Folyamatszabályozás

Csinálok borítót, hogy legyen 100. oldal

Tartalomjegyzék

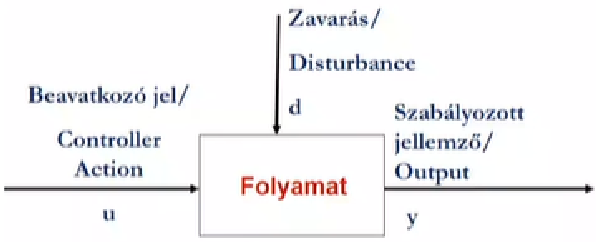
1. előadás

Folyamatszabályozás

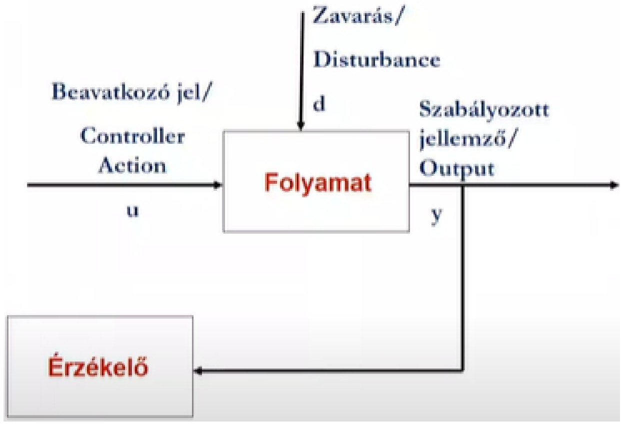
- **Folyamat: időben változó** (más szóval dinamikus) **rendszer**, élettani/biológiai rendszer, műszaki/kórházi berendezés, stb.
- Szabályozás: folyamat befolyásolása, adott cél érdekében történő módosítása, leggyakrabban egy jellemző adott szinten tartása (pl. hőmérséklet)

Szabályozási kör

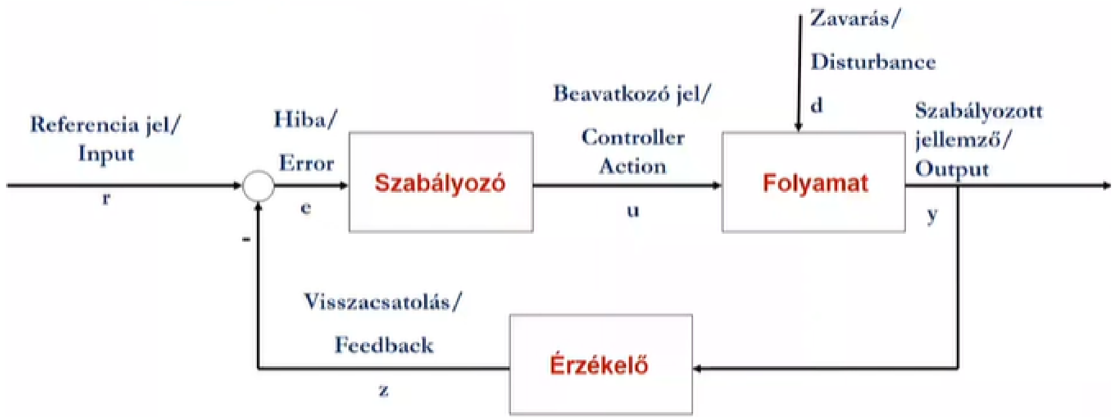
- Egy fizikai mennyiség vagy anyag fog változni időben, ez a **folyamat.**
- A folyamatnak vannak bemenetei, olyan **jelek**, amiket a folyamat kívülről kap, vagy ezekkel próbáljuk befolyásolni.



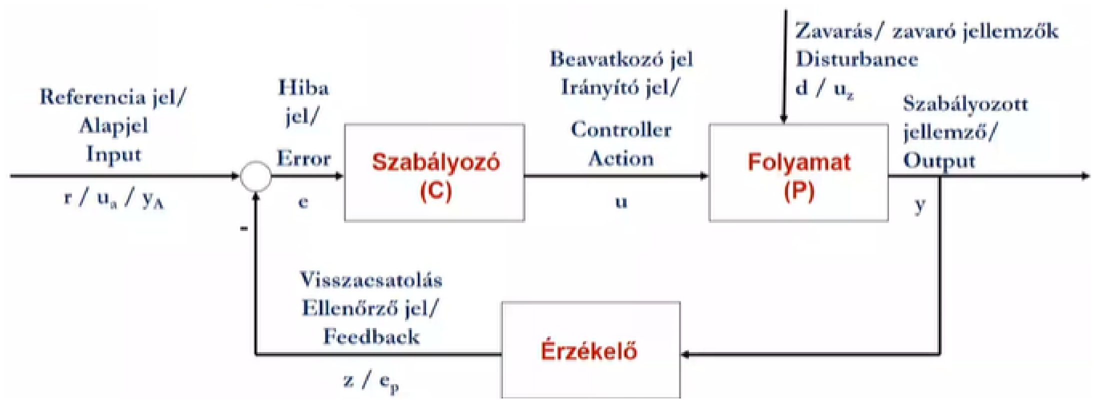
- Amikor egy folyamatot szeretnénk jellemezni, akkor meg kell rajta **mérni**, ami alapján el szeretnénk dönteni, hogy olyan állapotban van, amilyenben szeretnénk, hogy legyen, vagy nem.
- A mérni kívánt értéket valamilyen **érzékelő** segítségével fogjuk vizsgálni, ami megpróbál neki egy olyan értéket adni, ami **egyetlen számmal leírja**, ezt hívjuk kvantitatív értéknek.



- Ha pl. fűtésről beszélünk, a hőmérséklet a mért érték, és állítani is ezt szeretnénk. Hogy befolyásolni tudjuk, a mért értéket a szabályozóhoz kell továbbítani, ami egy beavatkozó jellel a folyamatot majd szabályozza. A folyamat kimenete egy hőmérsékleti érték, ebből az érzékelő ebben a példában villamos jelet állít elő. Ezt összehasonlítja egy referencia jellel (azzal, hogy mennyi legyen a hőmérséklet). Ezt hívjuk **hibának**, megmutatja, hogy **mennyivel tér el a kívánt érték a valóságtól**, és ezzel dolgozik a szabályozó.



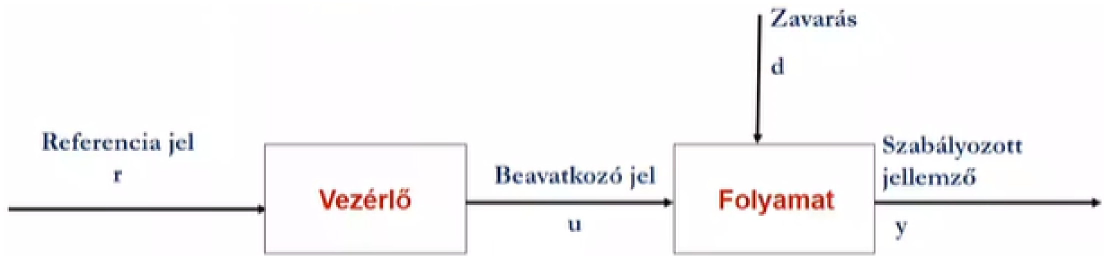
- A szabályozó a hiba ismeretében döntést fog hozni, amire kiad egy jelet, ami a folyamatot az aktuális állapotából kibillenti, a fűtéses példán például a fűtőtestbe kerülő melegvizet állítja azzal, hogy egy szelepet nyit vagy zár. Magyarul lesz egy eszközünk, ami a folyamatot befolyásolni tudja.
- Összegezve: van egy **szabályozó**, ami befolyásolja a folyamatot. A folyamat egy **időben változó** jelenség, ennek valamilyen **jellemzőjét akarjuk mérni**, ezt a mérést az **érzékelő** végzi. Az érzékelő ebből egy **jelet hoz létre**, azt valamilyen formában továbbítja. Lesz egy **összehasonlítás a kívánt értékkel**, amit a szabályozó figyelembe fog venni, hogy megfelelően tudja beállítani a **beavatkozó jelet**.
- Minden folyamat esetén vannak olyan működések, amiket nem tudunk megfigyelni, az érzékelő nem tudja érzékelni, ezért a szabályozóba nem tudjuk eljuttatni, így a szabályozó állapotát, vele együtt a szabályozót jellemzőt módosíthatja. Ez a **zavarás**, és emiatt létezik a szabályozó.
- Szokásos elnevezések:



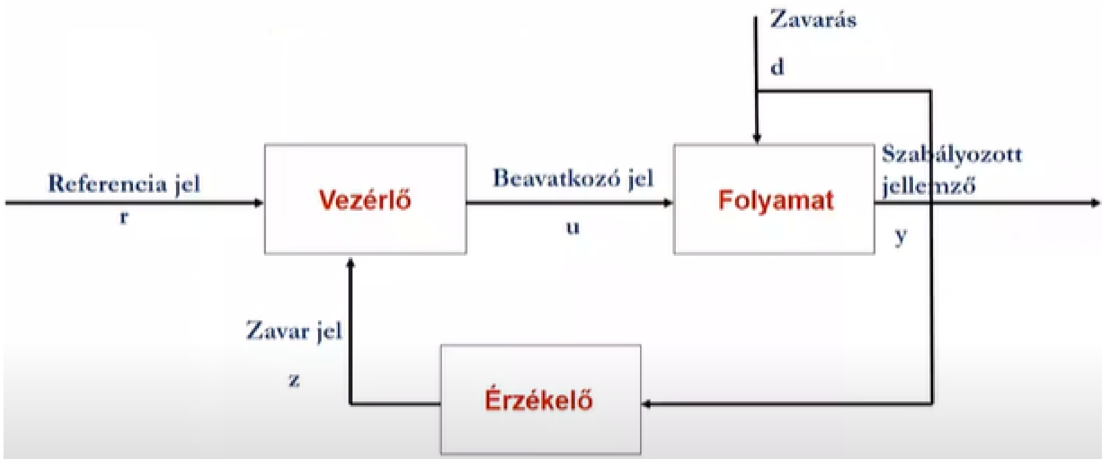
- Még egy példa - tempomat: érzékelő: kerék szögsebessége, szabályozott jellemző: sebesség, folyamat: autó haladása
- Az emberi test is rengeteg példát ad szabályozásra: hormonok, cirkadián ritmus, stb.

Nyílt/zárt szabályozási kör

- Egy fontosabb példa - telefon automatikus fényereje: referencia jel: megadott fényerő, szabályozott jellemző: valódi fényerő, viszont ezt nem tudjuk mérni, nincs érzékelő rá. Ezt hívják vezérlésnek, avagy nyílt huroknak:

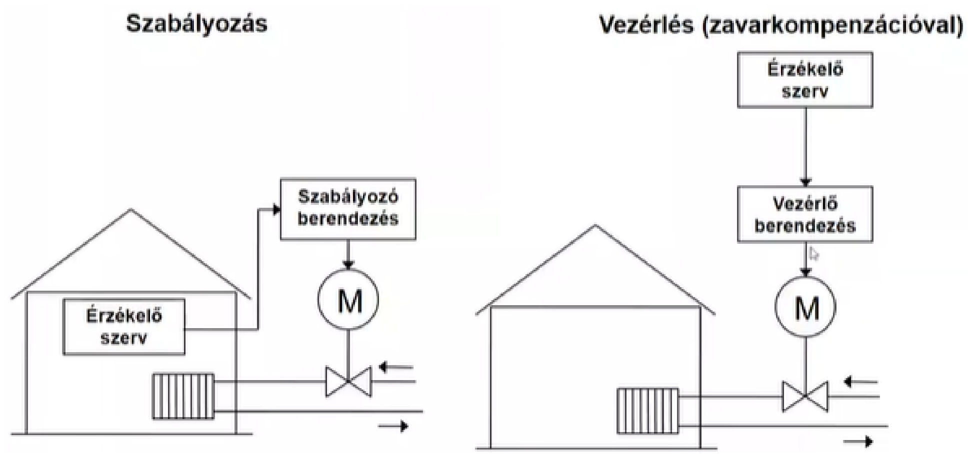


- Hogy a telefon a külső fényerőre be tudjon állni, **azt tekintjük zavarnak, amit viszont már tudunk érzékelni**, ezt hívjuk **zavarkompenzációnak**, így már tud külső zavarokra egy olyan jellemzőt szabályozni, amit nem tud mérni:



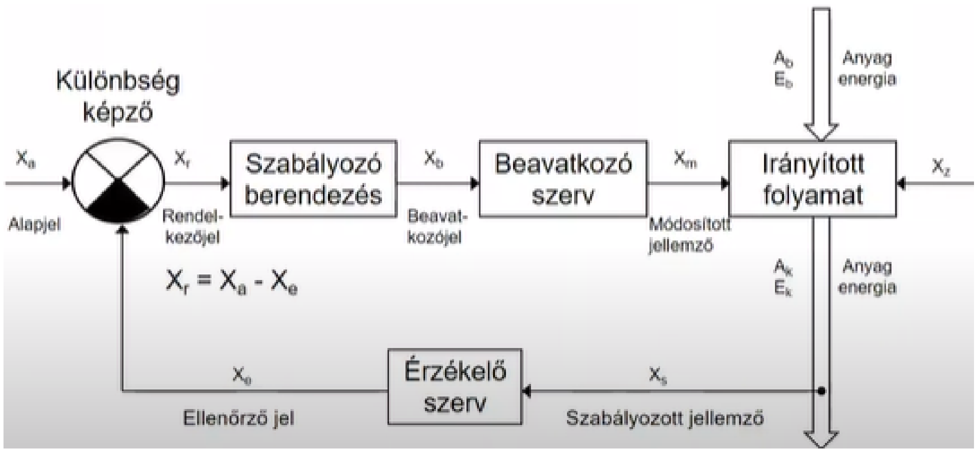
- Ahol az érzékelő a szabályozott jellemzőt is méri (a legelején bemutatott szabályozási kör), azt **zárt körnek** hívjuk, és nagyon fontos, hogy ott van **visszacsatolásunk**:

- Különleges példa - vízforralás tűzhelyen: szabályozott jellemző: víz hőmérséklete, vezérlő: gáz mennyiségét állítja, beavatkozó jel: tűz. Mi a visszacsatolás? Ott állok és nézem.
- Teszt: melyik nyílt és melyik zárt hurok?



Megoldáshoz jelöld ki ennek a sornak a folytatását.

- A zavarkompenzáció természetesen szabályozásnál is bevethető, nem köti semmi a nyílt hurokhoz/vezérléshez. A bal oldali ábrára ugyanúgy átültethető a jobb oldali érzékelő szerv, és akkor a kettő együtt működne.
- Egy szabályozási kör a valóságban:



Ezen az ábrán a centrifuga példájával élünk: a beavatkozó szerv a motor, az irányított folyamat a fordulatszám.

Szabályozási kör a gyakorlatban

- Beavatkozó szervek: szelep, motor, fűtőelem
- Érzékelő: fizikai mennyiség érzékelése, jelátalakítás
    - Tipikus példa: digitális hőmérő, távolságérzékelő, nyomásszenzor

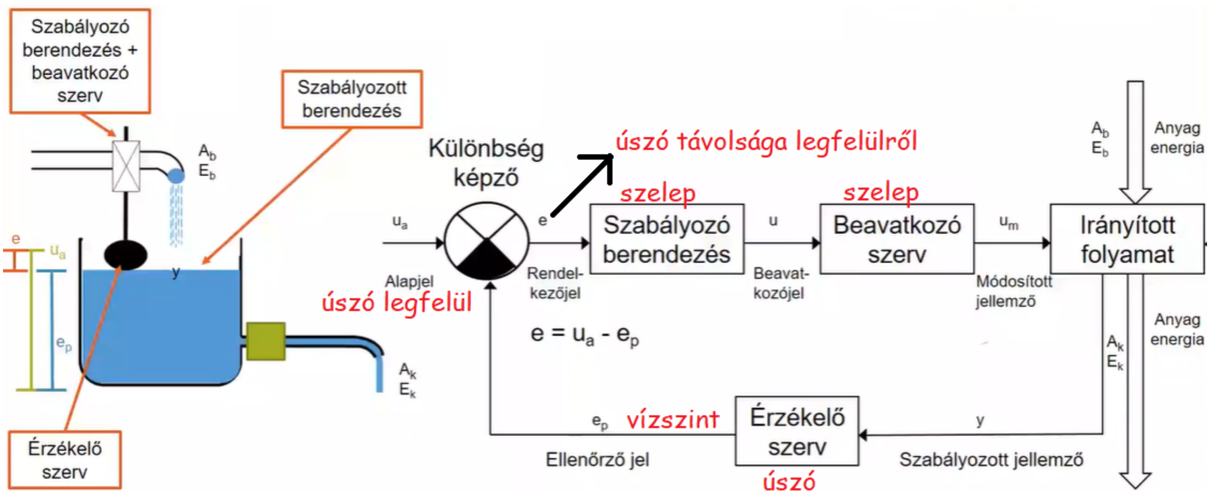
Folyamatszabályozási feladat megoldásának lépései

1. Folyamat működésének megértése
    - Megpróbáljuk valamilyen fizikai vagy más területi ismeret alapján a folyamatot jellemezni
    - Az előző pontban talált függvények paramétereit (kimenet, bemenet, állapot) meghatározzuk
2. Szabályozó megtervezése
    - Tervezés, szimulációval tesztelés
    - Valós rendszer tesztelése

2. előadás

WC-tartály vízszintszabályozása

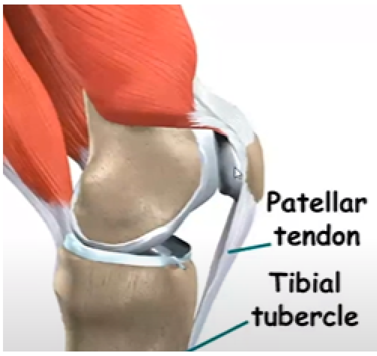
- A vízszint egy jó paraméter, hogy mennyi víz van benne
- A víz tetején egy úszó van, a csaphoz egy kar köti, ez a kar egy mechanikai kapcsolaton keresztül fogja a szelepet vezérelni. A szelep vezérli a beavatkozó jelet, amihez a referencia jel az úszó legfelsőbb pozíciója lesz (ahol a szelepet teljesen elzárja)



- A jel absztrakt dolog, nem mindig konkrét jel (pl. elektromos), itt például a vízszint ellenőrző jele valójában az úszót tartó kar elmozdulása.

Nyílt és zárt hurkú szabályozás, röviden, újra

- Nyílt hurkú szabályozás (vezérlés)
  - A beavatkozó jelet folyamatos állapotváltozó mérése nélkül állítjuk elő
  - Egyszerűen megvalósítható, de ismernünk kell pontosan a rendszert és a működési körülményeket, különben hiányos modellt alkotunk róla, amitől pontatlan lesz a szabályozás
  - Nem használható, ha nem ismerjük a modellt vagy a működési körülményeket, vagy változások következnek be a rendszerben
- Zárt hurkú szabályozás (szabályozás)
  - Folyamatos beavatkozásra van szükség, folyamatosan mérünk és beavatkozunk, így pontos lesz, kisebb változásokat tolerál
  - Általában bonyolultabb megvalósítású



Térdreflex-vizsgálat

- A patelláris ínt a mögötte található üregbe egy kalapáccsal beütik, ettől a szalag nem ér el olyan távolra, ami a négyfejű combizom megnyúlását fogja eredményezni, lényegében megrántják azt az izmot. Az izom úgy érzékeli, mintha hirtelen megnyúlt volna, de próbálja a hosszát megtartani, inkább összehúzódik.

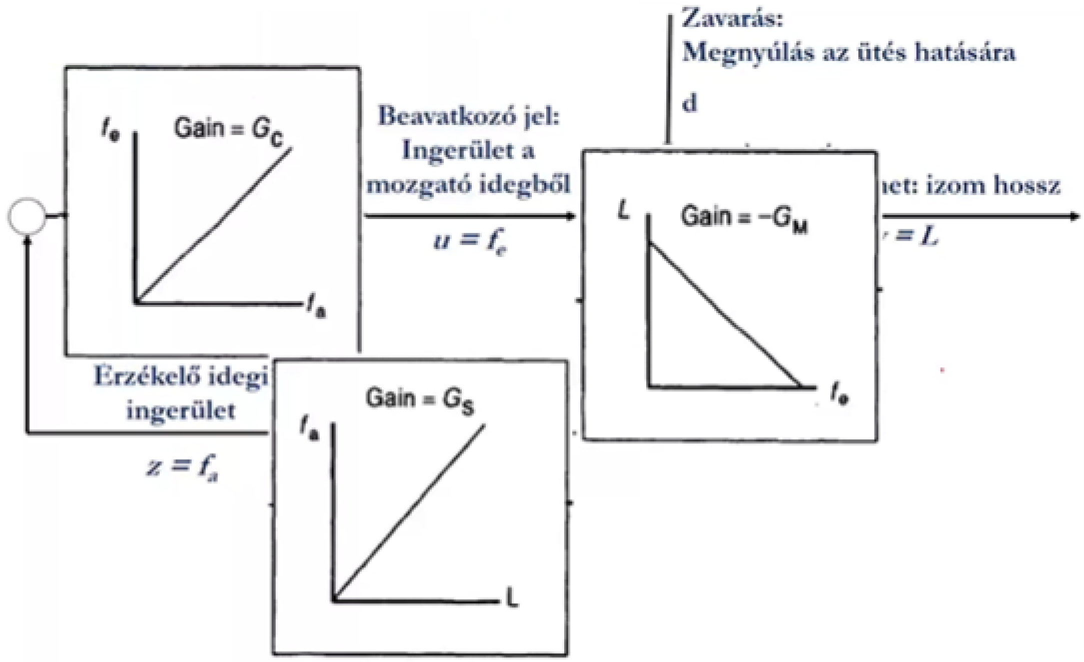
- Az izomrostok között vannak nyúlásreceptorok, amik ingerületté alakítják a megmozdulást. A nyúlásreceptorokhoz egy idegsejt kapcsolódik, ami ezt az ingerületet a gerincvelőbe szállítja, ahonnan egy idegdúc egy olyan idegsejthez szállítja az ingert, ami az izomrostokat tudja irányítani, és így összehúzódásra tudja ingerelni nagyon gyorsan.
- A nagy kitérést a lábban az okozza, hogy az ütés után az ín azonnal visszanyeri az eredeti állapotát, tehát ez egy pillanatnyi fizikai hatás, és a rendszer nem tud vele lépést tartani.
- A rendszer, amit szabályoztunk, az a combfeszítő izom. A szabályozott jellemző az izom hossza. Ezt az izomorsó fogja érzékelni. Akkor fog ingerületet kiadni, ha megváltozik a hossz, tehát az izom hosszának változását adja ki magából visszacsatolásként, ellenőrző jelként. A szabályozó, ami a gerincvelői idegdúc, egy hibajelet fog kapni, ezt biológiai rendszerben nagyon nehéz definiálni. A kalapács ütése egy pillanatnyi rövidülés, ami a rendszert az egyensúlyi állapotából kizökkenti, zavarást jelent számára.

