INFO AN1. PÓTZH 1. — 1 — 2018. 11. 05.

1, $\boxed{14}$

$$z^3 = \frac{-9-3i}{2-i} = \frac{-3(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-3}{5}(5+5i) = -3(1+i) \; ③ = +3\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} \; ②$$

$$z_k = \sqrt[3]{3\cdot\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \; ③$$

$$\underline{\underline{z_0 = 3^{1/3}\cdot 2^{1/6}\cdot e^{i\frac{5\pi}{12}}}} \; ① \; ; \; \underline{\underline{z_1 = 3^{1/3}\cdot 2^{1/6}\cdot e^{i\frac{13\pi}{12}}}} \; ① \; ; \; z_2 = 3^{1/3}\cdot 2^{1/6}\cdot \underbrace{e^{i\frac{7\pi}{4}}}_{2^{1/2}\cdot(1-i)} \; ① = \underline{\underline{3^{1/3}\cdot 2^{2/3}(1-i)}} \; ③$$

— ∘ —

2, a, $\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\exists N_0(K) \in \mathbb{N}$, melyre

$a_n \geq K$, ha $n \geq N_0(K)$. ④

b, $\boxed{12}$

számláló becslése alulról

$$a_n = \frac{7n^3 - 10^6}{n^2+2n+4} \geq \frac{7n^3 - n^3}{n^2+2n^2+4n^2} \; ④ = \frac{6}{7}n \geq K, \text{ ha } n \geq \frac{7}{6}K$$

③ ← nevező becslése felülről

↑ ha $n^3 \geq 10^6$, azaz $n \geq 100$

Tehát $\underline{\underline{N_0(K) \geq \max\left(100, \frac{7}{6}K\right)}}$ ⑤

— ∘ —

3, a, $\boxed{11}$ Rendőr elvvel dolgozunk:

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{3n^2+5n}{3n^2-2n}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n^2+5n^2}{3n^2-2n^2}} = \sqrt[n]{8} \longrightarrow 1$$

④ ④ ②

$a_n \to 1$ ①

b, $\boxed{11}$ Legyen $d_n = \left(\frac{4n-5}{4n+3}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{5/4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3/4}{n}\right)^n}$ ③ $\longrightarrow \frac{e^{-5/4}}{e^{3/4}} = e^{-2}$ ③ $< \frac{1}{4} < 1$

Tehát elegendően nagy n-re:

$$0 < d_n < \frac{1}{4} \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{0^n} < \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{d_n^n = b^n} < \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{n\to\infty} b_n = 0}} \; ⑤$$

c, $\boxed{8}$

$$c_n = \frac{7^n}{(-5)^n + n!} = \frac{\overbrace{7^n/n!}^{\to 0}}{\underbrace{(-5)^n/n!}_{\to 0} + 1} \; ⑤ \longrightarrow \frac{0}{0+1} = 0 \; ③$$

4, $\boxed{20}$ $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 5}$

(6)

$a_2 = \sqrt{4\cdot 4+5} = \sqrt{21} > 4 = a_1$ Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $(a_n) \nearrow$.

α, $a_2 > a_1$ ✓

β, Tegyük fel, hogy $a_{n+1} > a_n > 0$

γ, Ekkor $4a_{n+1} + 5 > 4a_n + 5 > 5$

$\Rightarrow \sqrt{4a_{n+1}+5} = a_{n+2} > \sqrt{4a_n+5} = a_{n+1}$ ✓

(5)

Ha $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, akkor A kielégíti a rekurziós egyenletet:

$A = \sqrt{4A+5} \Rightarrow A^2 - 4A - 5 = (A-5)(A+1) = 0 \Rightarrow A_1 = -1,\ A_2 = +5$

(6)

Igazoljuk, hogy $\forall n$-re $a_n < 5$: (teljes indukcióval)

α, $a_1 = 4 < 5$

β, Tegyük fel, hogy $a_n < 5$

γ, Ekkor $4a_n + 5 < 4\cdot 5 + 5 = 25 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{4a_n+5} < 5$ ✓

(3)

Mivel a_n monoton nő és felülről korlátos, ezért konvergens.

$a_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_2 = \underline{\underline{+5}}$

5, Ha n páros:

$\boxed{20}$ $a_n = \sqrt{n^2 - n + 1} + \sqrt{n^2 + 3n - 2} \longrightarrow \infty + \infty = \infty$ (4)

Ha n páratlan:

$$a_n = \sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2+3n-2} = \frac{(n^2-n+1)-(n^2+3n-2)}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+3n-2}} = \frac{-4n+3}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+3n-2}} =$$

$$= \frac{-4 + 3/n}{\sqrt{1 - 1/n - 1/n^2} + \sqrt{1 + 3/n - 2/n^2}} \longrightarrow \frac{-4}{1+1} = -2$$ (8)

Tehát a torlódási pontok: $S = \{-2, +\infty\}$, (2) a sorozat nem konvergens, (2)

$\liminf a_n = -2$, (2) $\limsup a_n = +\infty$ (2)

IMSC

a, A sorozatban végtelen sokszor szerepel a 0 elem, tehát a 0 torlódási pont. 1

b, A sorozatnak részsorozata az $\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1$ sorozat, tehát az 1 torlódási pont. 2

c, A sorozat nem konvergens, mert nem csak egy torlódási pontja van. 1

d, Igazoljuk, hogy $S = \mathrm{Tor}(a_n) = [0,1]$.

i, A sorozat minden eleme a $[0,1)$ intervallumba esik, tehát nem eshet torlódási pont $[0,1]$-en kívülre. 2

ii, $[0,1)$-ben minden racionális szám végtelen sokszor szerepel a sorozatban ($\frac{p}{q}$, és bővített alakjai), és ezekkel tetszőlegesen megközelíthetőek az irracionális pontok is, tehát $[0,1]$ pontjai torlódási pontok. 2