\frac{\sum_1^n X_i - n\cdot 10}{\sqrt{n}\cdot 1} < \frac{50-n\cdot 10}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}9 = \Phi(x)$$

$x = 1{,}29$

$$\frac{50-n\cdot 10}{\sqrt{n}} = 1{,}29$$

$$50 - n\cdot 10 - 1{,}29\sqrt{n} = 0$$

$\sqrt{n} \to 2{,}1$

$\to \ominus$ 4

$n \approx 4, \ldots$

PZH 5

b) $X_i \sim N(10,1)$

$$p = P(X_i > 11) = P\left(\frac{X_i - 10}{1} > \frac{11-10}{1}\right) = 1-\Phi(1) \approx 0{,}84$$

$= 0{,}16$

BINOM(10, p)

$$\binom{10}{1} \cdot 0{,}16^1 \cdot 0{,}84^9 \qquad \binom{10}{0} 0{,}16^0 \cdot 0{,}84^{10}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

c)

$$\binom{4}{2} 0{,}16^3 \cdot 0{,}84^2$$

Összefoglaló

Diszkrét eloszlások:

- Bernoulli
- Binomiális
- Hipergeometriai
- Poisson
- Geometriai
- Negatív Binomiális

Folytonos eloszlások:

- Egyenletes
- Exponenciális
- Erlang
- Béta
- Normális

dr. Keszthelyi Gabriella A4 Valószínűségszámítás

Mit kell általában tudni az 1D eloszlásokról?

- Súlyfüggvény, sűrűségfüggvény, eloszlásfüggvény általános jellemzői
- Feltételes valószínűség, Bayes tétele, Teljes valószínűség tétele
- Várható érték, variancia, szórás
- Transzformációk
- Momentumgeneráló-, karakterisztikus függvény

$B \sim N(\, , \,)$ $\quad P(B^2-4\geq 0) = P(B>2)+P(B<-2)$

dr. Keszthelyi Gabriella A4 Valószínűségszámítás

Mit kell tudni a Normális eloszlásról?

- De Moivre-Laplace
- CHT
- Konfidenciaintervallumok
- Standardizálás
- 2D Standard Normál
- $CORR(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ független !! AKKOR ÉS CSAK AKKOR HA X,Y NORM!!!

BÁRMI MÁS X,Y-ra X,Y független $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $CORR(X,Y)=0$

2D cuccok

- Együttes sűrűség, eloszlás, peremsűrűség, -eloszlás
- Függetlenség
- Feltételes sűrűség
- Korreláció, kovariancia
- Konvolúció
- Feltételes várható érték, variancia
- Likelihood

Példa (De Moivre)

Egy szabályos érmével dobunk először 100-szor aztán 1000-szer. Becsüld meg, hogy 40 aztán 400 db fej lesz közöttük!

$X_1 \sim Binom(100, 0.5)$

$P(X) = \binom{100}{40} 0,5^{40} 0,5^{60} = 0,012$

$E(X) = np = 100 \cdot 0,5 = 50,$

$D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 5$

$Y_1 \sim N(50, 5)$

folytonossági korrekció:

$P(39,5 < X < 40,5) = \Phi((40,5-50)/5) - \Phi((39,5-50)/5) = \Phi(2,1) - \Phi(1,9) \approx 0,011$

Példa (De Moivre)

$X_2 \sim Binom(1000, 0.5)$

$P(X) = \binom{1000}{400} 0,5^{400} 0,5^{600} \approx \underline{1,364 \times 10^{-10}}$

$E(X) = np = 1000 \cdot 0,5 = 500$

$D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5} \approx 15,8$

$Y_1 \sim N(500, 15, 8)$

folytonossági korrekció:

$P(399,5 < X < 400,5) = \Phi((400,5 - 500)/15,8) - \Phi((399,5 - 500)/15,8) = \Phi(6,36) - \Phi(6,29) \approx 5,089 \times 10^{-11}$

CHT vs. konfidenciaintervallum

Tegyük fel, hogy egy termék súlyának eloszlásáról tudom, hogy normális, 20gr szórással, ismeretlen várható értékkel. Hány mérést kell végeznem, hogy a mérések átlaga 90%-os valószínűséggel ne térjen el 7,5 grammnál többel a várható értéktől?

$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

$\frac{\sum_1^n x_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(|\overline{X_n} - \mu| < 7,5) = 0,9$$

[illegible]

$$P\left(\frac{-7,5}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\sum_1^n X_i/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{7,5}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(x) - 1 = 0,9$$

$\Phi(x) = 0,95$

$$x = \underline{1,64} = \frac{7,5}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\boxed{n \approx 19,1}$$

CHT vs. konfidenciaintervallum

Tegyük fel, hogy egy termék súlyának eloszlásáról tudom, hogy normális, 20gr szórással, ismeretlen várható értékkel. 40 mérést végeztem, és $\overline{X_{40}} = 500gr$. Mi lesz a konfidenciaintervallum 90%-os konfidenciaszinthez?