- Alkossuk meg a rendszer elemeinek modelljét: a bemenetek és a kimenet kapcsolatát kell leírnunk valahogy. Ezeket egyenletekkel leírhatjuk, ahol bal oldalt a kimenet, jobb oldalt pedig a bemenetek kapcsolata látható.
    - Szabályozott rendszer: combizom
        - $L = L_0 - G_m * f_e$
        - L: az izom hossza az ingerület alapján
        - f_e: a mozgató idegből a combizomba érkező ingerület nagysága, a neve efferens ingerület
        - G_m: ilyen mértékben számít az ingerület (arányossági tényező)
        - L_0: az izom hossza, ha nincs mozgató ingerület
        - L_0és $G_m$konstans, tehát ez egy egyenes arányosság lesz
        - Azért kivonás, így fordítottan egyenes az arányosság, mert az izom hossza az ingerület hatására csökken
    - Érzékelő: izomorsó
        - $f_a = G_s * L$ (ennek a neve: afferens ingerület)
        - f_a: az izomorsón megjelenő ingerület
        - L: az izom hossza

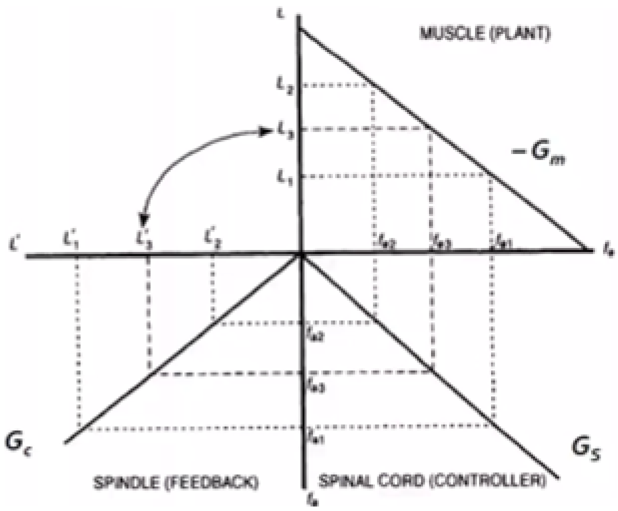
- G_s: arányossági tényező, ilyen mértékben számít az izomhossz
- G_s konstans, tehát ez is egyenes arányosság
- Itt is egyenes arányosság van, hiszen G_s konstans, és mivel az izom hossza egy egyszerű pozitív mértékegység, előjelváltozás nincs

- Szabályozó: gerincvelői dúc
  - $f_e = G_c * f_a$ (ennek a neve: efferens ingerület)
  - Valójában csak az izomorsón megjelenő ingerületet szorozza, így ha nagyon akarnánk egyszerűsíteni, az érzékelőt és a szabályozót egyetlen elemmé tudnánk redukálni, f_a-t behelyettesítve: $f_e = G_c * G_s * L$, ez még mindig egyenes arányosság, mert G_c is arányossági tényező, így konstans
- Helyettesítsük be a képleteket a folyamatszabályozásban használt betűkkel, hogy könnyebb legyen összehasonlítani az ábrákkal:
  - $L = L_0 - G_m * f_e \Rightarrow y = L_0 * G_m * u$
  - $f_a = G_s * L \Rightarrow z = G_s * y$
  - $f_e = G_c * f_a \Rightarrow u = G_c * z$
  - $f_e = G_c * G_s * L \Rightarrow u = G_c * G_s * y$

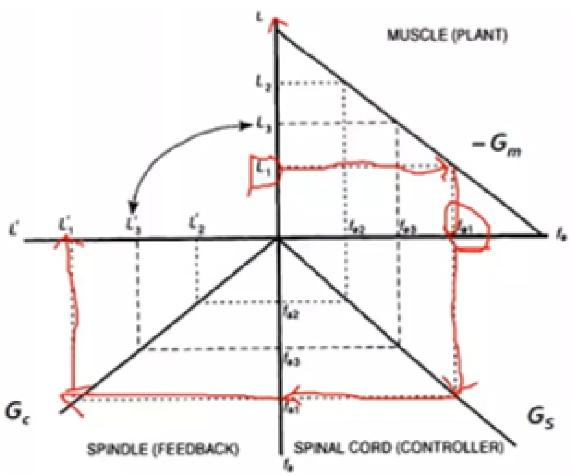
- Mikor marad mozdulatlan a combfeszítő izom? Ha nem változik az ingerület, folyamatosan ugyanazt az ingerületet kapja a combfeszítő izom, mivel egy ingerülethez egy hossz tartozik. Mikor nem változik az ingerület? Ha az izom hosszából pontosan olyan ingerület jön létre a teljes szabályozási körön keresztül, tehát olyan ingerületet állít elő a mozgató idegben, aminek eredménye ugyanaz az izomhossz. Ezt hívjuk egyensúlyi helyzetnek.
- Hogy lássuk, milyen pontokon áll elő az egyensúlyi helyzet, először is vegyük a rendszerünk három elemének a kimeneteit egy koordinátarendszerben szemléltetve, ahol a bemeneti változó és a kimenet aránya szerepel:



- Ha ezeket összeillesztjük az egyező tengelyek szerint, akkor egy közös ábrában tudjuk őket ábrázolni:



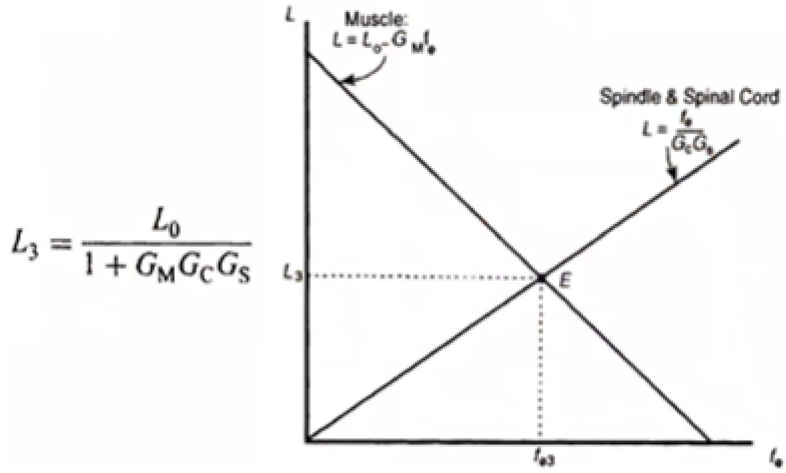
- Ez az ábra leírja, hogy mi történik, ha egy adott hosszúságú az izom, olyankor milyen hatások lépnek fel. Ha az izom nagysága L_1, akkor le tudom olvasni, hogy az f_{e1} efferens ingerület tartozik hozzá. Ennek eredménye a gerincvelői idegdúcban az f_{a1} afferens ingerület. Az afferens ingerület alapján már látjuk, hogy mekkora L'_1 hosszra fog az izom húzódni.



- Semmi mást nem kell tenni, csak a két hosszt összehasonlítani, hogy lássuk, ez a helyzet egyensúlyi-e, vagyis nyugalmi-e a rendszer.

Statikus rendszerelemzés

- Ezt a rendszert nagyon könnyen egy koordináta-rendszerré lehet alakítani, viszont elsőre ez nagyon sok magyarázatra szorul:



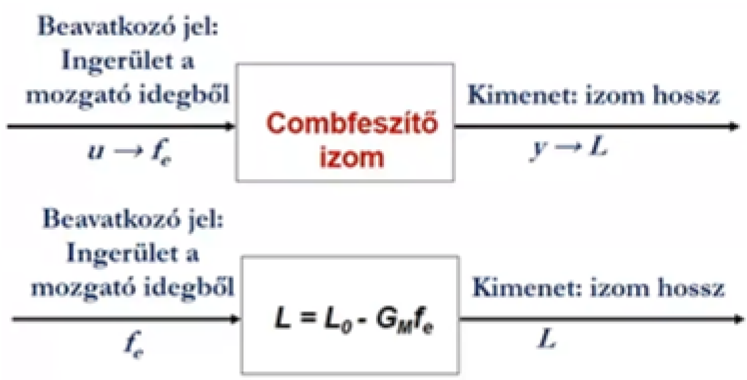
  - A csökkenő egyenesen a combizom hossza, vagyis a szabályozott folyamat látható, amit már leírtunk egyszer: $L = L_0 - G_m * f_e$
  - A növekvő egyenest is leírtuk, csak nem ebben a koordináta-rendszerben. Ez az érzékelő és szabályozó (izomorsó és idegdúc) egyesített képletéből adódott, ami ez volt: $f_e = G_c * G_s * L$, csak átrendeztük L-re, hogy az legyen bal oldalon (hogy eredményként, azaz magassági tengelyként tudjuk lerajzolni, mint a másik függvényt), ezáltal f_e jobbra került, ami már a hosszanti tengely, vagyis amihez arányosítjuk az eredményt.
  - A közös képlet (az egyensúlyi helyzetet leíró L_3) úgy jön ki, hogy azt vizsgáljuk, milyen f_e értéken egyenlő a két görbe. Az eredménye azt mondja meg, hogy adott hosszhoz milyen egyensúlyi f_e tartozik. Lépésenként:
    - Az egyik egyenlet már eleve f_e-re volt felírva, csak a grafikonra L-re rendeztük, de eredetileg ez volt: $f_e = G_c * G_s * L$
    - Az $L = L_0 - G_m * f_e$ rendezése f_e-re:
      - $L - L_0 = \; - G_m * f_e$
      - $L_0 - L = G_m * f_e$
      - $f_e = \frac{L_0 - L}{G_m}$
    - Az egyensúlyi pont tehát $\frac{L_0 - L}{G_m} = G_c * G_s * L$, ezt L-re kell rendezni:
      - $L_0 - L = G_m * G_c * G_s * L$
      - Az egyszerűség kedvéért legyen $x = G_m * G_c * G_s$, majd a végén visszaírjuk, mert így rövidebb levezetni.
      - $L_0 - L = x * L$

- $x = \frac{L_0 - L}{L} = \frac{L_0}{L} - \frac{L}{L} = \frac{L_0}{L} - 1$
- $1 + x = \frac{L_0}{L}$
- $L = \frac{L_0}{1+x} = \frac{L_0}{1+G_m * G_c * G_s}$

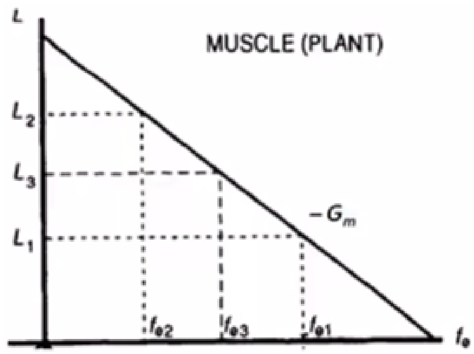
- Ahol a két egyenes metszi egymást, ott a rendszerünk egyensúlyi állapotban van. Ezt az ábrát bármilyen rendszerre felrajzolhatjuk, egyik görbe (mert nem mindig lesznek a valóságban a képletek tökéletesen egyenesen arányosak) a szabályozott rendszer, a másik egyenlet pedig a szabályozó elemek hatása, a metszéspontjukon (amiből néhány rendszernél több is lehet) pedig az egyensúlyi helyzet olvasható le.
- Foglaljuk össze az eddigieket: meghatároztuk a rendszer elemeit, a folyamatot, és a szabályozót, a köztük fennálló jeleket. Ehhez az kellett, hogy megmondtuk, milyen változóval jellemeztük a folyamatot és milyen kapcsolatok vannak az elemek között. Megmondtuk, hogy mit tekintünk az adott rendszer melyik elemének (pl. izomorsó az érzékelő), utána felírtuk az egyenleteket, ennek a szakszerű neve modellezés. A folyamat, az érzékelő, és a szabályozó modelljét állapítottuk meg matematikai leírás segítségével. A matematikai modellel kapcsolatban már különböző kérdéseket tehettünk fel, például a statikus karakterisztikát és az egyensúlyi állapotot határoztuk meg, vagyis hogy milyen helyzetben nem fog a rendszerünk inger alá kerülni. A rendszermodellünket nem mérés alapján, hanem a különböző fiziológiai törvények alapján határoztuk meg.

Statikus vs. dinamikus rendszermodell

- Az eddigi modelljeink időtől független leírásúak voltak, tehát “ha ilyen értékű az egyik jel, akkor olyan értékű a másik jel”, de valójában, ha kiváltunk egy ingerületet, nincs azonnal hatása. Ez a modellünkben nem volt benne, tehát az úgynevezett statikus modelljét adtuk meg. A valóságban dinamikus rendszerekkel fogunk foglalkozni.
- A statikus rendszerek kimeneteit közvetlenül meghatározzák a bemenetek, az összefüggés időben változatlan. A rendszer ennek megfelelően algebrai kifejezésekkel leírható:



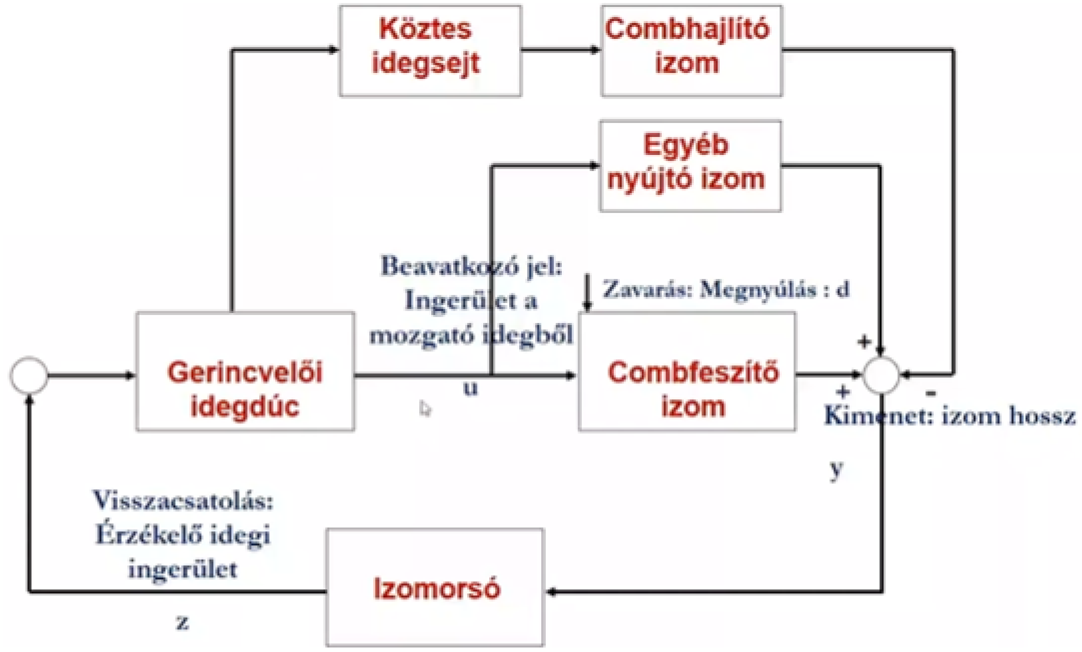
- Statikus rendszer elemzése nagyon egyszerű, a kimenetekből egyszerűen meg tudjuk határozni a bemeneteket:



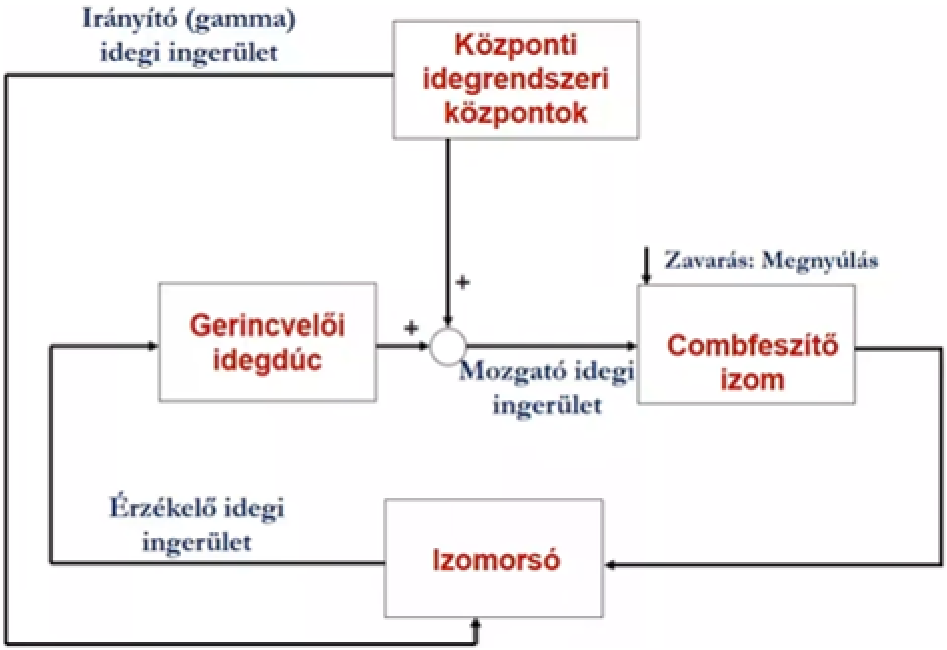
- A dinamikus rendszerek (minden fizikai rendszer) kimenetei függnek a korábbi bemenetektől és/vagy a rendszer kezdeti állapotától, tehát "emlékezettel rendelkezik". Ez azt jelenti, hogy ugyanarra a bemenetre az emlékezetétől függően máshogy is reagálhat. A kimenet és bemenet közötti kapcsolat időben változhat, ez azt jelenti, hogy lehet késleltetés a rendszerben. Ilyen rendszereknél már differenciálegyenleteket, azok rendszerét használjuk.

Élettani szabályozások tipikus jellemzői

- Ezek a rendszerek általában bonyolultak, mert különböző szempontok szerint összetettek. Az első fontos szempont, hogy ezek a rendszerek többcélú rendszerek, tehát egy élettani rendszer több dolgot is befolyásol, például a légzési rendszer feladata a gázcsere és hőleadás, vagy a verejtékezés a hőmérséklet-szabályozás mellett anyagcserére is való.
- A rendszer elemei nagyon be vannak ágyazódva a környezetükbe, így nagyon nehéz őket jellemezni, például egy izomrost megnyúlása sem triviális. A rendszermodellezés és paraméter-meghatározás szinte lehetetlen, nagyon durva közelítéssel lehetséges, hiszen a műszaki rendszerekkel ellentétben nem mi tervezzük őket, és nem tudjuk kiemelni őket a környezetükből.
- Műszaki rendszereknél is gyakran van, hogy különböző szabályozási körök egymásba vannak ágyazva, amikor egyik kör a másik alapjait határozza meg, és nem önállóan működik. A fiziológiai rendszereknél még inkább gyakori, például a combunkat nem csak az ismertetett szabályozási kör kezeli, több izom van, és tudunk agyi ingerekkel is hatni ugyanannak az izomnak a hosszára, tehát itt keresztkapcsolat van különböző szabályozási körök között:



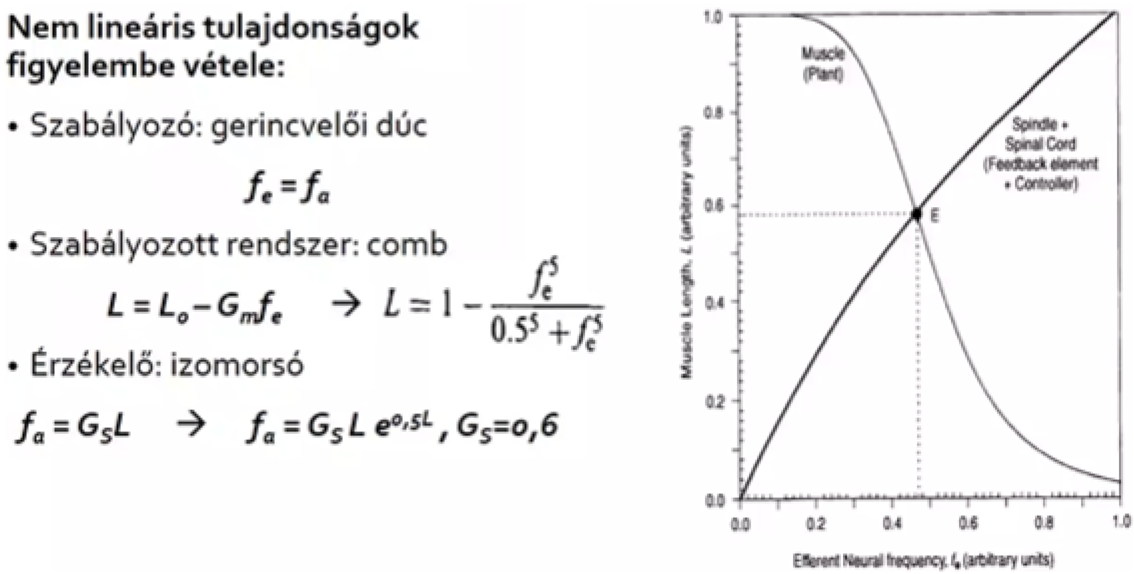
- Ezek a rendszerek adaptív rendszerek. Ez azt jelenti, hogy a rendszernek a paramétereit is tudjuk változtatni a környezettől függően. Erre jó példa a combizom tudatos mozgatása, vagyis ha akarjuk, az izomorsó ingerületét felül tudjuk bírálni:



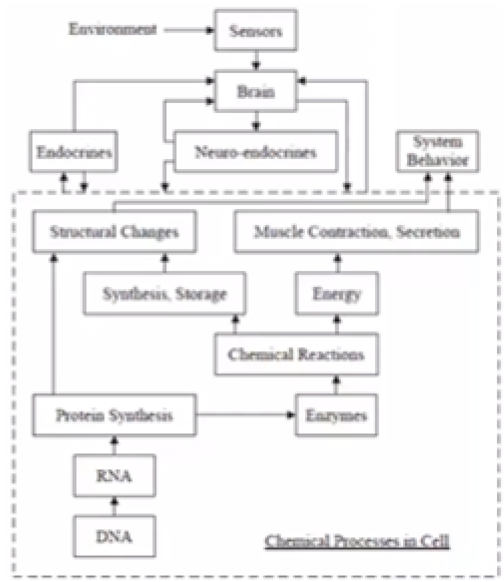
  Ezen az ábrán azt látjuk, ahogy a központi idegrendszer az izomorsót felül tudja bírálni, hogy az ne adjon ki semmiféle ingerületet, miközben a combfeszítő izmot egy saját jellel mozgatja meg. Ilyenkor ugyanúgy feszül az izom, de nem szól bele semmilyen másik rendszer. Ha rendszertechnikailag nézzük, akkor az történik, hogy a központi idegrendszer az izomorsó paramétereit megváltoztatja, például az egészet megszorozza 0-val, tehát nem az lesz az egyenlet, amit korábban leírtunk hozzá, hanem lényegesen különböző, hogy az akaratlagos tartásnak ne álljon ellen.
- Gyakran találhatunk a rendszerbe épült negatív visszacsatolást, tehát nincs alapjel, amihez képest hibát számítunk, egyszerűen a visszacsatolást vesszük negálva, például azt mondjuk, hogy az izomorsó jele már önmagában egy rendelkező jel, vagyis a hiba:

Hol került a negatív előjel a rendszerbe? Az izom működése hozta ezt, ugyanis inger hatására nem hosszabb lesz, hanem rövidebb, ez önmagában negatív visszacsatolást jelent. Alapjelet nem tudunk mondani, mert nincs fiziológiai érték, ami ezt jelentené.

