# 1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

MATEMATIKA A2
VILLAMOSMÉRNÖK HALLGATÓKNAK

2022. március 25.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

**Név:** **Gyakvez.:**

**Neptun kód:** **Gyak. kurzuskód:**

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | $\sum$ | $1_I$ | $2_I$ | $\sum_I$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

1. **(20 pont)**
   Állapítsa meg, hogy az
   $$1, \quad 1+x, \quad 1+x+x^2$$
   vektorrendszer bázist alkot-e a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok $\mathcal{P}_2$ terében? Amennyiben igen, határozza meg a $-x^2+2x+3$ polinom koordinátáit ebben a bázisban!

2. **(20 pont)**
   Tekintsük a következő $\mathbb{R}^2$-beli vektorokat:
   $$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}.$$
   Adjuk meg $x$-et és $y$-t úgy, hogy $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárisan függetlenek, $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ viszont lineárisan összefüggőek legyenek!

3. **(20 pont)**
   Elemezze, hogy **a** és **b** paraméterek értékei mellett, mikor hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek!
   $$\begin{aligned} x+2y+\mathbf{a}\,z &= 2 \\ x-5y+9z &= \mathbf{b} \\ 3x-y+5z &= 1. \end{aligned}$$

4. **(20 pont)**
Oldja meg az $\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, (azaz adja meg az ismeretlen $\mathbf{X}$ mátrixot, amennyiben létezik) ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. **(20 pont)**
Írja fel annak a lineáris leképezésnek az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisra vonatkozó mátrixát, amely az $\mathbb{R}^3$ tér vektorait levetíti az $x = t$, $y = 2t$, $z = -t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott egyenesre. Adja meg a $\mathbf{v} = 6\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{k}$ vektor levetített képét! Mi lesz a leképezés képtere, illetve magtere?

---

## IMSc példák

1. **(iMSC, 15 pont)**
Adja meg a következő mátrix determinánsának értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

2. **(iMSC, 15 pont)**
A legfeljebb $n$-edfokú polinomok $\mathcal{P}_n$ terében a következőképpen értelmezzük a $T$ transzformációt:

$$T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n, \quad p(x) \mapsto p(x+1).$$

Mutassuk meg, hogy $T$ lineáris. Adjunk meg egy bázispárt $\mathcal{P}_n$-ben, amire vonatkozólag $T$ mátrixa az egységmátrix!