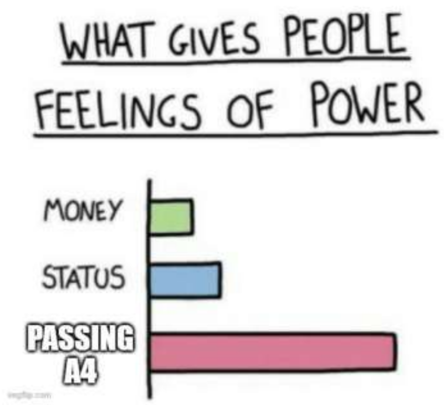
$$P\left(-z < \frac{\sum_1^n X_i/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z\right) = 2\Phi(z) - 1 = 0,9 =$$

$$\left(\overline{X_{40}} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X_{40}} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(500 - \frac{1,64 \cdot 20}{\sqrt{40}},\ 500 + \frac{1,64 \cdot 20}{\sqrt{40}}\right)$$

$z_{\alpha/2} = 1,64$

$(500 - 5,18; 500 + 5,18)$



Példa (Geom 1)

Legyen $X \sim Geom(p)$ és $Y \sim Geom(p)$ függetlenek. Mennyi $P(X = k|X = Y)$ illetve $P(X = k|X < Y)$?

$P(X=k \cap X=Y)$

$$P(X = k|X = Y) = \frac{P(X = Y|X = k) \cdot P(X = k)}{P(X = Y)} =$$

FÜGGETLENSÉGBŐL

$$= \frac{P(Y = k) \cdot P(X = k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(X = Y|X = j) \cdot P(X = j)} =$$

$Y=j$ TELJES VALSZÍNŰSÉG TÉTELE

$$= \frac{p(1-p)^{k-1} \cdot p(1-p)^{k-1}}{\sum_{j=1}^{\infty} p^2(1-p)^{2j-2}} = \frac{p^2(1-p)^{2k-2}}{p/(2-p)} =$$

GEOM SOR

$$= \boxed{(1-p)^{2k-2}p(2-p)} = Geom(p(2-p))$$

Példa (Geom 1)

$$P(X = k | X < Y) = \frac{P(X < Y | X = k) \cdot P(X = k)}{P(X < Y)} =$$

FÜGGETLENSÉG

$$= \frac{P(Y > k) \cdot P(X = k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(X < Y | X = j) \cdot P(X = j)} =$$

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

$Y \geq j$

$$\frac{(1-p)^k (1-p)^{k-1} p}{\sum (1-p)^j (1-p)^{j-1} p}$$ → geom sor

$$= \frac{(1-p)^k (1-p)^{k-1} p}{(1-p)/(2-p)} =$$

$$= (1-p)^{2k-2} p(2-p) = Geom(p(2-p))$$

Példa (Geom 2)

Adjunk Maximum Likelihood becslést az $X \sim Geom(p)$, $\theta = p$ paraméterére!

$X_1 = j_1, X_2 = j_2, X_3 = j_3, \ldots$
$P(X = k | \theta) = (1-\theta)^{k-1}\theta$

n db független megfigyelés

$$l(j_1, j_2, \ldots, j_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} (1-\theta)^{j_k - 1} \cdot \theta$$

LOGLIKELIHOOD

$$L(j_1, j_2, \ldots, j_n; \theta) = \sum_{k=1}^{n} \log((1-\theta)^{j_k - 1} \cdot \theta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (j_k - 1) \log(1-\theta) + n \log(\theta)$$

Példa (Geom 2)

$$\frac{\partial L(j_1, j_2, \ldots, j_n; \theta)}{\partial \theta} = \sum \frac{1 - j_k}{1-\theta} + \frac{n}{\theta}$$

$$\frac{n - \sum_{k=1}^{n} j_k}{1-\theta} + \frac{n}{\theta} = 0$$

$$\frac{\cancel{\theta}(n - \sum j_k) + (1-\cancel{\theta})n}{(1-\theta)\theta} = 0$$

$$\bar{X} = \frac{\sum j_k}{n} = \boxed{\frac{1}{\theta}}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$-\theta \sum j_k + n = 0$$

$$\theta = \frac{1}{\bar{X}}$$

Feltételes várható érték

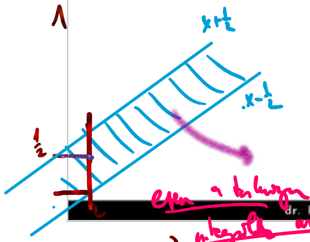
3 szabályos dobókockával dobunk. Jelölje X a legkisebb, Y a legnagyobb értéket. Adjuk meg X, Y eloszlását, illetve $E(X|Y)$-t minden Y-ra.