- Nem minden rendszer lineáris, mint korábban írtam, simán lehet görbe is egy ingerület, ettől függetlenül minden, amit eddig tanultunk, ugyanúgy működik, ha megnézzük a combizom szabályozásához a valóságban használt modellt:



- Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy a fiziológiai feladatok megoldása a műszakiakkal szemben jóval bonyolultabb, a következő ábrán például egy komplex jelenséget, a sejten belüli fehérjeszintézist láthatjuk a környezeti kapcsolataival sematikusan:

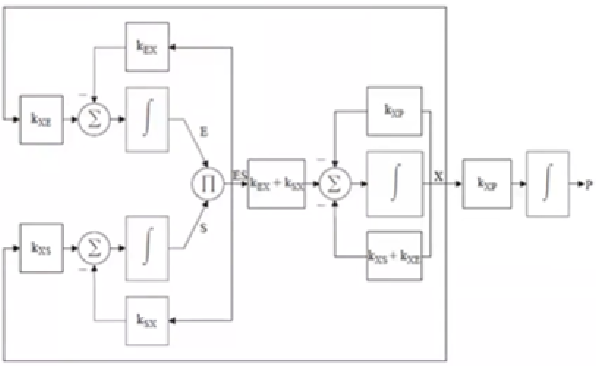


Itt a sejt olyan fehérjéket gyárt, amik a saját működését fogják majd befolyásolni.

Enzim működésének szabályozási modellje

- Ha van egy enzim, és van valamilyen kiindulási anyag, akkor az enzim egy folyamatgyorsítóként hat, vagyis az enzimből és a kiindulási anyagból egy köztes termék fog előállni, ami utána enzimre és végtermékre fog bomlani:
  $E + S \leftrightarrow X \rightarrow E + P$, ahol:
    - E: enzim
    - S: kiindulási anyag (szubsztrát)
    - X: köztes termék
    - P: végtermék
- Nem minden reakcióban lesz az enzimből és kiindulási anyagból köztes termék, az vissza is alakulhat, mint az egyenlet mutatja is.
- Egy ilyen reakció gyorsasága az enzim mennyiségétől és koncentrációjától függ, amit egy differenciálegyenlettel lehet leírni. Vegyük például az enzim mennyiségének alakulását az idővel:
  $\frac{dE}{dt} = -k_{EX} * E * S + k_{XE} * X$
    - $\frac{dE}{dt}$ az enzimnek az időegységbeli változása
    - $-k_{EX}$ az enzimből köztes anyaggá alakulás sebességét jellemző konstans. Azért negatív, mert az alsó indexben látható, hogy az $E \rightarrow X$ irányba haladunk, tehát az enzim ettől az átalakulástól fogy.
    - $E * S$ a két anyag, aminek a koncentrációjától függ ez a reakció
    - $+k_{XE}$ a köztes anyagból enzimmé alakulás sebességét jellemző konstans. Ha olyan reakciónk van, hogy a köztes anyag nem alakul vissza enzimmé, például egyszerűen $E + S \rightarrow X$, akkor ez a tag nincs. Érdemes megvizsgálni az egyenlet mindkét oldalát, ugyanis a $E + S \leftrightarrow X \rightarrow E + P$ példában akkor is szerepel ez a tag, ha X nem alakul vissza, tehát $E + S \rightarrow X \rightarrow E + P$.

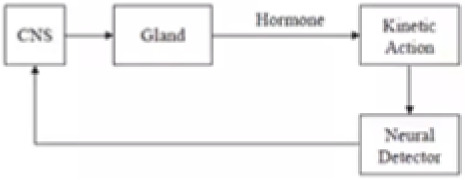
- Miután láttuk, hogy egy tagra mi alapján írjuk fel az egyenletet, a következőkre is oldjuk meg. Tudjuk, hogy negatív előjellel szerepel az, ami a reakcióban mássá alakul, és pozitív előjellel, amiből ez a típusú anyag lesz. Tehát írjuk fel a maradék matematikai modellt a $E + S \leftrightarrow X \rightarrow E + P$ reakcióra:
    - $\frac{dS}{dt} = -k_{SX} * E * S + k_{XS} * X$
    - $\frac{dX}{dt} = (k_{EX} + k_{SX}) * E * S - (k_{XS} + k_{XE}) * X - k_{XP}X$
        - Itt három külön tagot is látunk, első az $E + S$-ből X-é alakulás, második az X-ből $E + S$-é alakulás, harmadik pedig az X-ből $E + P$ képződése.
    - $\frac{dP}{dt} = k_{XP}X$
    - Fontos észrevennünk, hogy $\frac{dE}{dt} + \frac{dS}{dt} + \frac{dX}{dt} + \frac{dP}{dt} = 0$, vagyis egy átalakulást annak mindkét oldalán, ellentétes előjellel fel kell tüntetni. A legegyszerűbb példa $\frac{dP}{dt}$, az itteni $k_{XP}X$ tag szerepel negatív előjellel a $\frac{dX}{dt}$ egyenletben, mert ott megszűnt X lenni, P pedig létrejött ugyanannyi idő alatt ugyanannyi X-ből.
- Jelfolyamábrára alakítva így néz ki a folyamat, ez csak a műveletek dobozba írása:



(ennek felrajzolása nem ez a tárgy)

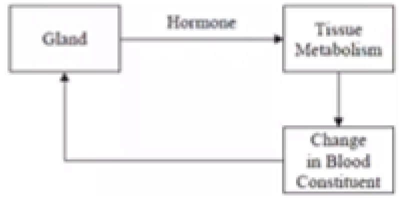
Hormonok működésének szabályozási modelljei

- Kinetikus hormonszabályozás hatásvázlata, ez alapvetően a simaizmok összehúzódását befolyásolja:



A hormon valamilyen módon ki fogja fejteni a hatását (jobb felső rendszer) és az összehúzódást, ami valamilyen idegrendszeri észleléssel (jobb alsó rendszer), majd ez valamilyen idegrendszeri közvetítéssel fogja a termelő mirigy működését befolyásolni (felső középső rendszer).

- Ha anyagcsere-szabályozó hormonról van szó, a hormon lényegében a véráramba jutva fogja megváltoztatni az adott szövetnek a metabolikus egyensúlyát, ami a véráramon keresztül fogja a mirigy működését szabályozni:



- Ezek a témák jól demonstrálják, hogy a jel absztrakt fogalom, és rengeteg közvetítő környezet létezhet.

Feladatok

1. Írd fel az $A \to B$ reakció matematikai modelljét!
   Megoldást a következő szakaszt kijelölve találsz:

2. Írd fel az $E + S \to P$ reakció matematikai modelljét!
   Megoldást a következő szakaszt kijelölve találsz:

3. Írd fel az $E + S \leftrightarrow P$ reakció matematikai modelljét!
   Megoldást a következő szakaszt kijelölve találsz:

3. előadás

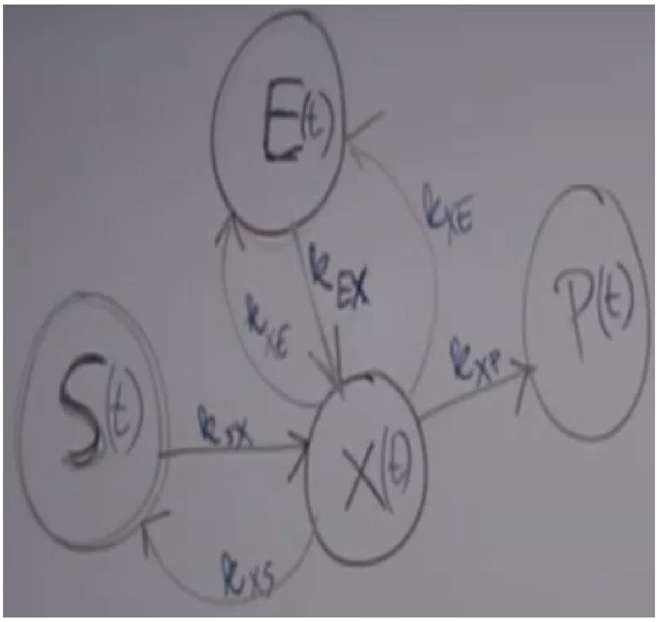
Enzim működésének alapos ismétlése

- Az anyagok (**E**nzim, **S**zubsztrát, stb.) mennyiségei időben változnak, ezért beszélhetünk differenciálegyenletről. Leírhatnánk őket úgy is, hogy $\frac{dP}{dt} = k_{XP}X(t)$, csak az idő megjelölését elhagytuk, mert így is elég kifejező, ha tudjuk, hogy az anyagok aktuális mennyiségéről beszélünk.
- A k érték, ami az anyagok közti átalakulás sebességét mondja meg, konstans. Hogy miért, gondolj bele például a radioaktív anyagok felezési idejébe: x anyagból adott év után $x/2$ lesz, majd ugyanannyi év után $x/4$, tehát adott időegység alatt ugyanannyira ($1/2$-szeresre) szorzódott a mennyiség. Pontosan ezt látjuk ezeken a képleteken is, hogy adott időegység alatt mennyi alakul át.
- Egy fura helyzet kognitív disszonanciát okozhat: $A \leftrightarrow B \rightarrow A$. Írjuk fel az egyenletrendszerét:

  $$\frac{dA}{dt} = -\,k_{AB}A + k_{BA}B$$

  $$\frac{dB}{dt} = k_{AB}A - k_{BA}B$$

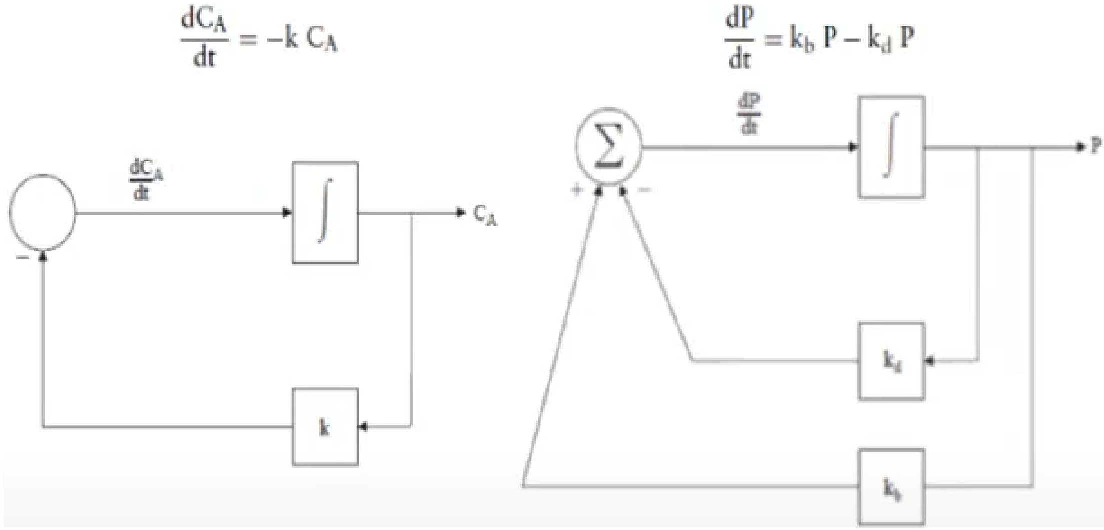
  Hiába lehet B-ből két különböző módon A, k_{BA} magába foglalja mindkettőt, ezért csak egyszer kell szerepelnie.
- A korábbi előadás $E + S \leftrightarrow X \rightarrow E + P$ reakciója felrajzolható ábrával is, amin egyszerűen csak meg kell keresni a diszkrét éleket (tehát a két k_{XE}-t elég egyszer venni), amiből már ugyanazok a differenciálegyenletek felírhatók:

  Ez azonban nem teljes reprezentáció, és nem ajánlott ez alapján dolgozni, ugyanis sehol nem jelzi például, hogy E és S egyszerre, egy oldalon lép reakcióba X felé, tehát E nem csak egyszerűen $k_{EX} * E$-ként, hanem $k_{EX} * E * S$ formában kerül a differenciálegyenletekbe.

- Egyszerű kérdés, statikus vagy dinamikus a rendszer? A választ itt jelölheted ki:

- Egy bonyolult rendszerben sok szabályozási kör szerepelhet, és különösen fontos elem a negatív visszacsatolás. Ez biztosítja, hogy a rendszerek meg tudnak közelíteni egy kívánt értéket. A negatív mellett pozitív visszacsatolás is létezik. Fontos, hogy az adott érték a szabályozóba milyen módon kerül vissza. Az enzimes feladat a tárgy első példája, ahol pozitív visszacsatolás is szerepel:

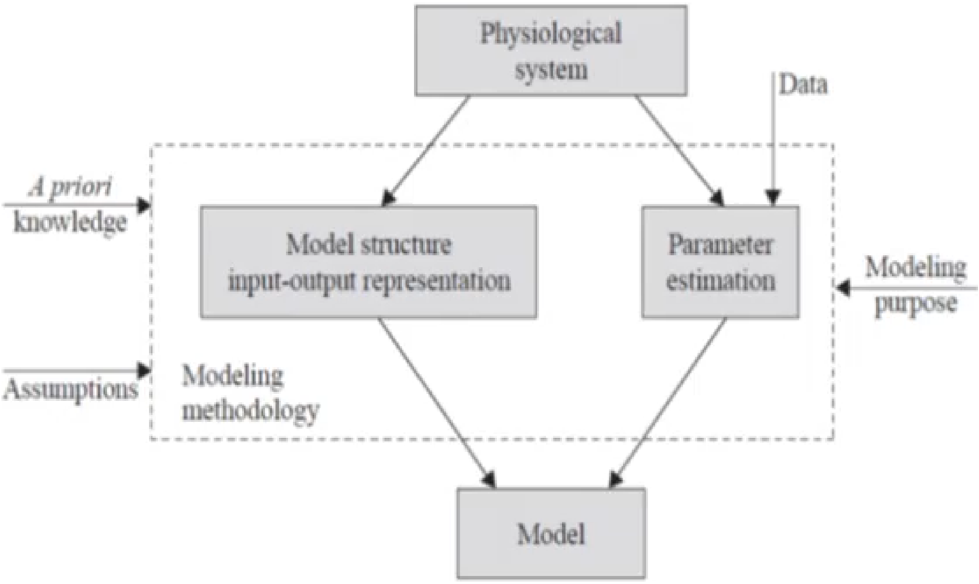


- A pozitív visszacsatolásnál előfordulhat, hogy a rendszerbe visszakerülve gyorsítja a jellemző növekedését, ez akár végtelen növekedést is okozhat. A negatív és pozitív visszacsatolás közt az alapvető különbség az, hogy a negatív valamilyen módon képes korlátos lenni, stabil állapotot előidézni, míg a pozitívval ez nagyon nehéz. Sajnos az élettani rendszerekben nagyon gyakran találkozunk pozitív visszacsatolással is, amik úgy lehetnek stabilak, hogy a rendszerbe valami negatív visszacsatolás is bekerül.

Fiziológiai rendszerek modellezése

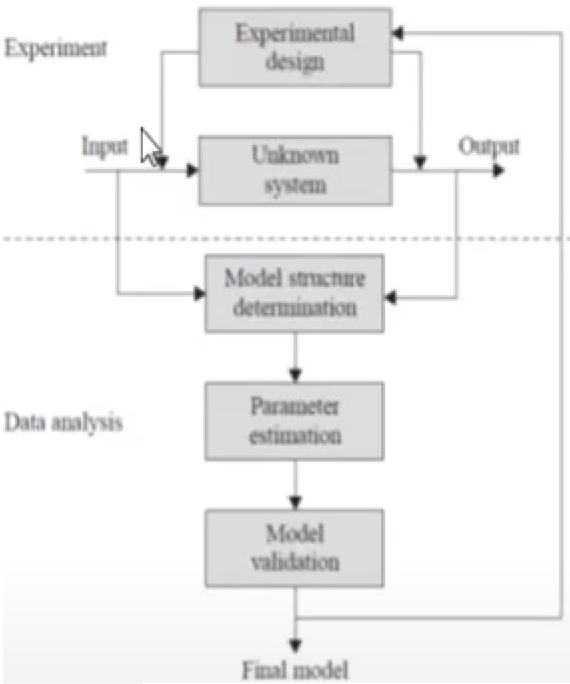
- Mit neveztünk modellnek? A modell a valós rendszernek a folyamata, az absztrakt leírása. A modellezés célja, hogy a valóság melyik jellemzőjét szeretnénk kiemelni. Ami a valóságból nem érdekel, azt nem visszük be a modellbe, ez különösen érvényes fiziológiai rendszereknél. Például nem érdekes, hogy a combizom-reflex vizsgálatánál pontosan milyen függvény alapján nyúlik meg, csak az, hogy valamilyen irányba és mértékben megnyúlik.
- Élettani rendszerek modellezésénél a modellalkotás alapvetően két lépést fog jelenteni. Egyik a modell elemeinek az azonosítása, ezeknek valamilyen módon történő jellemzése, a bemenetek és kimenetek meghatározása. Másik a modell struktúrájának, felépítésének a kialakítása, ebbe beletartozik az is, hogy milyen konstansok és paraméterek fogják befolyásolni. Ez utóbbi művelet neve paraméterbecslés.
- A modell felépítéséhez először eldöntjük, milyen szempont alapján szeretnénk jellemezni a modellt. Ez műszaki rendszereknél sokkal könnyebb, mert ott a kimenetek és bemenetek egyértelműek. Egy műszaki rendszer elemeit és a kapcsolatukat is mi terveztük meg, azokat már ismerjük.

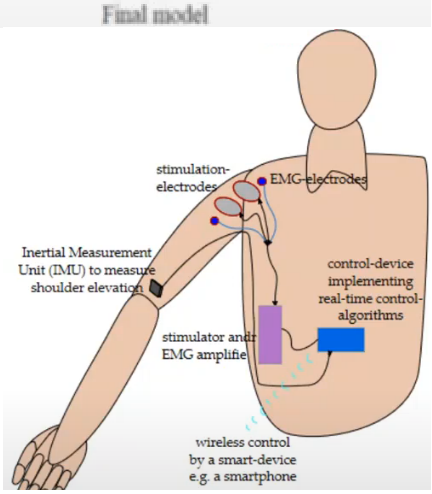
- Természetesen szükség van az adott tudományágban szerzett tudásra és szemléletre az egész modellalkotáshoz, például az enzimes példában biológiai tudással hozta valaki létre a modellt, ami alapján dolgoztunk:



Modell identifikáció

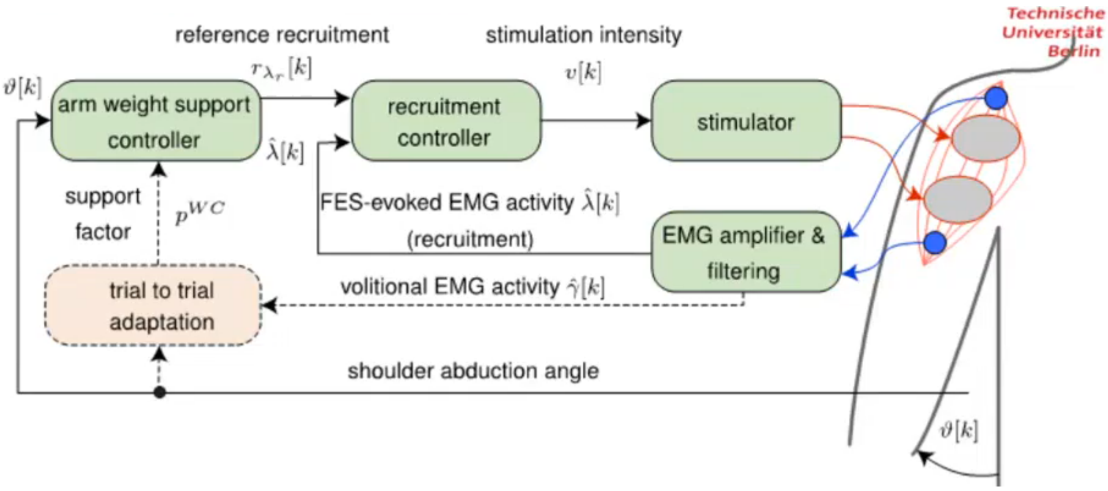
- Egy konkrét rendszer struktúrájának, illetve paramétereinek meghatározása.
- Ha nem lehet konkrét tudással hozzáállni, akkor kísérletezéssel oldható meg, vagyis kontrollált bemenetek esetén megnézzük, mit fog a kimenet válaszolni (egy rendszer adott bemenetre adott kimenetét **válasznak** hívjuk).
- Természetesen meg akarjuk vizsgálni, hogy a létrehozott modell működik-e, ezt hívják modell validációnak. Ez azt jelenti, hogy új, még nem próbált bemenetekkel teszteljük a rendszert, amiről a modellt alkottuk, és ellenőrizzük, hogy ugyanazt válaszolja-e, amit a megalkotott modell. Ha nem, akkor finomítani kell. Ez a finomítás iteratív folyamat, több lépésben közelítünk a kívánt pontosság felé.



