

NÉV*:

NEPTUN KÓD*:

--	--	--	--	--	--

Az összes feladatban: jelölje \times -el a helyesnek gondolt választ. Minden jó válasz $5/4$, minden rossz válasz $-5/8$ pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, vagy mindkettőt megjelöli, azért 0 pont jár.

1. Az alábbi formulák közül melyek érvényesek?

	érvényes	nem érvényes
$\neg q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$		\times
$\neg q \rightarrow (p \rightarrow (q \vee p))$	\times	
$(\neg q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow p$		\times
$\neg(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow p$	\times	

Megoldás. $\neg q \rightarrow (p \rightarrow (q \vee p))$ érvényes, mert $p \rightarrow (q \vee p)$ érvényes.

$\neg(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow p$ érvényes, mert ha egy \mathcal{M} modellben nem lenne igaz, akkor $\mathcal{M}(p) = 0$ és $\mathcal{M} \not\models q \rightarrow (p \rightarrow q)$, ami lehetetlen, mivel $\mathcal{M} \models p \rightarrow q$.

$\neg q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ nem érvényes, mert hamis abban a modellben, amelyben p és q hamisak.

$(\neg q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow p$ nem érvényes, mert hamis abban a modellben, amelyben p hamis.

2. (A , B , C mindegyike vagy lovag, azaz mindig igazat mond, vagy lóköető, azaz mindig hazudik.)

A azt mondja, “ B lovag és C lóköető.”

B azt mondja, “ A lóköető.”

Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

	I	H
A lovag és B lóköető		\times
B lovag és C lóköető		\times
Legalább kettőjük lovag	\times	
Ha A lóköető, akkor B is az		\times

Megoldás. Az $\{A \leftrightarrow (B \wedge \neg C), B \leftrightarrow \neg A\}$ formulahalmaz összes modelljét kell megkeresnünk. A második formula miatt az első $A \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C)$ -vel ekvivalens, aminek pontosan egy modellje van: amiben A hamis és C igaz. Tehát A lóköető és B , C lovagok.

3. Legyen

$$\Sigma = \{p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow (\neg r \wedge \neg p), p \vee (q \wedge r)\}$$

és

$$\Gamma = \{p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow (\neg r \wedge \neg p), \neg p \rightarrow (q \vee r)\}$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

	I	H
Σ teljes	\times	
Σ konzisztens		\times
Γ konzisztens	\times	
Γ teljes		\times

Megoldás. Σ kielégíthetetlen, a következő miatt. Ha $\mathcal{M} \models \Sigma$, akkor $\mathcal{M}(q) = \mathcal{M}(r) = 1$ (az első formula miatt ha $\mathcal{M}(p) = 1$, és a második miatt, ha $\mathcal{M}(p) = 0$). De akkor a második formula hamis \mathcal{M} -ben.

Következésképp Σ inkonzisztens és teljes.

Γ igaz minden olyan \mathcal{M} modellben, amelyre $\mathcal{M}(p) = 0$ és $\mathcal{M}(q) \neq \mathcal{M}(r)$, a következő miatt: az első és az utolsó formula triviálisan igaz \mathcal{M} -ben, ahogy a második is, feltéve, hogy $\mathcal{M}(q) = 0$; de akkor is, ha $\mathcal{M}(q) = 1$, mert ebben az esetben $\mathcal{M} \models \neg r \wedge \neg p$.

Következésképp Γ konzisztens és nem teljes.

4. Legyen $\Sigma = \{p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow q, \neg(\neg p \vee q)\}$

Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

	I	H
$\Sigma \models \neg p \rightarrow r$	\times	
$\Sigma \models p \vee r$	\times	
$\Sigma \models q \rightarrow (p \wedge r)$	\times	
$\Sigma \models p \wedge q$		\times

Megoldás. $\mathcal{M} \models \Sigma$ pontosan akkor, ha $\mathcal{M}(p) = 1$ és $\mathcal{M}(q) = 0$: ez nyilván modellje Σ -nak, és a Σ -beli harmadik formula miatt más modellje nincs. Tehát egy formula pontosan akkor következik Σ -ból, ha igaz az ilyen modellekben.