Példa EXP 1

Béla és Géza együtt dolgoznának egy group projecten, de egyikük sem érkezik pontosan a könyvtárba. Mindketten egymástól függetlenül 1 paraméterű exponenciális eloszlással érkeznek meg. Mi az érkezésük különbségének eloszlása? (Legyen csak, hogy fél órát várnak egymásra)

$f(x,y) = \underbrace{e^{-(x+y)}}_{2 \text{ exp szorzata}}$

$P = \int_0^1\int_0^1 e^{-(x+y)}\,dx\,dy + \int_0^1\int_1^{x+\frac{1}{2}} e^{-(x+y)} + \int_1^\infty\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} e^{-(x+y)} \approx \boxed{0{,}7}$



ezen a tartományon integrálja az exponenciális

$\int_1^\infty\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \int_1^\infty \left[-e^{-(x+y)}\right]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} dx = \int_0^\infty -e^{-2x-\frac{1}{2}} + e^{-2x+\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{e^{-2x-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{e^{-2x+\frac{1}{2}}}{2}\right]_0^\infty =$

$= 0 - \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} = 0$

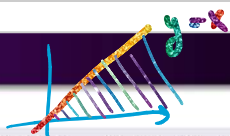
$\int_0^1\int_0^1 e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[-e^{-(x+y)}\right]_0^1 dx = \int_0^1 -e^{-x-1} + e^{-x} =$

$= \left[e^{-x-1} - e^{-x}\right]_0^1 = e^{-2} - e^{-1} - e^{-1} + e^0 \approx 0{,}39$

$\int_0^1\int_{0,5}^{x+\frac{1}{2}} e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[-e^{-(x+y)}\right]_{0,5}^{x+\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 -e^{-2x-\frac{1}{2}} + e^{-x-0,5}\,dx$

$= \left[\frac{e^{-2x-\frac{1}{2}}}{2} - e^{-x-0,5}\right]_0^1 = \frac{e^{-\frac{5}{2}}}{2} - e^{-1,5} - \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{} + e^{-0,5} \approx 0{,}31$

Példa EXP 2



Legyen $X \sim Exp(4)$ és $Y \sim Uni(0, X)$. Mennyi $E(Y)$?

$f_1(x) = 4e^{-4x}$ $f(x,y) = 4e^{-4x}$

$E(Y) = \int^\infty y \cdot \int^\infty \frac{4e^{-4x}}{x}\,dx\,dy = \int^\infty\int^x \frac{4ye^{-4x}}{x}\,dy\,dx = \int^\infty \left[\frac{4y^2e^{-4x}}{2x}\right]^x dx = \int^\infty 2xe^{-4x}\,dx =$

$$f_1(x) = 4e^{-4x}, \quad f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x} \quad \Bigg\} \quad f(x,y) = \frac{4e^{-4x}}{x}$$

$$f_2(y) = \int_y^\infty f(x,y)\,dx = \int_y^\infty \frac{4e^{-4x}}{x}\,dx$$

nem demi integrál

$$E(Y) = \int_0^\infty y \cdot \int_y^\infty \frac{4e^{-4x}}{x}\,dx\,dy = \iint \frac{4ye^{-4x}}{x}\,dy\,dx = \int_0 \left[\frac{4y^2 e^{-x}}{2x}\right]_0 dx = \int_0 2xe^{-x}\,dx =$$

$$= \cancel{\left[-2xe^{-x}\right]_0^\infty} - \int_0^\infty -2e^{-x}\,dx = \left[-2e^{-x}\right]_0^\infty = \underline{\underline{2}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{x \cdot 4e^{-4x}}{2}\,dx =$$

parciális

Példa Függetlenség

Milyen n-re lesz független a következő két esemény?
***A**: n érmedobásból van fej és írás is*
***B**: n érmedobásból legfeljebb egy írás van*

$P(A) = P($ van fej és írás is $) = 1 - P($ csak az egyik van $) =$

$= 1 - 2P($ csak fej van $) = 1 - 2\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$P(B) = P($ legfeljebb egy írás van $) =$

$= P($ pontosan 0 írás van $) + P($ pontosan 1 írás van $) =$

$= \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{2^n}$

$P(A \cap B) = P($ pontosan 1 írás van $) = \frac{n}{2^n}$

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \cdot \frac{n+1}{2^n}$$

$$\boxed{n=2}$$

Irodalomjegyzék

- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering
- Sheldon M. Ross —Introduction To Probability and Statistics for Engineers and Scientists
- Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis —Introduction to Probability
- E. T. Jaynes —Probability Theory - The Logic of Science