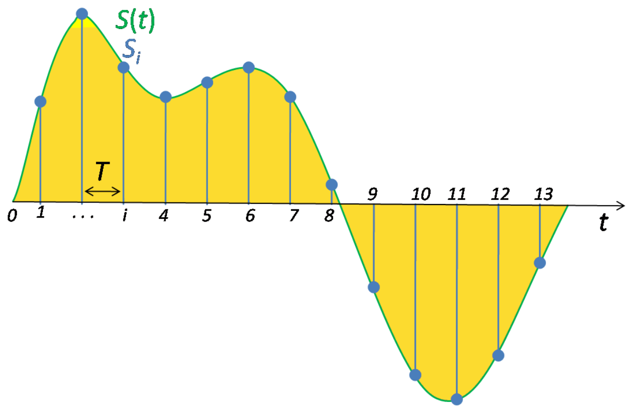


Folyamatszabályozás orvosi alkalmazása: stroke-terápia izomstimulációval

- Az alapja egy elektromiogramm, ami azt az ingerületet méri, amit a beteg saját maga vált ki, aminek a hatására azt gondolja, hogy fel tudja emelni a karját. Ezen kívül két elektróda áll mellette, amik nem mérőeszközök, hanem képesek izmot stimulálni, ők lesznek a beavatkozó jel.
- Ahhoz, hogy a rendszer működni tudjon, a kar aktuális helyzetét is meg kell határozni, tehát hogy a beteg mennyire emelte fel a karját, erre szolgál az IMU.
- Az egész azért bonyolult, mert sok szabályozási rendszerről beszélünk. Egyik a beteg saját mozgatása, amely egy idegi ingerületet fog kiváltani. Másik az, ami a mi beavatkozásunk. Harmadik, hogy erre mit válaszol a kar.



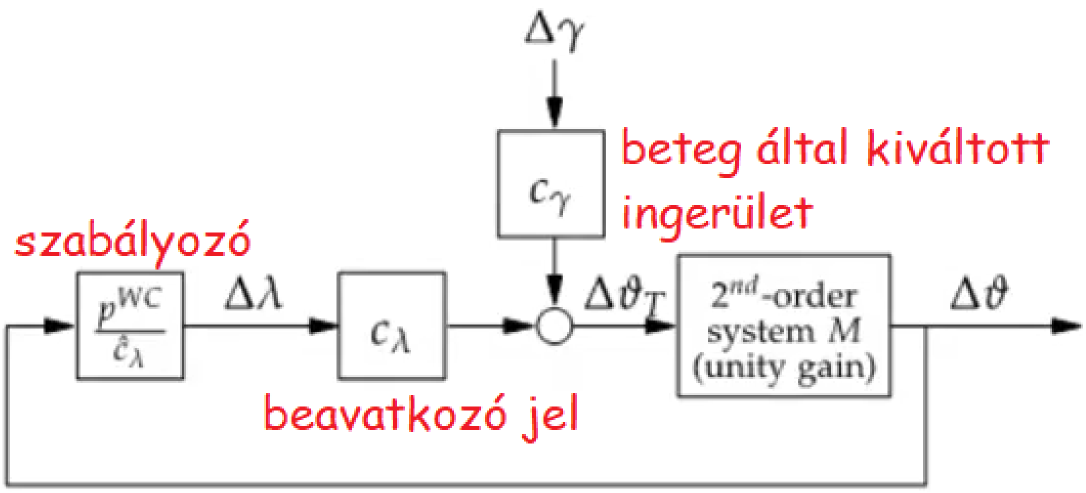
- Nagyon nehéz kiválasztani valami mérhetőt, ami alapján az elektromos rendszer dolgozik, ez lesz a kar abdukciós szöge. Emellett vizsgáljuk azokat az idegpályákat is, amik a visszacsatolást adják a mozgásról. Ezek az idegpályák a stroke-tól sérülhettek, és a jelüket meg kell próbálnunk eljuttatni a központi idegrendszernek, ez a terápia célja. Akkor hatásos a terápia, amikor az akaratlagos ingerrel arányos az abdukció, tehát a beteg tudatosan vezérli a karját.
- A terápia úgy működik, hogy a stimulátort óvatosan beállítva felemelgetjük a kart, és ezt összevetjük azzal, amilyen mozgást a beteg valóban akart. Ami ingereket mérünk a beteg idegein, annak mértékében határozzuk meg a saját stimulusunkat, és ezt kísérletezéssel finomítjuk, vagyis az erősítési tényezőt változtatjuk.
- A különböző rendszerváltozók után egy k betűt találtunk, pedig eddig időről beszéltünk, és azt t-vel jelöltük. Valójában ugyanúgy időről beszélünk, csak nem időben folytonos függvényekről, hanem diszkrét mintavételezésről, ami az idő adott közönkénti pontjait írja le:



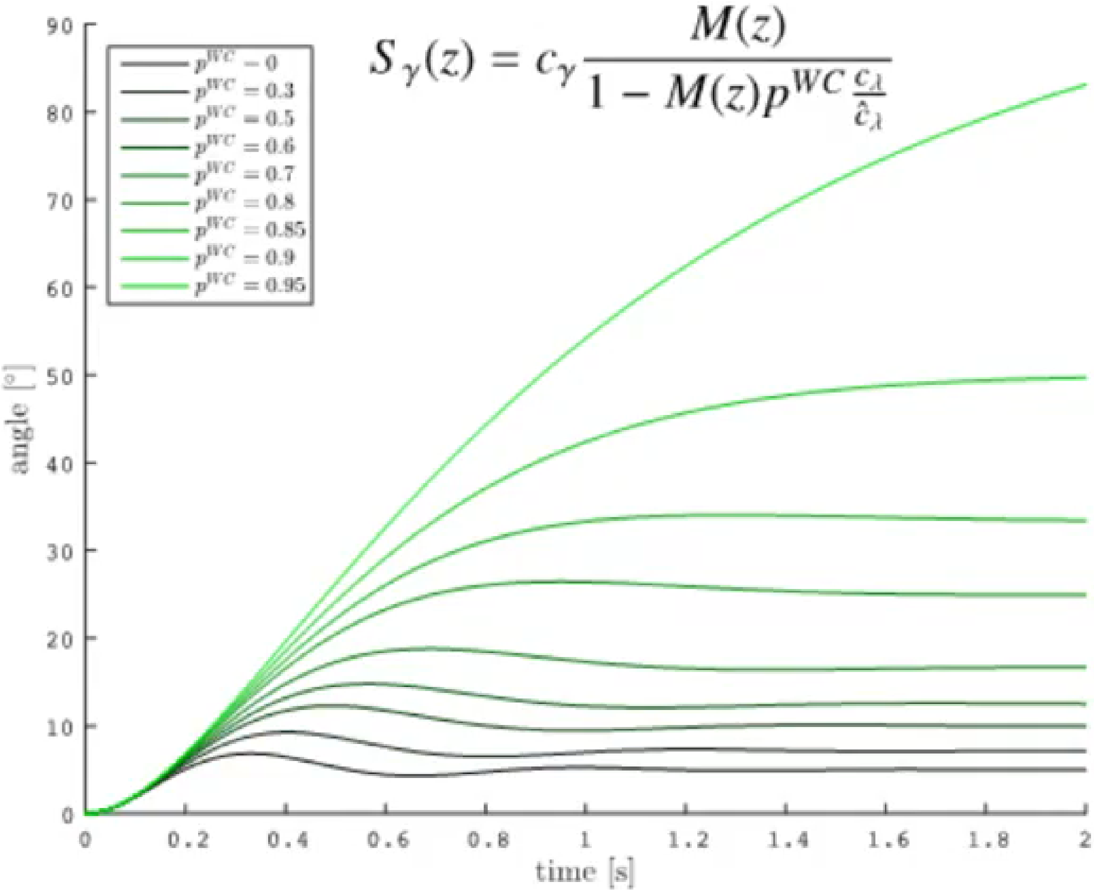
(ami az ábrán S_i, az az $S[k]$)

Digitális rendszerek mindig így látják az időt, értékekben, nem pedig függvényként. A k a mintavételezési periódus számát fogja jelenteni, ezek az ábrán jelölve vannak.

- Az eszköz szabályozási köre ez:



- A szabályozott jellemző az elmozdulás (az abdukciós szög különbsége két mérési időpillanat közt). A szabályozó törtje mutatja, hogy arányos az erősítési tényező a beteg által kiváltott ingerülettel. A beteg által kiváltott ingerület a rendszer bemenete lesz, összeadódik a beavatkozó jellel, ezt a két értéket kell a visszacsatolás alapján szabályozni.
- A megalkotott rendszert lehet szimulálni, hogy adott erősítési tényezők mellett hogyan fog viselkedni. Itt látható, hogy adott erősítési tényezőkre milyen módon reagál a rendszer, mennyi idő után mekkora szögben emeli a beteg a kezét:



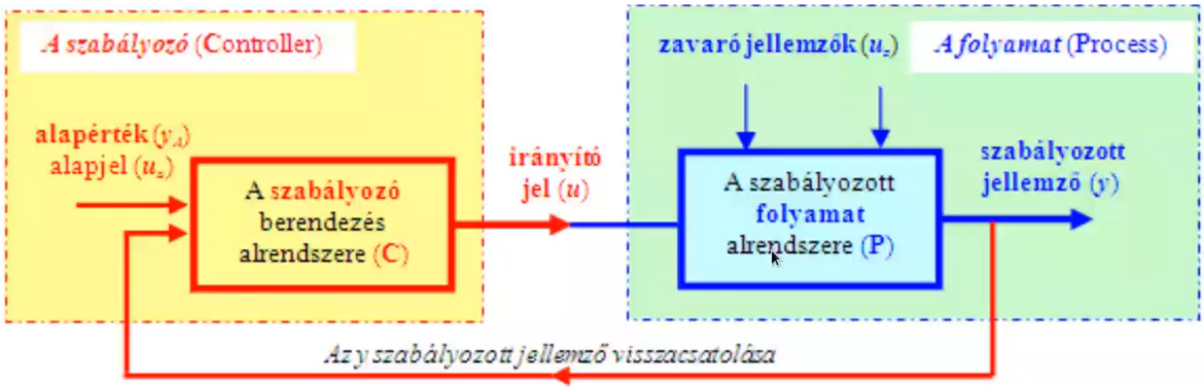
Ez rendszerelemzési szempontból a rendszermodell felállítása után a különböző bemenetek alapján a kimenetek szimulációja, ezután következik a validáció:

- A – rest position
- B – maximal volitional elevation
- C – maximal elevation with 100% support
- D – maximal elevation with 70% support

A B C D

4. előadás

Ismétlés

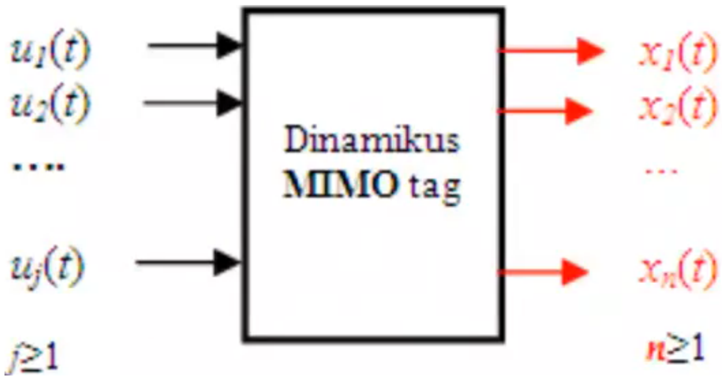


- Általában van egy folyamat, és egy szabályozó, ami szabályozza a folyamatot, egy olyan stabil állapotba állítja, amibe szeretnénk. A folyamat egy dinamikus rendszer, amit differenciálegyenletekkel tudunk leírni, és ebből kifolyólag a szabályozó is egy dinamikus rendszer, amit szintén differenciálegyenletek írnak le.
- Tartozhat a szabályozóhoz egy alapérték vagy alapjel, ami azt a szintet mutatja meg, ahová a szabályozott folyamatot szeretnénk hozni.
- A szabályozó előállít egy olyan jelet, ami valamelyik jellemzőjét a szabályozott folyamatnak módosítja.
- Jellemzően a szabályozott jellemzőről van egy visszacsatolás, amit az alapjellel össze tud vetni, különbséget tud képezni, ami alapján tudja, milyen távol van attól a szinttől, amit el kellene érni. Ez alapján úgy állítja elő az irányító/szabályozó jelet, hogy akár kilengésekkel, de stabil értékre hozza a szabályozott jellemzőt.
- Akár több alapjel és irányító jel is létezhet.

Előretekintés

Ez a fejezet csak bemutatja, hová fogunk eljutni. Próbál minél érthetőbb lenni, de a vektorok és mátrixok a következő fejezetben lesznek értelmesen elmagyarázva.

- A szabályozó és a szabályozott folyamatnak is lehetnek belső állapotváltozói, amik leírják a folyamatot. Ezekből is lehet több. Általánosságban a szabályozó és a folyamat is egy ilyen tag, bemeneti jelekkel, állapotváltozókkal:



- Ezt differenciálegyenlettel tudjuk leírni. Mint az előző ábrán látszik, x_1-től x_n-ig n darab állapotváltozója van. Dolgozatban 1-2, de általánosságban előfordulhat bármennyi. Az állapotváltozás sebességét formálisan írják le a diffegyenletek. Ez egy olyan egyenletrendszer, ahol bal oldalon az egyes állapotváltozók deriváltjai szerepelnek, jobb oldalt pedig az összes állapotváltozót és bemeneti (**gerjesztő**) jelet felhasználva valamilyen függvényen keresztül előállítjuk a derivált jelet. Általánosan a felső formák írnak le 1-1 dinamikus tagot:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1\left(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)\right) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2\left(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)\right) \\
&\vdots \\
\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &= f_{n-1}\left(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)\right) \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n\left(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)\right)
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow * \Updownarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), u(t)\right)$$

- Az alsó az általános megfogalmazása, ahol x egy vektor (hamarosan taglaljuk), vagyis több érték egységbe zárva, u is vektor, és a függvény is vektorként kezeli őket.
- Mi általában lineáris rendszerekkel fogunk foglalkozni, és f ezekben olyan függvény, ami az x és u egy lineáris kapcsolatát írja le. Itt jönnek be a mátrixok, de még ne ijedj meg, ez is el lesz magyarázva:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}}_{\frac{dx(t)}{dt}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}}_{B}
\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}
$$

$$\Updownarrow * \Updownarrow$$

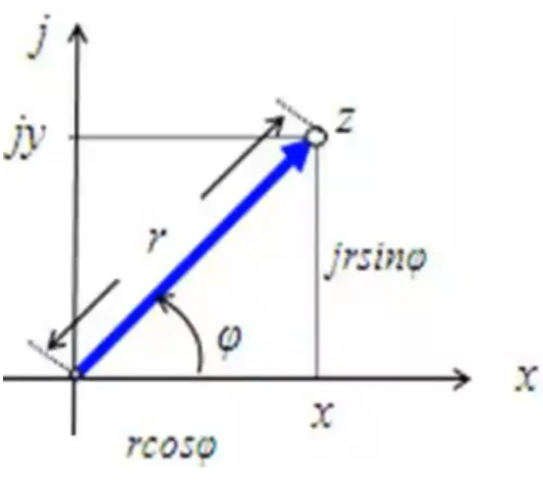
$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

- Egy állapotsebesség-vektort kapunk a bal oldalon, ami előáll egyrészt az állapotvektorból ($x(t)$) és a gerjesztővektorból ($u(t)$), tehát az állapotjelekből és a

gerjesztőjelekből, és az általános leírását, a lent látható lineáris egyenletet használjuk erre. Ebben A és B egy konstans mátrix.
- Ennek a diffegyenletnek a megoldását keressük, általában egyenletrendezéssel megoldható. Egy olyan függvényt keresünk megoldásnak, ami egy olyan időbeli lefolyást ad meg, ami megoldja ezt a differenciálegyenlet-rendszert, tehát minden egyes időpillanatban igaznak bizonyul ez az egyenletrendszer.

Komplex számok

- N: nig... izé... természetes számok: 0 és pozitív egészek.
- Z: Zorro, amúgy egész számok halmaza, a negatívakat is beleértve.
- $x^2 - 5x + 6 = 0$: megoldóképlettel könnyen megoldható, $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.
- $x^2 - 5x + 2 = 0$ már nem oldható meg egész számok felett.
- R: racionális (törtként felírható) és irracionális (törtként nem felírható, végtelen hosszú, ismétlődést nem tartalmazó tizedestörtek, pl. π) számok, azaz valós számok halmaza.
- A valós számok halmazán már van megoldása az előbbi egyenletnek: $x_1 = 2.5 + \sqrt{4.25},\ x_2 = 2.5 - \sqrt{4.25}$.
- $x^2 - 5x + 8 = 0$ már a valós számok felett sem oldható meg, mert a megoldóképlet gyöke alatt -7 lenne, negatív számból pedig nem tudunk gyököt vonni. Erre találták ki a komplex számokat. A j imaginárius/képzetes számról elmondható, hogy
  - $j = \sqrt{-1}$
  - $j^2 = -1$
- Ezzel már meg tudunk találni olyan gyököket, amik a valós számok halmazán nem értelmezettek. A komplex szám általános alakja $z = x + jy$.
  - Az x-es tagot hívják valós résznek ($real(z)$).
  - Az y-os tagot hívják képzetes résznek ($imag(z)$), és a j, vagyis a $\sqrt{-1}$ valahányszorosa.
  - Gyakorlatilag egy számpárral dolgozunk mindig.
- Általában komplex síkon szoktuk ezeket ábrázolni, és sokféleképp leírható.



A vízszintes tengely a valós, a függőleges tengely a képzetes. Ezen a síkon berajzolunk egy vektort abba a pontba, amit meghatároz a komplex szám. A vektor hossza r, az x koordinátája a valós rész, y pedig a képzetes.

$z = x + j * y$ (ezt hívják algebrai alaknak)
$z = r * (cos(\varphi) + j * sin(\varphi))$ (trigonometrikus alak)
$z = r * e^{j*\varphi}$ (exponenciális alak)
Ez a három leírás pontosan ugyanazt a komplex számot adja meg a komplex síkon. Ami kellhet:
$r = abs(z) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ (egyszerűen Pitagorasz)

$\varphi = arc(z) = arctg(y/x)$ (egy azonosság)

- Komplex számok összeadása: $(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) = x + jy$
  - Itt azt kell észrevenni, hogy ezek valójában mind egyszerű számok, semmi különleges jelölés nincs. A zárójelek egyszerű zárójelek, csak azért használtuk, hogy az összetartozó számpárokat elkülönítsük. Ahhoz, hogy ez még evidensebb legyen, először csak bontsuk fel őket, elvégre ezek csak összeadások, teljesen mindegy, hol vannak a zárójelek: $x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2$. Így már nehezebben látjuk, hogy a két komplex szám az indexében elkülönülő számpárt jelenti, viszont egyszerűen eljutunk a második pontig. Egyszerűen kiemeltük a j szorzót, és már elő is állt az, amivé egyszerűsítettük.
  - A végén fura lehet, hogy miért $x + jy$ jött ki. Ez csak annyit szimbolizál, hogy egy olyan új számot írunk fel, ahol a valós rész az előző tag alapján $x_1 + x_2$, a képzetes rész pedig szintén az előző tagból összeadva $y_1 + y_2$ lesz.
- Miután rájöttünk, hogy a komplex számok valójában egyszerű valós számok párjai, amik közül az egyik meg van szorozva j-vel, már látjuk, hogy:
  - $0 = 0 + 0 * j$
  - $(x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = x_1 + jy_1 - x_2 - jy_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) = x + jy$
- A szorzás már egy picit nehezebb, de csak annyit kell tudni hozzá, hogy összegek szorzatánál minden tagot minden taggal szorzunk: $(x_1 + jy_1) * (x_2 + jy_2) = x_1 * x_2 + x_1 * jy_2 + jy_1 * x_2 + jy_1 * jy_2 =...$

  Ezen a ponton meg kell állnunk, és az utolsó tagot vizsgálnunk, ugyanis j értékét behelyettesítve lesz könnyű dolgunk:

  $jy_1 * jy_2 = j * j * y_1 * y_2 = \sqrt{-1} * \sqrt{-1} * y_1 * y_2 = \sqrt{-1}^2 * y_1 * y_2 = -1 * y_1 * y_2 = -y_1 * y_2$

  Kezdjük tehát elölről, de így helyettesítsünk be:
  $(x_1 + jy_1) * (x_2 + jy_2) = x_1 * x_2 + x_1 * jy_2 + jy_1 * x_2 - y_1 * y_2 =$
  $(x_1 * x_2 - y_1 * y_2) + j * (x_1 * y_2 + y_1 * x_2) = x + jy$
- Az osztáshoz előbb ismerni kell ezt az azonosságot: $(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$, illetve tudni kell, hogy ha b j-vel van szorozva, akkor annak négyzete -1, így az egyenlet $a^2 + b^2$ lesz. A komplex osztás levezetve (nyilván nem kell tudni fejből, csak példa):

  $\frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2} = \frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2} * 1 = \frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2} * \frac{x_2-jy_2}{x_2-jy_2} = \frac{(x_1*x_2+y_1*y_2)+j*(y_1*x_2-y_2*x_1)}{x_2^2+jy_2^2} =$

  $\frac{(x_1*x_2+y_1*y_2)}{x_2^2+jy_2^2} + j * \frac{(y_1*x_2-y_2*x_1)}{x_2^2+jy_2^2} = x + jy$

Sokkal egyszerűbb azonban exponenciális alakban számolni, mert ott csak ki kell vonni egymásból a kitevőket:

$\frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2}=\frac{r_1*e^{j\varphi_1}}{r_2*e^{j\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}*e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = re^{j\varphi}$, innen visszaalakítható $x + jy$ formára az ismert alakokat használva.

- Térjünk vissza a $x^2 - 5x + 8 = 0$ képletre, és oldjuk meg a másodfokú egyenlet megoldóképletével:

$x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-4*1*8}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{-1}*\sqrt{7}}{2}=\frac{5\pm j*\sqrt{7}}{2}= 2.5 \pm j * \sqrt{1.75}$

Polinomok megoldása Matlabban

- A komplex számokra azért van nagy szükségünk, mert gyakran fogjuk polinomok gyökeit keresni. Előrevetítve például majd a stabilitásvizsgálatnál. A komplex másodfokú egyenletnek mindig két megoldása van, nincs olyan, hogy nem értelmezhető. Általánosságban elmondhatjuk, hogy egy egyváltozós n-edfokú polinomnak ($a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} +... + a_1 * x + a_0 = 0$) n gyöke van.
- A Matlab nem a hagyományos polinomalakban várja el a leírást, hanem rövidítve. Egy vektort kell feltöltenünk az együtthatókkal ($a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0$), ami szimbolizálja a teljes polinomot, az x hatványokat kitalálja magának. Vegyük például azt az egyszerű polinomot, hogy $x^5 = 1$. Ennek a valós számok felett egyedül az $x = 1$ megoldását találnánk meg, a többire pedig nincs megoldóképlet, ezért szükséges a Matlab. Átrendezve az egyenletet így néz ki: $x^5 - 1 = 0$. Egészítsük ki teljesre is, hogy tényleg evidens legyen, mik az együtthatók:

  $1 * x^5 + 0 * x^4 + 0 * x^3 + 0 * x^2 + 0 * x - 1 = 0$

- Jól látni, hogy az együtthatók 1, 0, 0, 0, 0, és -1, tehát Matlabban egy ilyen elemekből álló vektor írja le a polinomot. Egyszerűen így adjuk meg neki:
  ```
  [1, 0, 0, 0, 0, -1]
  ```
- Egy vektort önmagában beírva és entert nyomva a Matlab csak kiírja eredményként, mert egy konstans vektor nyilván saját magával egyenlő. Hogy eltároljuk, és a későbbiekben tudjunk rá hivatkozni, egyszerűen adjunk neki egy nevet, és tegyük azt egyenlővé a vektorral. A Matlabban az egyenlőség nem matematikai egyenlőséget jelent, hanem hogy a bal oldalán álló kifejezés átveszi a jobb oldalon álló értéket. Így tehát, ha a polinomunknak a **`poly`** nevet szeretnénk adni, akkor ezt kell leírni:
  ```
  poly = [1, 0, 0, 0, 0, -1]
  ```
- A Matlab a **`roots`** paranccsal mondja meg a gyököket. Ez egy egyetlen paraméteres függvény, ami azt jelenti, hogy a neve után zárójelben egyetlen vektort vár. Ezt megtehetjük úgy, hogy egyszerűen megadjuk ott a vektort:
  ```
  roots([1, 0, 0, 0, 0, -1])
  ```

- Ez már kiadja az eredményt, viszont sokkal átláthatóbb, ha mentett értékekből dolgozunk. Így a javasolt leírás, miután a polinom már rögzítve lett:
  `roots(poly)`

- Mindkét kód eredménye ugyanaz az 5 gyök, mivel ötödfokú polinomunk volt:
```
ans =
      -0.8090 + 0.5878i
      -0.8090 - 0.5878i
       0.3090 + 0.9511i
       0.3090 - 0.9511i
       1.0000 + 0.0000i
```
- Amit az eredményen látunk, hogy a Matlab mindent négy tizedesjegy pontosságban ad meg, még az 1-et is `1.0000 + 0.0000i` formában írta fel. Az `i` jelenti jelen esetben a j komplex szorzót. Hivatalosan ez a jele. Azért használjuk a tárgyon mégis j-ként, mert gépírásban nem keverhető az `1`-el, és kézírásban is sokkal könnyebben megkülönböztethető.

Mátrixok

- A mátrix számok téglalap alakú elrendezése, vagyis táblázata, és egy nagyon jó film.
- A tárgy csak kétdimenziós mátrixokkal foglalkozik, amiknek m darab sora és n darab oszlopa van. Ilyenkor mondjuk, hogy a mátrix $m * n$-es. A mátrix egy elemére úgy hivatkozunk, hogy amennyiben a mátrix neve A, akkor $a_{m,n}$. Ez az m-edik sornak az n-edik elemét írja le. Tehát egy mátrix így néz ki:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Mi a szögletes leírást használjuk (és a Matlab is), a Wolfram szokta a kerekítettet. Mindkettő elfogadott és helyes.
- A vektor is valójában egy mátrix, csak egyetlen sorral vagy oszloppal. Ettől függően hívjuk sorvektornak vagy oszlopvektornak:

sorvektor	oszlopvektor
$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}$

- Az 1x1-es mátrixot skalárnak hívjuk, akárcsak az önmagában álló számot, ugyanis minden önálló szám felfogható 1x1-es mátrixként.
- Léteznek speciális mátrixok, amiket egyszerűen is tudunk jelölni. Vegyünk egy olyan példát, amikor a mátrix négyzetes (n sor és n oszlop), és minden eleme 0, kivéve a főátló (ahol a sor és az oszlop száma egyenlő, tehát a bal felülről induló átló), ezt nevezzük el diagonális mátrixnak:

$$A = diag\ [a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}] = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{diag\ (A)}$$

- A diagonális mátrixot nagyon szeretjük, mert mindent sokkal egyszerűbben ki lehet hozzá számolni.
- Amennyiben egy diagonális mátrix átlójának minden eleme 1, annak a neve egységmátrix, és jele I_n, ahol I azt jelenti, hogy *identity*, n pedig a sorok és oszlopok száma:

$$I_n = diag\ [1,1,\cdots,1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{I = diag\ (A)}$$

- Az egységmátrix különlegessége, hogy ezzel szorozva bármilyen mátrixot pontosan ugyanazt kapjuk.
- Megkülönböztethetjük még a zérus mátrixot, aminek különlegessége, hogy minden eleme 0:

$$0_{mn} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0_{mn} \end{bmatrix}}_{A = 0}$$

- Fontos szerepe van még a mátrix transzponáltjának, ami azt jelenti, hogy felcseréljük a sorokat és oszlopokat, tehát lényegében az átlóra tükrözünk:

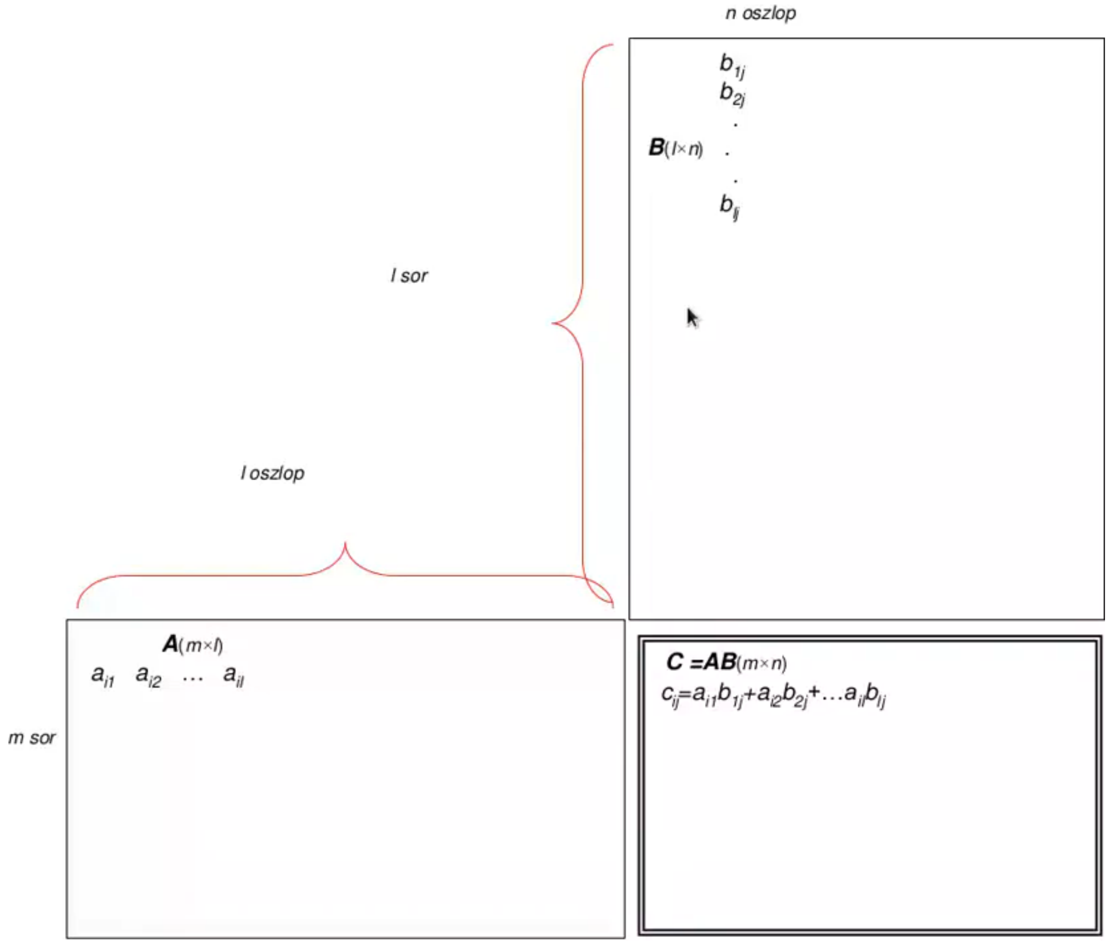
$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\ sor\ ,\ n\ oszlop} \Rightarrow A^T = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n\ sor\ ,\ m\ oszlop}$$

- Ebből belátható, hogy sormátrix transzponáltja az oszlopmátrix lesz, ami működik visszafelé is.
- Két mátrix összeadása egyszerűen annyi, hogy elemenként összeadjuk őket, bal felsőt a bal felsővel, és így tovább. Ezt formálisan úgy írhatjuk le, hogy $C = A + B$ esetén $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$. Ugyanez érvényes a kivonásra.
- Mivel az összeadás és kivonás pontosan ugyanaz, mint egyszerű számoknál, ezért kommutatív ($A \pm B = B \pm A$) és asszociatív (zárójelezés majdnem mindegy). Az egyetlen feltétel, hogy csak akkor érvényes az összeadás és kivonás, ha a két mátrixnak ugyanannyi sora és oszlopa van.
- Egy mátrixot megszorozhatunk bármilyen k skalárral, ilyenkor egyszerűen minden elemét szorozzuk k-val. A skalárral való osztás ugyanez, minden elemet osztunk.
- Mátrixok szorzása úgy működik, hogy minden sor és oszlop összes elemét páronként szorozzuk. Hogy egyszerűbben érthető legyen, először szorozzunk egy sorvektort egy oszlopvektorral:

$$c_{ij} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{il}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{lj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj}$$

  Sorban haladva rajtuk, szorozzuk össze az első elemüket, majd adjuk hozzá a második elemek szorzatát, majd a harmadik elemek szorzatát, amíg még van elem. Ebből látható, hogy két mátrix csak akkor szorozható, ha a bal oldali szélessége megegyezik a jobb oldali magasságával.

- Egész mátrixokat úgy szorzunk, hogy az előbbi példát kiragadjuk, és minden egyes sor-oszlop párosra megcsináljuk:



- Vegyünk egy egyszerű példát:

  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

  Ragadjuk ki belőle a sorok és oszlopok párosítását, majd oldjuk meg az ismert módszerrel:

  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 * 5 + 2 * 6 = 17$ és $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 * 5 + 4 * 6 = 39$. Már csak a megfelelő párok helyére kell az eredményeket illeszteni, ehhez nagyon jó módszer, ha egyszerűen a következő módon rajzoljuk fel a szorzást:

  $$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix} \end{array}$$

  Papíron így szoktuk leírni, hogy ne kelljen külön párosítgatni.

- Néhány gyakorló példa mátrixszorzásra, először próbáld őket egyedül:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 2+15 & 8+40 \\ 7+18 & 28+48 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 17 & 48 \\ 25 & 76 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 2+18 & 5+24 & 7+6 \\ 8+6 & 20+6 & 28+2 \\ 6+15 & 15+20 & 21+5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 20 & 29 & 13 \\ 14 & 28 & 30 \\ 21 & 35 & 26 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 2+20+21 & 12+10+35 \\ 3+16+3 & 18+8+5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 43 & 57 \\ 22 & 31 \end{bmatrix}}_{D}$$

- Az utolsó két példán jól látható, hogy a mátrixszorzás nem kommutatív, tehát nem mindegy, hogy melyik mátrixot szorozzuk melyikkel. Nem csak az értékek, de a méretek is teljesen megváltozhatnak. Ettől még asszociatív (bárhogy zárójelezhető) és disztributív ($A * (B + C) = A * B + A * C$).
- Egy 2x2-es mátrixnak van determinánsa, amit az abszolút értékének jelölünk, és definíció szerint ez a képlet:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A| = ad - cb$$

  Az A mátrix determinánsának jele: $det(A)$. Mivel determinánsa csak 2x2-es mátrixnak van, de szükséges nagyobbakhoz is, kitalálható rá. Azt találtuk ki 3x3-as mátrixra, hogy az első sor minden elemét beszorozzuk olyan 2x2-es mátrixokkal, amik úgy maradnak, hogy az első sorban kiválasztott elem teljes sorát és oszlopát töröljük. Amit még hozzáteszünk, hogy az előjelek váltakoznak, így lett a képlet ez:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

- A négyzetes ($n * n$-es) mátrixokat hívjuk kvadratikusnak. Egy kvadratikus mátrixnak lehet csak determinánsa, és 4x4-esre hasonló módszerrel jönne ki. Lebontjuk 3x3-asok szorzatára, majd azokat 2x2-esekre.
- Diagonális mátrix determinánsa egyszerűen az összes elem szorzata.
- A transzponált mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrixéval.
- Vezessük be azt a fogalmat, hogy karakterisztikus polinom. Ennek jele K, és így számoljuk A mátrixra: $K(\lambda) = det(\lambda I - A) = |\lambda I - A|$. Ezt úgy képzeljük el, hogy van egy mátrix, aminek minden eleme a főátlóban λ, a többi pedig 0, és ebből vonjuk ki A-t, ami jelen példában egy véletlenszerű mátrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

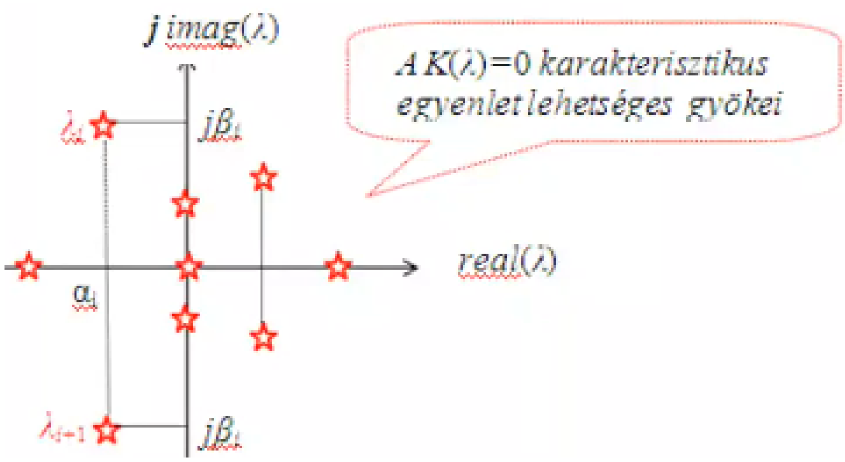
  A kivonást már ismerjük, az eredmény egyszerű:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ -3 & \lambda - 6 & -3 \\ -2 & -6 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

Ennek a determinánsa a karakterisztikus polinom:

$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6$

- A karakterisztikus polinomot például Matlabban oldhatjuk meg, ha olyan magas fokú, hogy nincs hozzá megoldóképlet. A gyökeit úgy fogjuk hívni, hogy sajátérték, és a jelük λ_i, ahol i az, hogy hányadik gyök (a sorrend mindegy, csak különböztessük meg őket).
- Minden sajátértékhez tartozik egy sajátvektor, ami annyit jelent, hogy ezzel a vektorral külön-külön megszorozva a mátrixot és a sajátértéket ugyanazt az eredményt kapjuk, tehát: $A * v = \lambda * v$.
- A komplex sajátértékeknek minden esetben a sajátértékek közt lesz a konjugáltja is, vagyis az a szám, aminek a képzetes része $-$ 1-szeres, tehát vagy gyökpárok vannak, vagy valós szám a gyök:



- Inverz mátrix: olyan mátrix, amivel az eredeti mátrixot szorozva egységmátrixot kapunk. Jele: A^{-1}. A formális leírása: $A * A^{-1} = I$. Ennek kiszámolása egy olyan nehéz feladat, ami már kis mátrixokra is fejtörést okoz papíron, ezért Matlabot használunk.

Egyszerű mátrixműveletek Matlabban

- A legtöbb kis mátrixos feladatot könnyű kézzel elvégezni, de azért egy 10x10-es mátrixot már nagyon nem szeretnénk így.
- Mátrixot úgy viszünk be, hogy az egy sorban lévő elemeket `,`-vel választunk el, míg a sorokat `;`-vel. Az utolsó két példa mátrixai Matlabban tehát:

```
A = [1, 6; 4, 2; 3, 5]
B = [2, 5, 7; 3, 4, 1]
```

- Innentől már elég megadni egy egyszerű műveletet, például kiadjuk parancsba, hogy **B*A**, erre a Matlab azt mondja, hogy:

```
ans =
       43    57
```

```
        22    31,
```
ami pontosan az, amit korábban kiszámoltunk.

- Az aposztróffal lehet transzponálni, vagyis sorokat és oszlopokat felcserélni, tehát az **`A'`** parancsot kiadva azt az eredményt kapjuk, hogy
```
ans =
        1      4      3
        6      2      5.
```
  Itt az első oszlop volt az 1, 4, 3, abból lett az első sor, illetve a korábbi második oszlopból (6, 2, 5) lett a második sor.
- Determinánst a **`det`** parancs számol, egyetlen paramétere egy négyzetes mátrix. Próbáld ki például a korábban megadott A és B mátrix szorzatának kiszámolni a determinánsát! Az egyik szorzásra vonatkozó parancs a **`det(A*B)`**, másikra pedig a **`det(B*A)`**.
- Sajátértékeket és sajátvektorokat az **`eig`** függvény számol, ugyanúgy egyetlen paraméteres bemenettel. Többféleképp lehet használni. Ha csak egyszerűen leírjuk, akkor egy oszlopvektorban mondja meg a sajátértékeket:
```
eig(A*A')
ans =
          0.0000
         10.5536
         80.4464
```
  Ha viszont a sajátvektorok is kellenek, akkor két kimenetet kell neki adni:
```
[V, E] = eig(A*A')
```
  Itt az első kimenetét, ami a sajátvektorok sora, V-be menti el, míg a sajátértékeket egy E mátrixba, ennyit jelent ez a formátum. V-ben oszlopvektorok állnak egymás mellett, mindegyik egy-egy sajátvektor, míg E-ben a főátló tartalmazza a sajátértékeket:
```
V =                                    E =

    0.4805    0.5966    0.6428             0.0000         0         0
    0.4462   -0.7973    0.4065                  0   10.5536         0
   -0.7550   -0.0915    0.6493                  0         0   80.4464
```
- Inverz mátrixot az **`inv(A)`** vagy **`A^-1`** parancs állít elő. Természetesen A nem fix, lehet bármi a kezdeti mátrix.

Egyenletrendszerek mátrixokkal

- Vegyünk egy sor hasonló egyenletet, ahol a konstansok mások, de az együtthatók mindig ugyanazok. Ezt hívjuk lineáris inhomogén egyenletrendszernek:

$y_1 = a_{1,1} * x_1 + a_{1,2} * x_2 + ... + a_{1,n} * x_n$

$y_2 = a_{2,1} * x_1 + a_{2,2} * x_2 + ... + a_{2,n} * x_n$

…

$y_m = a_{m,1} * x_1 + a_{m,2} * x_2 + ... + a_{m,n} * x_n$

- Amit leírtunk, az valójában két oszlopvektor kapcsolatát fejezi ki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A:\, m \text{ sor },\ n \text{ oszlop}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x}$$

  Ez még rövidebben: $y = Ax$. Annyi történt, hogy az y-okból (amik az eredmények lesznek) és az x-ekből (amiket meg akarunk majd határozni) lett egy-egy oszlopvektor, az összes konstansból pedig egy mátrix. Így fogunk majd leírni minden egyenletrendszert, csak y majd deriválva lesz a feladatok formája miatt. Ez az egyenlet a tanult tulajdonságok miatt átrendezhető úgy, hogy x nagyon egyszerűen előálljon. Először mindkét oldalt szorozzuk A inverzével:

  $A^{-1} * y = A^{-1} * A * x$

  Jobb oldalt az inverz és az eredeti mátrix szorzata tudjuk, hogy az egységmátrixszal egyenlő:

  $A^{-1} * y = I * x$

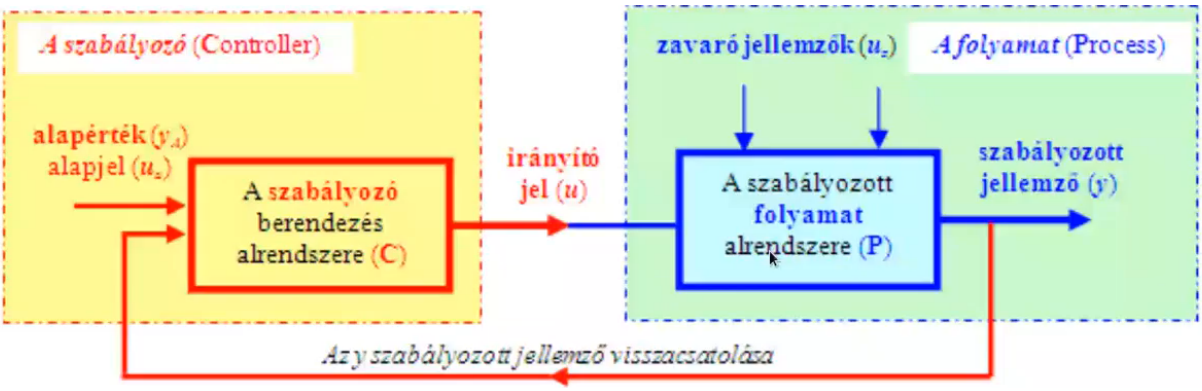
  Az egységmátrixszal szorozva bármit ugyanazt kapjuk, így elő is áll a végeredmény, mert egyik oldalon már csak x marad:

  $x = A^{-1} * y$

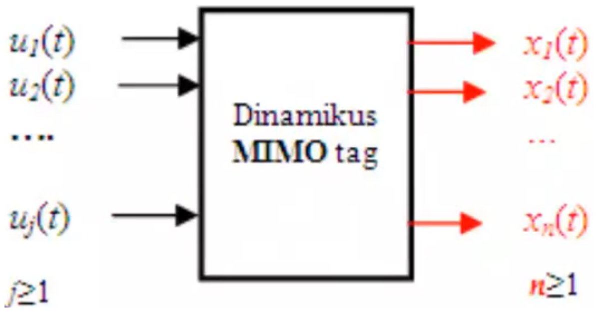
- Mátrixokat egyszerűen úgy deriválunk, hogy minden egyes pontjában álló elemet deriválunk egyesével. Az integrálás ugyanígy működik.

Szabályozási rendszerek leírása

Térjünk vissza az előadás elejére:



- A folyamat dinamikus rendszer, a szabályozó szintén. A szabályozó a bemeneti alapérték és a szabályozott jellemző visszacsatolása után olyan irányító jelet állít elő, ami a szabályozott jellemzőt olyan szinten tartja, ahol szeretnénk. Dinamikus rendszereknél lehet belső visszacsatolás is. Dinamikus tag = több bemenet, több kimenet:



- A bemenetet (u_i) hívjuk gerjesztésnek, a kimeneteit (x_i) pedig állapotváltozóknak. Az összességük:

  $u(t) = [u_1(t), u_2(t), ..., u_j(t)]^T$: gerjesztésvektor, azért transzponált, mert oszlopvektor

  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]^T$: állapotvektor, szintén oszlopvektor

- Amire kíváncsiak vagyunk, hogy mi az a függvény, ami alapján az állapotváltozók (így az állapotvektor) változik, és mennyit. Ezt úgy írhatjuk fel, hogy az állapotváltozókat deriváljuk:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1\left(x_1(t),...,\ x_n(t), u_1(t),...,\ u_j(t)\right)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2\left(x_1(t),...,\ x_n(t), u_1(t),...,\ u_j(t)\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = f_{n-1}\left(x_1(t),...,\ x_n(t), u_1(t),...,\ u_j(t)\right)$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n\left(x_1(t),...,\ x_n(t), u_1(t),...,\ u_j(t)\right)$$

$$\Updownarrow * \Updownarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), u(t)\right)$$

- Ez átalakítva vektorokká:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}}_{\frac{dx(t)}{dt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

$$\Updownarrow * \Updownarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

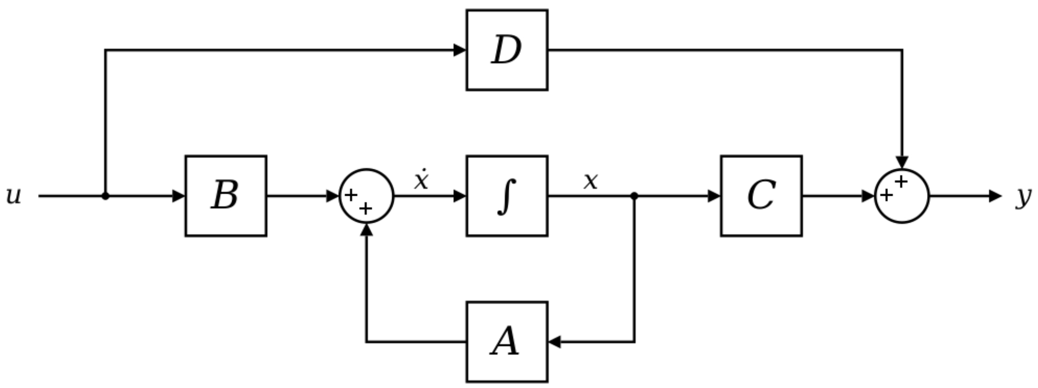
- Az eredményt úgy kell értelmezni, hogy A mátrix megadja, hogy az állapotvektor változása (a derivált) hogyan függ az állapotvektor állapotától, B pedig azt, hogy hogyan, milyen súlyozással függ a gerjesztésvektortól. A-t úgy hívjuk, hogy állapotmátrix, B-t úgy hívjuk, hogy bemeneti mátrix.
- Teljes egészében így néz ki egy nemlineáris és egy lineáris rendszer, nekünk a lineáris a fontos:

  $$\underbrace{\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t)] \qquad y(t) = g[x(t), u(t)]}_{nemlineári\ s} \qquad \underbrace{\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t)}_{lineáris}$$

  Látható, hogy felül differenciálegyenlet, alul pedig egy egyszerű egyenlet. Ez azért van, mert a rendszer két dolog szerint működik: egyrészt változnak az állapotváltozók a gerjesztés és az aktuális értékeik szerint (ezt szimbolizálja a derivált tag), illetve a bemenetre van a rendszernek kimenete ($y(t)$), ez valamilyen szorzók szerint szintén függ az állapotváltozók helyzetétől és a gerjesztéstől is. Ugyanez leírva máshogy, mert ez a fejezetben a legfontosabb:

  *A lineáris rendszereknek három lényeges eleme van: bemenet (**gerjesztés**), állapotváltozók, és kimenet (gerjesztés**válasz**). Az állapotváltozók időben folyamatosan változnak a régi értékeik és a gerjesztés szerint, a kimenet pedig az állapotváltozók jelenlegi értékeitől és a gerjesztéstől függ. Minden függés mértékét egy mátrixszal való szorzás jelenti. Ezek az A, B, C, D mátrixok, és úgy hívjuk őket, hogy állapottér-modell, avagy állapotteres leírás. Ami egyenleteket megadnak (fent, sárga dobozban), úgy hívjuk, hogy állapotegyenlet.*

- Értelmezzük egy kicsit, mit is jelent az A, B, C, és D mátrix:



- Középen találhatók az integrátorban az állapotváltozók. A mátrix jelenti a belső visszacsatolást. Látható, hogy x-et, vagyis az állapotvektort csatolja vissza, és szorozza be valamennyivel. Ehhez hozzáadódik a gerjesztés B-szerese, és ez az összeg fogja jelenteni az állapotváltozók időben következő értékét. A válaszon (y) azt látjuk, hogy szintén vezet felé az állapotvektorból egy szorzó, ez a C, és függ a gerjesztéstől is, ahonnan egy D szorzón keresztül adódik össze.
- Ez volt a lineáris rendszer. A nemlineáris annyit jelent, hogy olyan kapcsolat van a tagok közt, ami nem leírható lineárisan (például szorzás vagy hatványozás), de ilyennel nem fogunk foglalkozni. Csak megemlítjük, hogy létezik egy olyan módszer, amit Euler-módszernek hívunk, és numerikusan segít közelíteni a folytonos dolgot.

Egyszerűen vegyünk fix időközönként időpillanatokat, és hasonlítsuk össze őket. Ilyenkor átlépünk egy diszkrét rendszerbe:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t)]$$

$$* *$$

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=kT} \cong \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T} \cong f[x(kT), u(kT)]$$

$$x[(k+1)T] \cong x(kT) + \underbrace{f[x(kT), u(kT)]}_{merekség} \times \underbrace{T}_{lépésköz}$$

Itt mindössze annyit írtunk le, hogy a differenciálegyenletnek vettük adott pontjait adott lépésközzel, és a különbségükből (ami technikailag a derivált) ki tudtunk találni egy meredekséget.

Laplace integrál-transzformáció

- Lineáris dinamikus rendszerek állapotegyenletének analitikus megoldását támogató eljárás. Sajátossága, hogy a t időtartományban a differenciálegyenletekkel megadott modellt s operátor tartományban algebrai egyenletekké alakítja, ahol már könnyebben, közönséges algebrai átalakításokkal rendezhetők és kiszámolhatók. Mivel az eredmény Laplace-térben (operátor tartományban) keletkezik, inverz Laplace-transzformációval vissza kell térnünk időtartományba.

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{matrix}}_{\text{idő tartomány}} \longrightarrow \text{Laplace transzformáció} \longrightarrow \underbrace{L\begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{pmatrix}}_{\text{operátor tartomány}}$$

differenciálegyenlet (*t* **idő**tartomány) algebrai egyenlet (*s* **operátor** tartomány)

- Laplace-transzformálni csak lineáris egyenleteket lehet.
- A Laplace-transzformáció képlete: $F(s) = L\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} f(t) * e^{-s*t} dt$
- Néhány Laplace-transzformált:

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

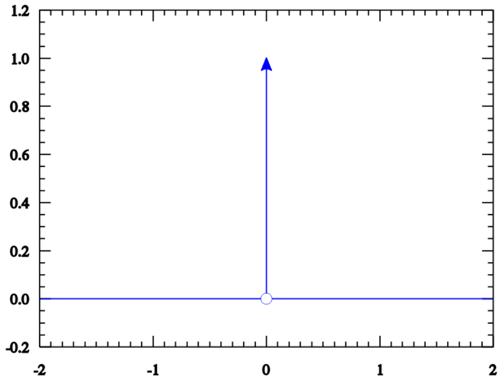
$$L\{e^{a*t}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$L\{sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

$$L\{k * f(t)\} = k * F(s)$$

Ezek természetesen működnek visszafelé is, főleg a másodiknak lesz jelentősége. Ha látsz egy egyszerű reciprokot, könnyen vissza tudod írni valami exponenciális (e hatvány) függvénnyé.

- Beszéljünk egy picit a $\delta(t)$ függvényről. Ezt hívjuk Dirac-deltának, és egyszerűen annyit jelent, hogy mindenhol 0 az értéke, kivéve 0-ban, ahol 1:



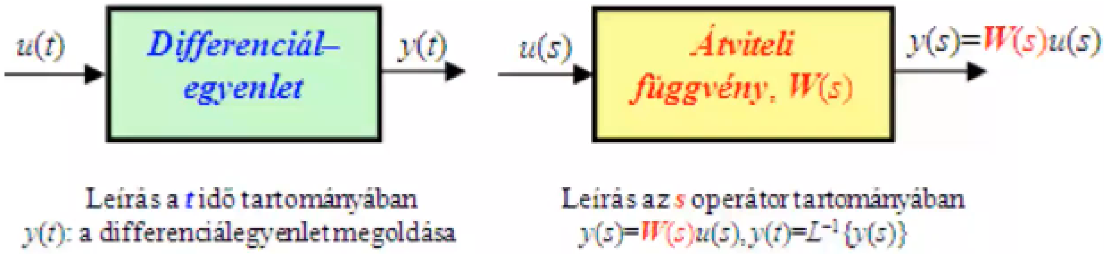
A Dirac-delta Laplace-transzformáltja egyszerűen 1, azonban késleltetést le lehet vele írni. Úgy tolhatjuk el ezt az 1-es értéket jobbra, mondjuk 2-vel, hogy kivonunk belül 2-t: $\delta(t - 2)$. Mivel az eredeti függvény 0 értékre lesz 1, a $t - 2 = 0$, vagyis a $t = 2$ időpillanatban lesz 0. Általánosságban T_h a késleltetés jele, és az ennyivel való késleltetést úgy írjuk le, hogy $\delta(t - T_h)$. Ennek a Laplace transzformáltja e^{-s*T_h}.

- Inverz Laplace-transzformációhoz nem kell tudni a képletet, csak a korábban leírt (és a Laplace-táblázatban szereplő) főbb transzformáltak alapján kell dolgozni.
- A Laplace-transzformáció lineáris művelet, ez azt jelenti, hogy ha egy összeget transzformálunk vagy inverz transzformálunk, külön-külön transzformálódnak a tagok:
  $L\{ax(t) + bu(t)\} = ax(s) + bu(s)$, ugyanez igaz inverzre.
- A derivált transzformáltja: $L\{\frac{dx(t)}{dt}\} = s * L\{x(t)\} - x(0) = s * x(s) - x(0)$, tehát Laplace-térben a deriválás csak szorzás. Az s-sel való osztás pedig integrálás lesz, mivel az a deriválás fordítottja, ahogy az osztásnak a szorzás.
- A Dirac-deltánál már láttuk, hogy az eltolás egy e^{-s*T} formában jelenik meg, általánosítsuk ezt bármilyen függvényre: $L\{u(t - T)\} = e^{-s*T} * u(s)$. Ezt hívják eltolási tételnek.

Deriválás Laplace-transzformációval

Ami itt van, elég ismerni. Semmilyen konkrét számolást nem kell velük végezni.

- Mind a folyamat, mind a szabályozó egy olyan rendszer, amit egy-egy differenciálegyenlet ír le. Mindegyiknek van bemeneti jele és kimeneti jele. Ha a diffegyenletet áttranszformáljuk Laplace-térbe, egy úgynevezett átviteli függvényt kapunk. Ezzel már csak egy szorzás az egész egyenletrendszer:



- A dinamikus rendszer matematikai modellje:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

Ez visszavezethető differenciálegyenletek rendszerére, de most nem ez a cél, hanem hogy Laplace-transzformáljuk. Általában leosztjuk az egészet a legnagyobb fokú derivált szorzójával, hogy legalább az 1 legyen:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \frac{a_1}{a_0} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_0} y(t) = \frac{b_0}{a_0} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \frac{b_1}{a_0} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + \frac{b_m}{a_0} u(t)$$

Ezeknek az osztott tagoknak adhatunk különleges jelölést, mondjuk h-t és g-t:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + h_n y(t) = g_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + g_m u(t)$$

Ebből már a konstans és a derivált Laplace-transzformáltját ismerve előáll, hogy:

$$s^n y(s) + h_1 s^{n-1} y(s) + \cdots + h_n y(s) = g_0 s^m u(s) + g_1 s^{m-1} u(s) + \cdots + g_m u(s)$$

Ez pedig szummával is felírható:

$$\left(s^n + \sum_{k=1}^{n} h_k s^{n-k} \right) y(s) = \left(\sum_{k=0}^{m} g_k s^{m-k} \right) u(s)$$

Teljesen logikusan gondolod, hogy mi a franc szükség volt arra, hogy leosszuk a_0 taggal az egészet, mivel ha az nincs, akkor nem kell bevezetni a h és g hülyeséget, és az s^n sem lesz külön eset a szummán kívül. Na ezt én sem tudom. Mindegy, inkább csak osszuk le a két oldalát úgy, hogy $y(s)$ legyen bal oldalt, és akkor megkapjuk az átviteli függvényt jobb oldalt, a gerjesztés transzformáltjával szorozva:

$$y(s) = \underbrace{\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}}_{W(s)} u(s) = \underbrace{\frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \cdots + g_{m-1} s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \cdots + h_{n-1} s + h_n}}_{W(s)} u(s) = W(s) u(s)$$

- Ezeknek a felírásoknak vannak különböző gyökei, amik általánosan így néznek ki:

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \cdots + g_{m-1} s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \cdots + h_{n-1} s + h_n} =$$

$$= g_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)} =$$

$$= \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \ldots \frac{r_n}{s - p_n} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

  A középső lehet érdekes, ez a zérus-pólus alak. Minden egyes z értéken az egész eredmény 0 lesz, mert látható, hogy ha s mondjuk pont = z_2, akkor $s - z_2 = 0$, így a teljes szorzat is 0. A pólus ugyanez, csak a nevezőben, tehát azt jelenti, hogy a pólusok pontján az egyenlet nem értelmezett, kvázi töréspont. Az utolsó forma a részlettörtes alak, amin azt fontos észrevenni, hogy az e^{a*t} Laplace-transzformáltja, tehát nagyon könnyű belőle inverz transzformálni.

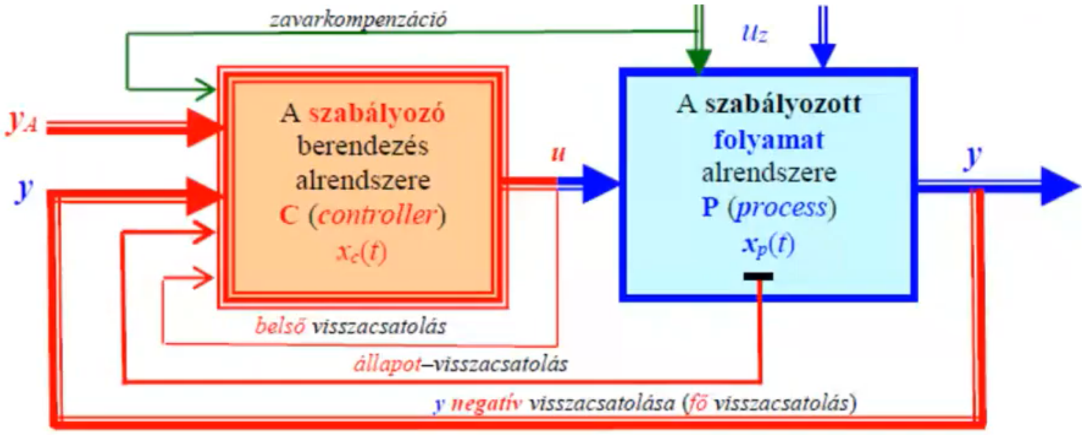
Rövid összefoglaló

Van folyamat és szabályozó, mindkettő dinamikus rendszer. Állapotváltozóik vannak, amiknek az időbeli változását differenciálegyenletekkel írjuk le. Ez derivált = összetevők * állapotváltozók + összetevők * gerjesztés. Vagy kiszámoljuk közelítéses módszerrel, vagy áttérünk Laplace-tartományba, ahol egyszerű átalakításokkal számolhatjuk.

5. előadás

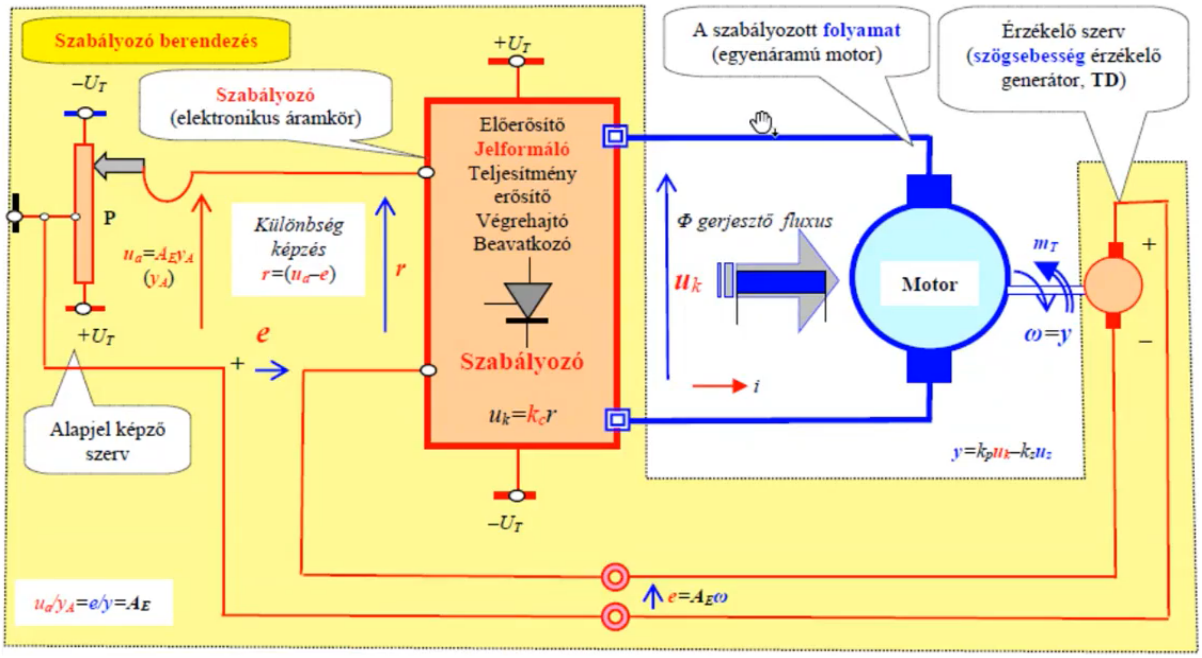
Alapfogalmak

- Bizonyos szintű absztrakcióra van szükség, amit már 30x láttunk, de most megint máshogy lesz:



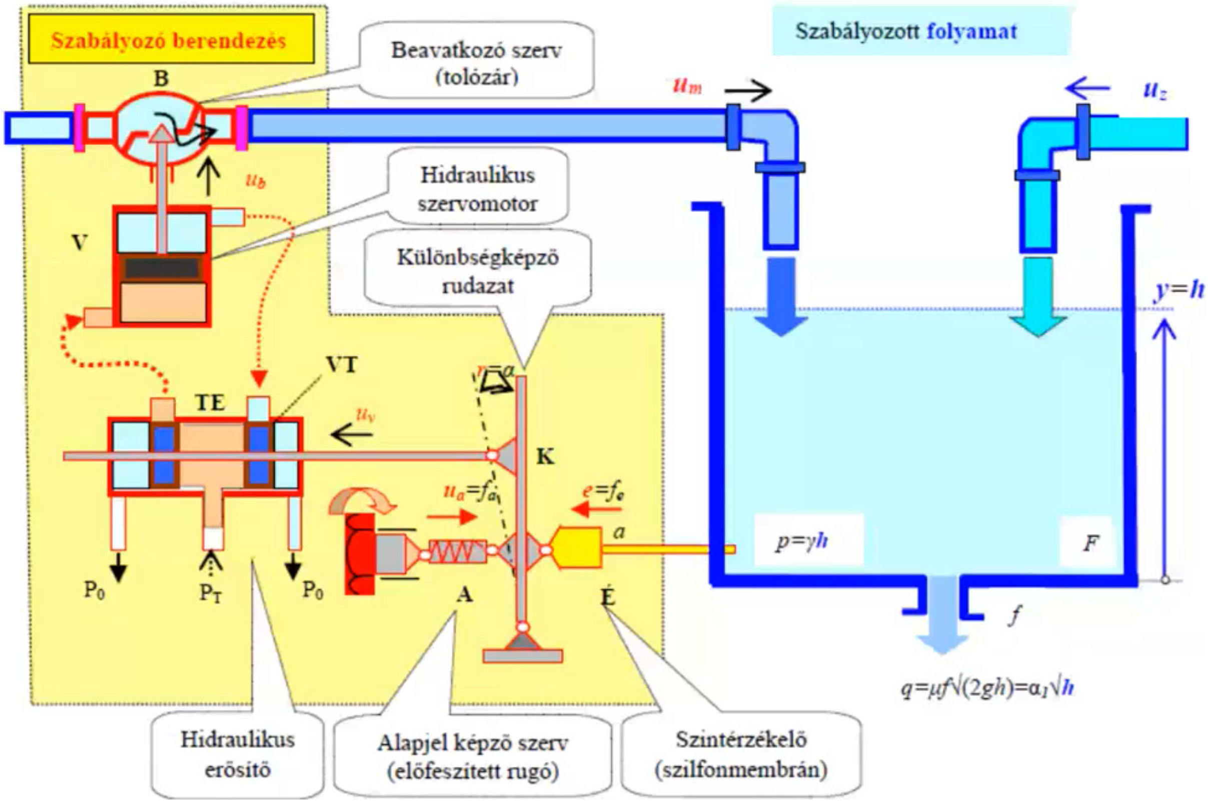
- Új dolog a folyamat belső állapotváltozóinak visszacsatolása a szabályozóba, de ez ritka. Az ábra csak azt mutatja, hogy létezhet ilyen, nem igazán fogjuk használni.
- A cél a folyamat leírása, hogy helyettesíteni tudjuk valami matematikai modellel.
- A folyamattal teljesen egyenértékű egy másik dinamikus rendszer, ami együttműködik a folyamattal, ez a szabályozó berendezés. Kimenete a szabályozó bemenete, és legfontosabb bemenete az y_A, ami a szabályozott jellemző kívánt referencia értéke, tehát azt szeretnénk elérni, hogy y legyen minél inkább olyan, mint y_A. A szabályozó megkapja az y valódi értékét is (fő visszacsatolás), ezzel tud különbséget számolni a referenciához képest, és úgy módosítja u-t, hogy attól a folyamat végén y egy jobban kívánt értéke jelenjen meg. Ezt hívják negatív visszacsatolásnak, mert a szabályozó jel a referencia és a visszacsatolás különbségétől függően áll elő.

Fordulatszámszabályozó



- Ez egy szerkezeti vázlat, nem absztrakció, hanem megmutatjuk, hogy a szabályozott folyamat a motor, a szabályozó pedig áll egy érzékelő szervből, egy különbségképző szervből, és egy erősítő szervből. Negatív visszacsatolás van kialakítva annak érdekében, hogy az ω szögsebesség úgy változzon, ahogy azt az alapjel előírja, és ha a terhelő nyomaték ezt meg akarja változtatni, akkor ez a struktúra úgy működjön, hogy a kapocsfeszültséget változtatva a szögsebesség terhelés miatti csökkenése visszaálljon az eredeti szintre.
- Hogy ezt a szerkezetet létre tudjuk hozni, elektronikai ismeret szükséges. A különbségképzést például úgy kötjük be, hogy az alapjel és a dinamóval mért ellenőrzőjel feszültségét egymással szembe kapcsoljuk, így a kettő közt megjelenik a különbség, így lesz belőlük rendelkező jel, ami a kettő különbsége ($r = u_e - e$).
- Az erősítő egyszerűen egy fix értékkel szorozza a bemenő rendelkező jelet, hogy előálljon, amit kapocsfeszültségnek hívunk: $u_k = k_c * r$.
- A szabályozott folyamat maga az egyenáramú motor, aminek tulajdonsága, hogy minél nagyobb a kapocsfeszültség, annál nagyobb a motor szögsebessége. Ez a feladat szempontjából egy nagyon kedvező motor, aminek ha megduplázzuk a feszültségét, a fordulatszám is kétszeres lesz, vagyis a feszültség és sebesség közt lineáris a kapcsolat. A motort terhelés lassíthatja, ez szintén lineáris. Minél nagyobb a terhelés, annál kisebb a fordulatszám, és pontosan annyiszorosan, amennyire nőtt a terhelés.
- Ezt a szabályozást arányos szabályozásnak hívják, mert a bemenetek és kimenetek közt mindig arányos a függvénykapcsolat.

Szintszabályozás

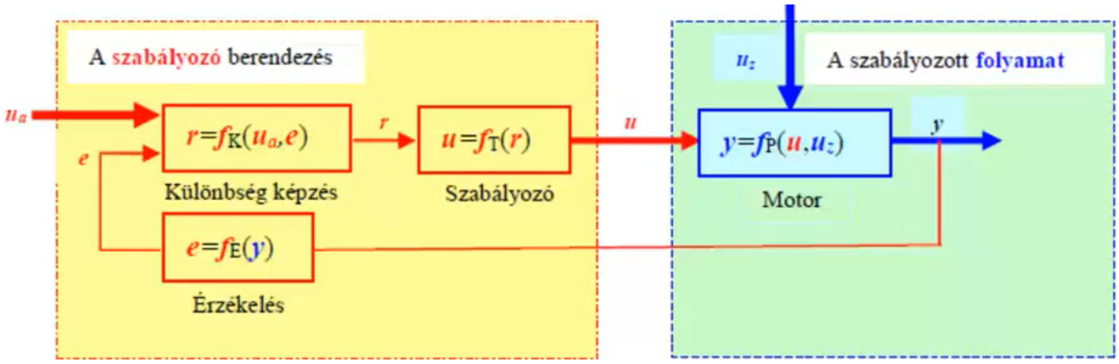


- A szabályozott jellemző a jobb oldali tartály szintjének helyzete. Ezt befolyásolja a két beáramló hozam, viszont u_z technikailag zaj, nem tudjuk befolyásolni. A cél, hogy a két beáramló hozom olyan szintet tartson fent, ami a kiáramló q hozam mellett tartja a h magasságot.
- A víz szintjét a tartály alján mérhető p nyomás alapján tudjuk meghatározni, ezt erővé alakítjuk át, és ez lesz a hibajel. A referencia úgy áll elő, hogy egy ellentétes rugóerőt adunk a másik oldalon. Ez a K kar valójában egy oldalra dőlő rúd, amit a nyomás balra, a rugóerő jobbra tol. Minél balrább tolja a nyomás ezt a kart, végső soron annál jobban zárja a beáramló szelepet. Ha a nyomás megszűnik, a szelep nyílik, nő a beáramlás.
- Annyiban azonos ez a szerkezet a fordulatszám-szabályozással, hogy a bemenő jelet a zavaró jel kompenzálására használjuk fel. Itt csak a hidraulikus erősítő a különlegesség, mert nyomást erősít és rákapcsolja egy szelepet záró tolózárra.
- A szabályozást nagyon jól leírja, hogy amit keresünk, az $dy(t) = [u_m(t) + u_z(t) - q(t)]dt$, tehát időben mennyire változik az a szám, amikor a befolyó folyadékmennyiségből kivonjuk a kifolyó mennyiséget. Ez viszont nem lineáris, mivel $q(t)$ a nyomástól függ, ami gyökös: $q(t) = \mu * f * \sqrt{2 * g * y(t)}$. Ezt most nem számoljuk végig, de ebből lehet a valóságban kitalálni rá szabályozót.

Modellalkotás

- Akármilyen szabályozásról beszélünk, szükséges megalkotni a folyamat és a szabályozó matematikai modelljét, mert tényleges számításokat csak ezeknek a birtokában tudunk elvégezni.

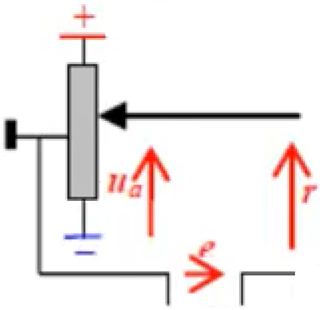
- Az egyenáramú motornál minden egyes erősítés és párhuzam állandóval van szorozva, ezt úgy hívjuk, hogy arányos szabályozás. Ilyen rendszerekben minden kimenet a bemenetnek konstansszorosa. Az ilyen rendszerekhez hozzárendelhetünk egy olyan hatásvázlatot, amelyben azt tüntetjük fel, hogy egy kimenet melyik bemeneteknek a függvénykapcsolata:

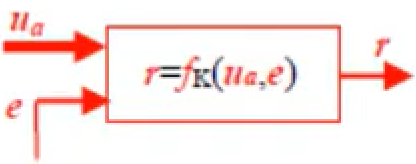


  Ez csak azt mutatja, hogy van valami egyenlete minden doboznak, aminek a zárójelen belül felsorolt változók a részei. Semmi konkrét egyenletről nincs szó, csak felsorolás, például $e = f_E(y)$ esetében:

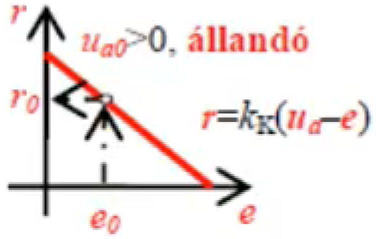
  - e: hibajel.
  - f_E: az E-nek nevezett függvény jelölése, ez fog hivatkozni a hibajel kiszámítására, ami a valóságban valamilyen egyszerű szorzása lesz a bemenetnek.
  - y: a bemenet, ami alapján f_E számol.

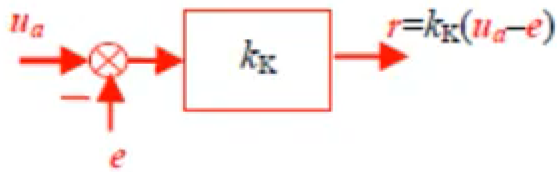
  Ennek a hatásvázlatnak az a lényege, hogy az összefüggő tagok olyanok, aminél az összefüggő bemenő jelekhez előbb-utóbb egy állandó kimeneti jel tartozik. Az ilyen rendszerek általában tehetetlenek, így előbb-utóbb beáll egy állandósult állapot, vagyis ahol állandó bemeneti jelhez állandó kimeneti jel tartozik. Fordulatszám-szabályozás esetében ez minden tagra igaz.
- Vonjunk kapcsolatot a nagyon régen tanult statikus elemzéssel, hasonlítsuk az itt látott ábrák elemeivel, például a különbségképzés így néz ki az itteni ábrákon:



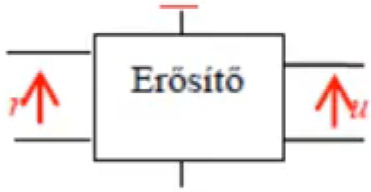


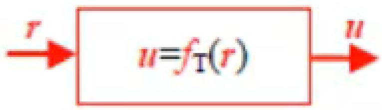
  És ez a statikus karaktere, vagyis a bemenet (e) és kimenet (r) viszonya, illetve az átirata olyan ábrára, ahol a konkrét matematikai művelet látszik, ami ebben a tagban végre van hajtva:



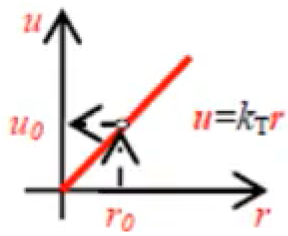


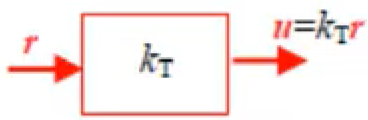
- Ugyanígy helyettesítsük be az erősítőt, ami maga a szabályozó:



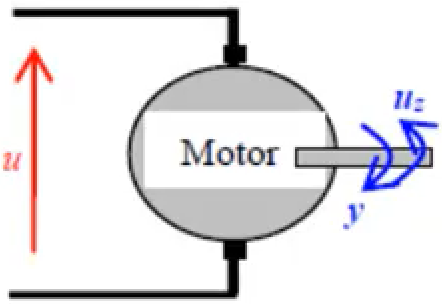


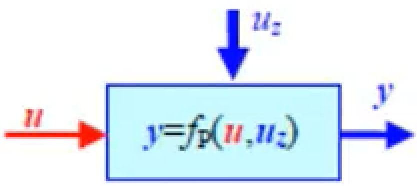
A kimenő feszültség (u) itt egyszerűen a bemenő feszültség (r) konstansszorosa, vagyis $u = k_T * r$, aminek a karakterisztikája egy egyenes, azt ábrázoljuk így:



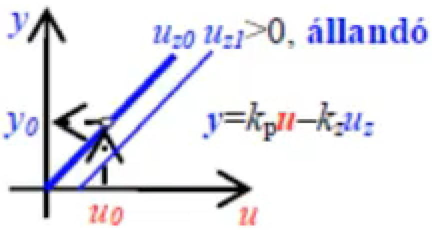


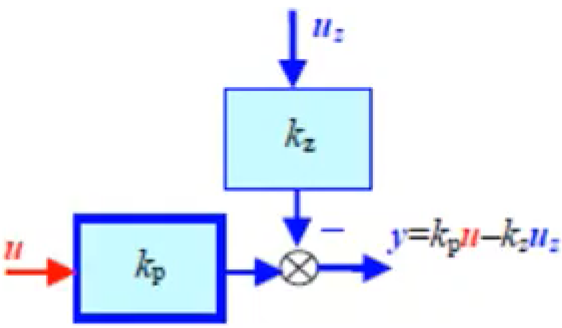
- Következik a motor, ami maga a szabályozott folyamat. Bemenete a kapocsfeszültség (u) és a zavarjel (u_z), kimenete a szögsebesség (y):





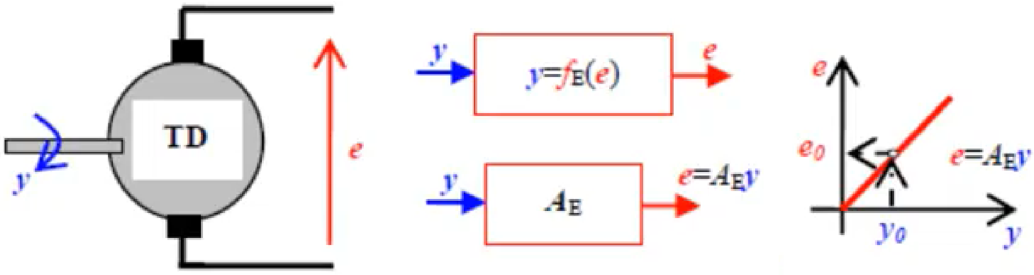
Ezt alakítsuk át így:





Amit a grafikon szemléltet, hogy a szükséges erősítés a zavarjel mértékétől függően jobbra tolódik el, az adott szint fenntartásához nagyobb bemeneti feszültség kell.

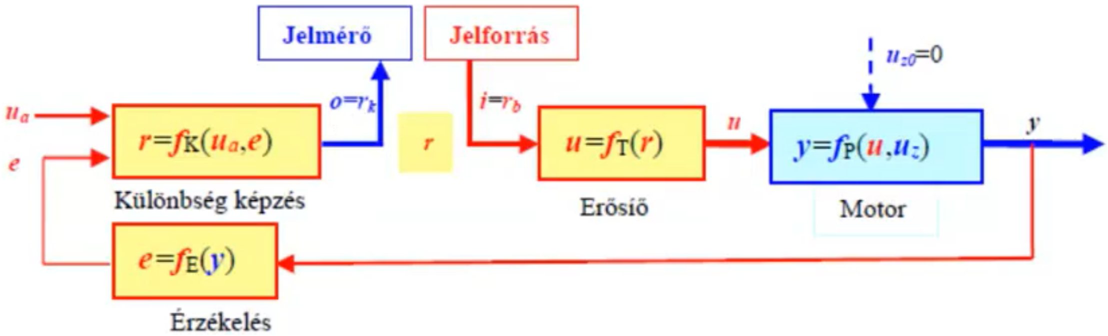
- Már csak az érzékelő maradt, ami a szabályozott jellemző alapján állít elő ellenőrzőjelet, ez is egy lineáris kapcsolat:



- Amik itt előálltak, azok az állandósult állapot függvénykapcsolatait jellemző matematikai kifejezések. Ezek most rendkívül egyszerűek, mert mindenhol lineáris a kapcsolat.
- Valójában tényleg csak az állandósult állapot esetén igazak a lineáris kapcsolatok, ugyanis egy-egy elem valóban pontosan úgy működik, ahogy leírtuk, de lehet egy kis késleltetés időben, amíg beállnak arra az értékre, például a motor a tehetetlensége miatt lassan áll be a megadott feszültségtől függő értékre. Amint ez megtörténik, és állandósul az állapot, újra igaz az egyenletrendszer.

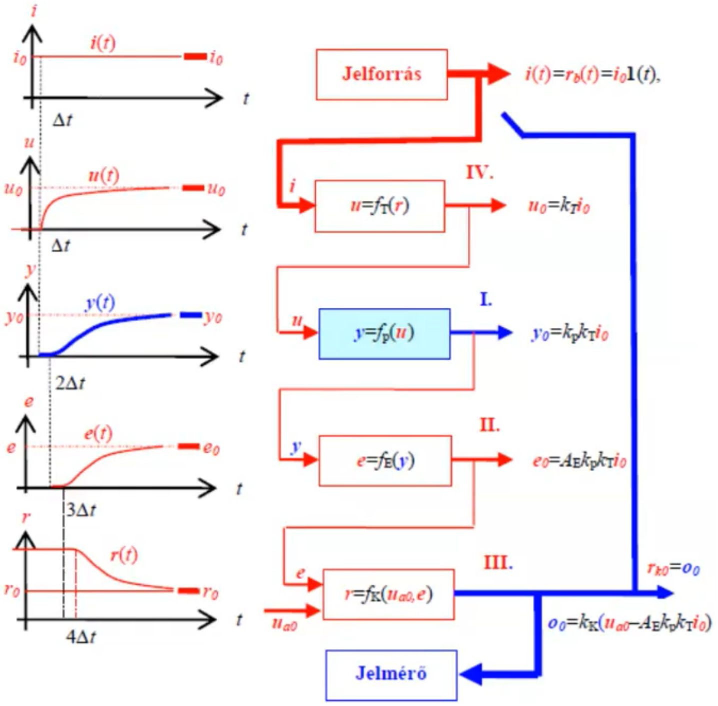
Rendszer mérése

- Csinálhatunk olyat, hogy egy ponton felvágjuk a kört, és bekötünk egy jelmérőt és egy jelforrást:

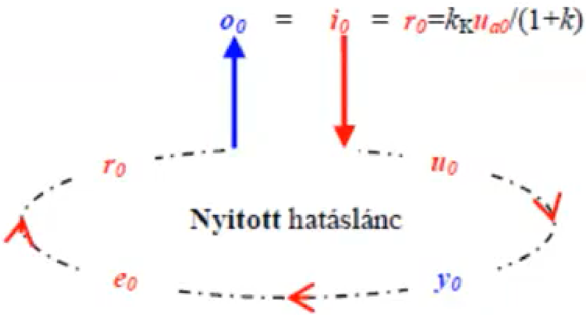


Ez tökéletes arra a feladatra, hogy különböző bemeneti (i, mint input) jeleket megadva az adott ponton megnézzük, hogy mi állna elő ugyanott adott idő után (o, mint output). Ha a jelforrás ugyanazt az értéket adja, amit a jelmérő mér, akkor olyan, mintha ez a szerkezet ott se lenne.
- Általában az ilyen felszakításokon a jelet ugrásszerűen megváltoztatjuk, tehát 0 idő alatt egy teljesen másik értékre állítjuk, majd azt vizsgáljuk, hogy a rendszer mennyi

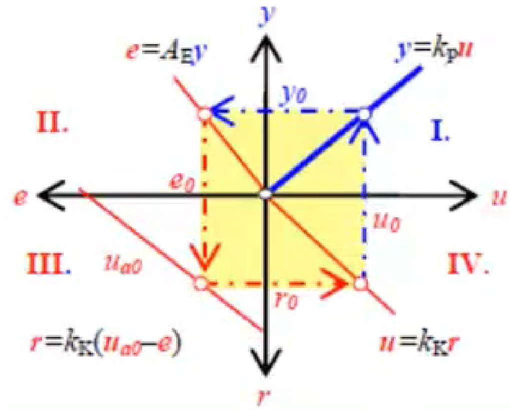
idő alatt áll be arra az értékre. Rajzoljuk fel pontosan, mi is történik:



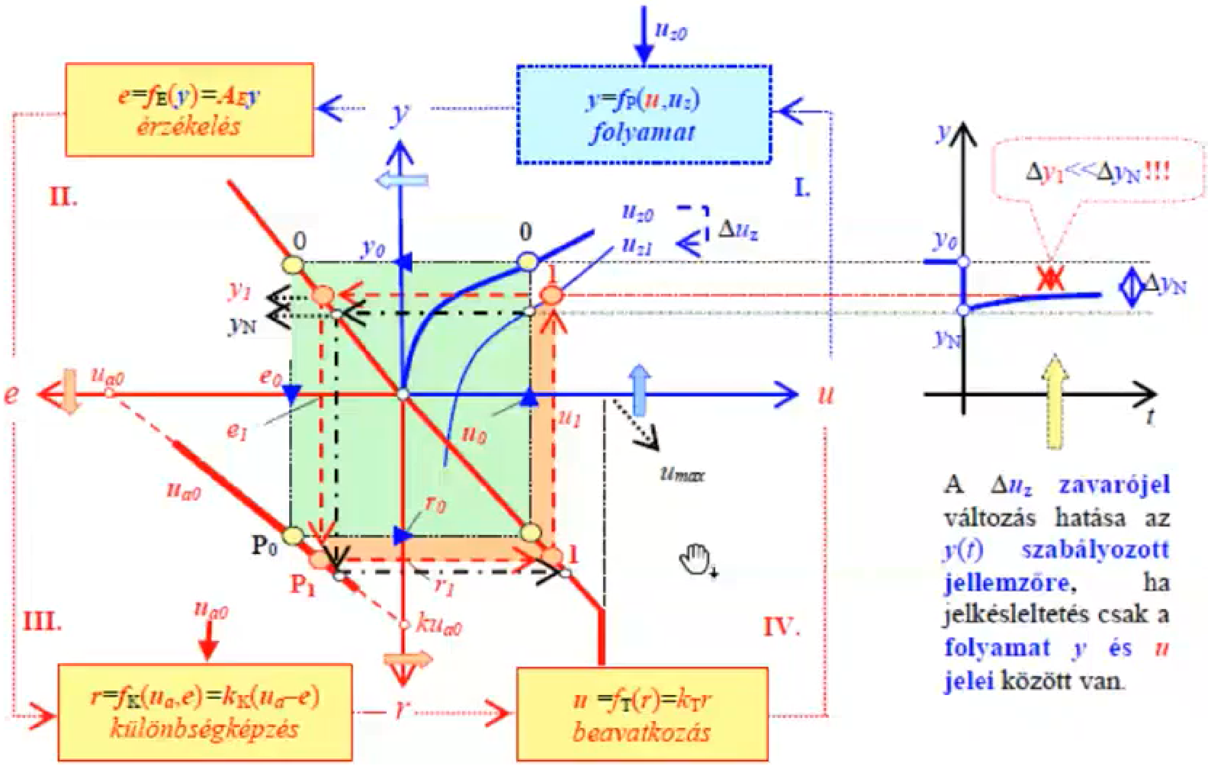
- Az előző ijesztőnek tűnő ábrán valójában semmi különleges nincs. Jobb oldalt egyszerűen azt nézzük meg, hogy a felszakítás helyétől merre megy a jel, mire ugyanoda visszajut. Berajzoljuk a köztes útra a nemrég végigvett elemeket, amiktől jobbra a konkrét képleteket írjuk le.
- Bal oldalt már kell is értelmezni a dolgokat. Az adott jelek időbeli változását írják le, függőleges tengely az érték, vízszintes az idő. A bemenő jelet úgy hívjuk, hogy ugrásválasz, avagy Heaviside-függvény. Negatív időben 0 (ez egyszerűen annyit jelent, hogy amíg nem mérünk, nem adunk rá jelet), majd egyszer csak hirtelen rákapcsolunk valamekkora magas értéket. Minden rendszerben ennek a segítségével tudjuk vizsgálni, hogy adott értékek milyen gyorsan állnak be egy adott szintre. Egyszer csak adjuk a referenciát, a rendszer pedig a gerjesztés kezdetétől a saját tempójában próbálja elérni. Innentől már az összes tag késleltetése látható, vagyis hogy milyen gyorsan vagy épp lassan érik el azt az értéket, amit az állandósult állapot képlete mond.
- Az ábrán valójában kétféle késleltetést láthatunk. Az egyik a korábban leírt késleltetés, vagyis hogy mennyi idő alatt éri el az adott elem a kimeneti értéket. A másik az, ami miatt egyre később kezdenek el megmozdulni a cél érték felé, és egy ideig 0-n maradnak: ez egy olyan késleltetés, például az elektronikából fakadóan, ami technikailag a rendszer “feldolgozási ideje”. Ez utóbbit hívják jelkésleltetésnek, és egy helyen látjuk nagyon jól működni: az érzékelő lényegében a motor jele, csak időben eltolva, mert az érzékelés azonnali és pontos, csak a kimenő jel jelenik meg időben kicsit később. A különbségjel nyilván az, hogy az érzékelő jelét kivonja valami konstans értékből, természetesen itt is késik az egész egy kicsit.
- Amikor minden késleltetés lezajlott, a felnyitott ponton a bemeneti és kimeneti jel azonos kell legyen:



Ennek vonzata, hogy ha a felnyitást megszüntetjük, akkor az állapot, amit elértünk, a rendszerben ott fog maradni. Ez azt jelenti, hogy a statikus karakterisztikában egyensúlyi helyzetet állítottunk be:

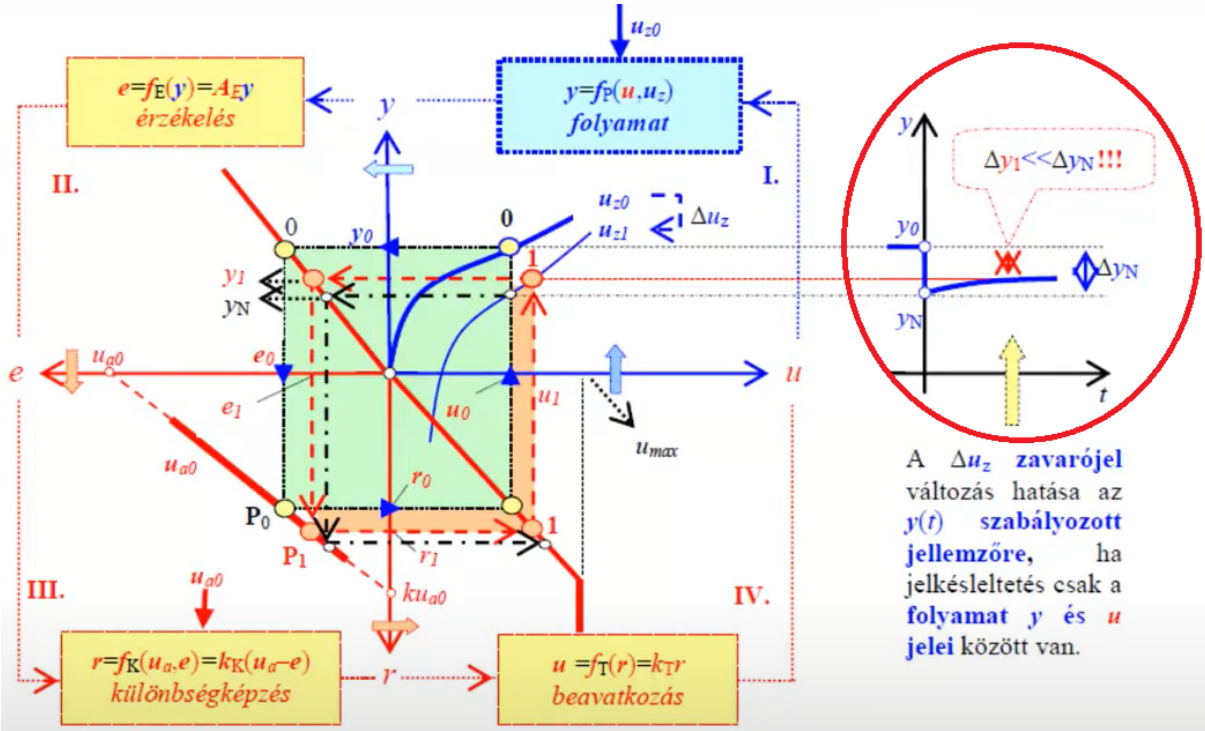


- Az egyensúlyi helyzetet ez a látszólag bonyolult ábra írja le:



- Valójában semmi más nem történik, csak mivel az egyik egyenlet (a motor a jobb felső negyedben) nem lineáris, ezért nem kifelé nő és csökken a négyzet, mint a régi előadások példájánál, hanem elmozdul. A zöld és narancs négyzet ugyanúgy egy egyensúlyi helyzet, csak más zavarjelet kompenzálva.

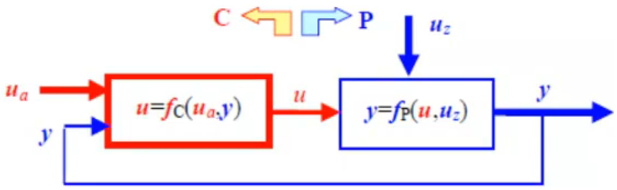
- Egyensúlyi helyzetet úgy találunk, hogy elkezdjük kigyűjteni a képleteket:
  $y = k_p * u - k_z * u_z$
  $e = A_E * y$
  $r = k_K * (u_a - e)$
  $u = k_T * r$
  Szépen lassan egyre tovább behelyettesítjük y-ba a még tovább kifejezhető tagokat:
  $y = k_p * u - k_z * u_z = k_p * k_T * r - k_z * u_z = k_p * k_T * k_K * (u_a - e) - k_z * u_z =$
  $k_p * k_T * k_K * (u_a - A_E * y) - k_z * u_z$
  Legyen $k_p * k_T * k_K = K$ (ez majdnem a körerősítés, ami azt írja le, hogy a kör végén hányszorosan kapjuk vissza az u_a referenciát), így könnyebben rendezzük y-ra:
  $y = K * (u_a - A_E * y) - k_z * u_z = K * u_a - K * A_E * y - k_z * u_z$
  $y + K * A_E * y = K * u_a - k_z * u_z$
  $y * (1 + K * A_E) = K * u_a - k_z * u_z$
  $y = \frac{K*u_a - k_z*u_z}{1+K*A_E}$(a körerősítés itt $K * A_E$, valójában ennyiszer kapjuk vissza y-t)
  Az eredményen látszik, hogy kizárólag u_a és u_z, tehát a rendszerbe kívülről bemenő jelek alapján meg tudtunk állapítani egy olyan értéket a szabályozott tényezőhöz (y), ahol az egyensúlyi helyzetbe kerül. A képletben minden más konstans. Hasonló módon minden statikus karakterisztikából kiszámolható az egyensúlyi helyzet értéke. Az y ismeretében már végig lehet számolni az összes többi egyenletet, hogy a többi értéket megkapjuk.
- K megválasztása, és az alapján az erősítések kitalálása fontos lehet, vegyünk például egy olyan példát, hogy a zavarjel szabályozás nélkül 10%-kal változtatja meg a szabályozott jellemzőt. Ezt szeretnénk 1%-ra csökkenteni. Vegyük y-nak azt a részét, ami a zavarjelről szól: $\frac{-k_z*u_z}{1+K*A_E}$. Egyszerűen tizedére szeretnénk csökkenteni a felső tagot. Szabályozás nélkül természetesen nincs osztás, de az így létrehozandó szabályozó célja az, hogy ez 10 legyen, tehát $1 + K * A_E = 10$, avagy $K * A_E = 9$. Természetesen mi alkotjuk meg a szabályozót, így a két értéket úgy változtatjuk, ahogy csak szeretnénk. Így végtelen sok megoldás van, csak a fizikai határokat kell betartanunk, amikor létrehozzuk az eszközt, például ne legyen 1000-szeres erősítő benne, inkább hasonlítsanak egymáshoz a szorzók.
- Értelmezzük ezt a részt is:



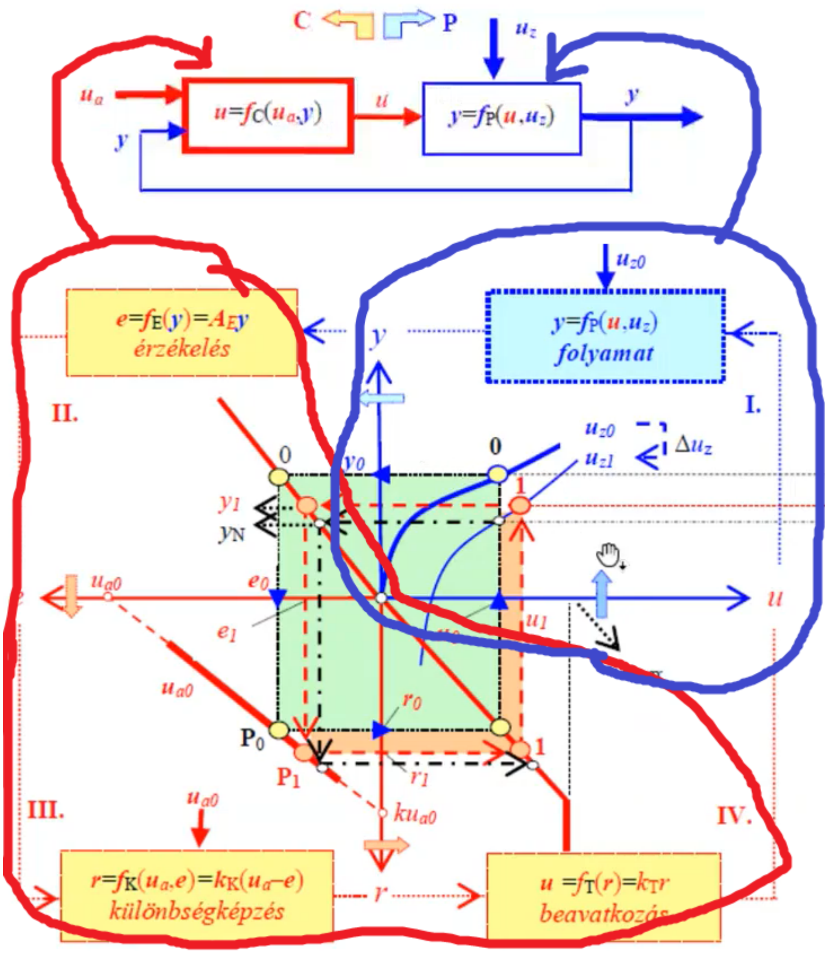
- Amit itt látunk, az az, hogy u_z megváltozásával, amennyiben nem lett volna szabályozó, y oda csökkent volna, amit az ábrán y_N jelöl, és ez sokkal jobban kizökkentette volna a rendszert. Itt a vízszintes tengely az idő, és láthatjuk, hogy a szabályozó az 1-es pontba (ami nagyon balra y_1-es jelölést kapott) szabályozta vissza a rendszert, sokkal stabilabbá téve ezzel. Lényegében az y-t kizökkentettük, de visszatornázta magát egy jobb helyzetbe. Minél jobb a rendszer, annál jobban közelíti y_0-t u_z módosítása után.

Egyszerűsített statikus elemzés

- Egyszerűsítsük egy kicsit a kört:

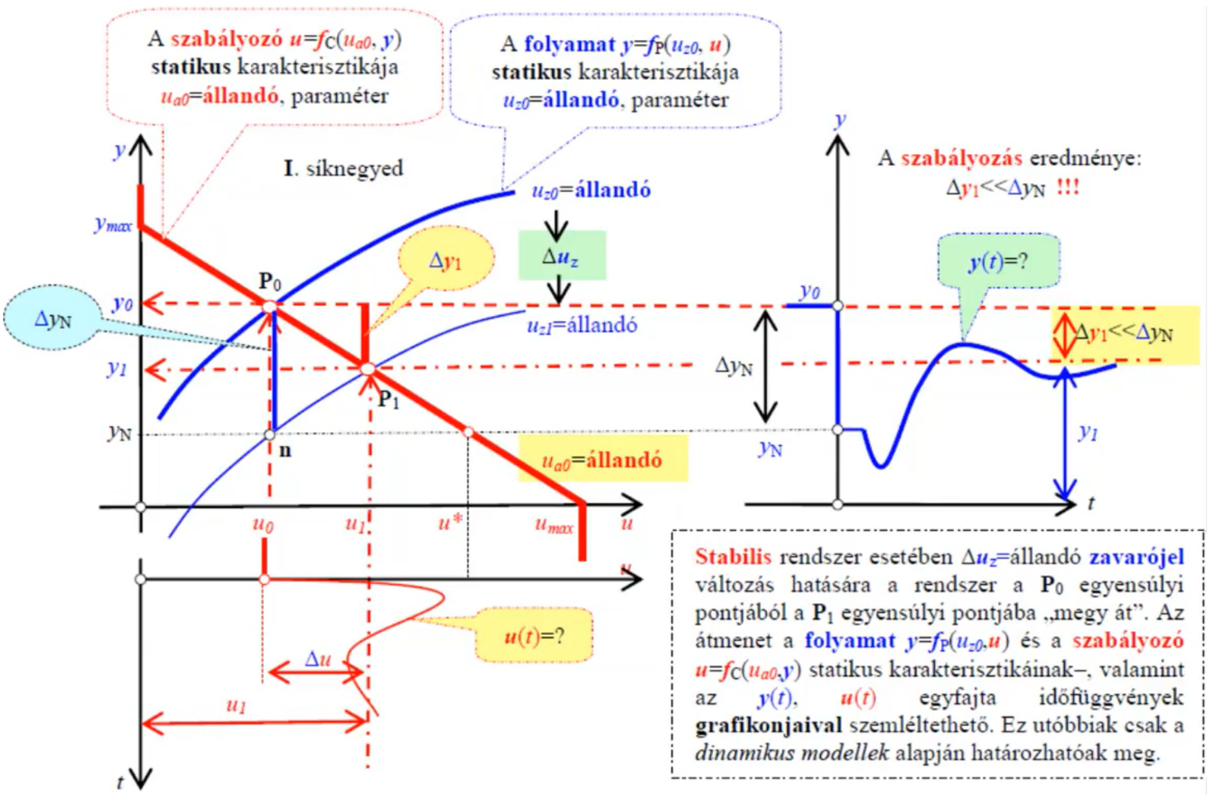


- Itt azt írtuk le, hogy a folyamat és szabályozó is leírható egyetlen függvénnyel, mivel állandó bemenetekre állandó kimenetet vesznek fel. Ha a szabályozó bemenete ugyanaz az u_a és y, akkor mindig ugyanaz az u a kimenet. A folyamat is ilyen, ugyanarra az u és u_z bemenetekre egyféle y-t adhat csak. Úgy hívjuk ezt a jelenséget, hogy önbeálló tag. Mind a szabályozó, mind a folyamat önbeálló tag.
- Még szemléletesebben adja meg a viszonyokat, ha felrajzoljuk, miből állt elő a most felrajzolt hatásvázlat:



Valójában a szabályozásban résztvevő tagokat tömörítettük egyetlen taggá. Ez is egy teljesen valós absztrakció.

- Az így felrajzolt rendszerben lényegében csak u és y kapcsolata áll fenn. A szabályozó y alapján u-t változtatja, a folyamat u alapján y-t. Így mindkettőt fel lehet egyetlen grafikonra rajzolni, és az alapján következtetéseket levonni:



- A folyamat karakterisztikája ugyanaz, mint a másik ábrán. Egy kék görbe azt jelzi, hogy adott u_z értéken egy ahhoz párosuló u irányítójellel milyen y-t, azaz szabályozott jellemzői értéket vesz fel. Ha u_z változik, a görbe fel-le mozog, de ugyanaz marad.
- Ha a folyamat karakterisztikáján kijelöljük a P_0 egyensúlyi pontot, akkor ezen a ponton át kell, hogy menjen a szabályozó, ami általában ellentétes a folyamat meredekségével. Minden u_z értéknek egyetlen metszéspontja lesz ezzel az egyenessel, és az lesz az a pont, ahová a szabályozó a rendszert állítani fogja. Természetesen a szabályozó piros egyenese is emelhető vagy lejjebb vihető, ez a referencia értéktől függ.
- Vegyük ismét azt a példát, hogy mi történik, ha u_z értéke hirtelen ugrik. Ugyanaz lesz a hatása, mint az előző ábrán: lecsökken a P_0 pontról n-re a szabályozott jellemző, de a szabályozó vissza fogja tolni P_1-be, a jobb oldalon látható időbeli változás alapján. Kis oszcilláció után, de elér egy jobb értéket. Ebből látható, hogy minden állandósult állapot a szabályozó egyenesén lesz rajta, mindig metszéspontra viszi a rendszert.
- Ha nem lenne szabályozó, az u_z változása egyenletesen térítené ki y-t, ezt a mértéket mutatja meg Δu_z és Δy_N. Ugyanerre az u_z-beli változásra a szabályozott kizökkentés (Δy_1) sokkal kisebb. Az u nyilván nyugodtan elmozdulhat, az a mi jelünk, nekünk csak y számít. Meghúzhatjuk a piros vonalat úgy is, hogy sokkal kisebb meredekségű legyen, és akkor még magasabban vágná a csökkent u_z görbéjét, még kisebb kitérést okozva. Ennek sokszor fizikai korlátai vannak, azért nem tökéletes

minden szabályozó. Ettől függetlenül természetesen minél nagyobb körerősítést érdemes választani, amekkorát csak lehet, mert attól függ ez a meredekség.

- Van egy másik probléma is: ha egy nagy körerősítés nagy késleltetéssel párosul, akkor a kilengés megnő. Ez azért történik, mert folyamatosan adja rá az erősítést, ami az adott értékbe eljuttatja a szabályozott jellemzőt, de az már rég ott van, csak az érzékelőn át még a szabályozási kör ezt nem látja, szóval erősíti tovább. Ezen az ábrán például azért van kilengés, mert túl nagy az erősítése a szabályozó körnek.
- Ha túl nagy a kilengés mértéke, az is előfordulhat, hogy a rendszer már nem képes semmilyen módon szabályozni magát, mert minden kilengés után visszafordított erősítés messzebb és messzebb viszi a jellemzőt a kívánt ponttól, egyre nagyobbakat leng ki, míg el nem éri a fizikai határokat. Erre egy példa a mikrofon gerjedése. Ezt hívjuk úgy, hogy elveszíti a rendszer a stabilitását, vagyis instabillá, azaz **labilis** rendszerré válik.
- Fontos kérdéskör, hogy milyen feltételek kellenek ahhoz, hogy például ezen az ábrán a $P_0 \rightarrow P_1$ átmenet egyáltalán létrejöhessen. Ha az egyik karakterisztika nem lineáris, akkor sokat nem lehet tenni, csak kísérletezni. Ha viszont minden karakter lineáris, arra van megoldás, de már nem pusztán algebrával:

Stabilitásvizsgálat

- Vegyük újra a rendszerek egyenleteit:
  $y = k_p * u + k_z * u_z$ (igen, ez régen – volt, de most úgy döntöttek, hogy ez lesz)
  $e = A_E * y$
  $r = k_K * (u_a - e)$
  $u = k_T * r$
  Egy érdekes mátrixot kell alkotnunk belőlük. Vegyük végig minden egyes rendszer kimeneti változója ($y,\ e,\ r,$ és u) után, hogy az a többiből hogy áll össze. Egyszerűen így szemléltetjük, bal oldalt a fent látható sorrendben szerepelnek, és az oszlopok sorrendje is ugyanez. Valójában mindegy a sorrend, csak az oszlopok és sorok ugyanúgy kövessék egymást:

	y	e	r	u
y				
e				
r				
u				

- Vegyünk egy példát, hogy hogyan lesz a korábbi egyenletekből egy ilyen sor, például:
  $y = k_p * u + k_z * u_z$
  Ezt olyan alakra kell hoznunk, hogy $a * y + b * e + c * r + d * u = e$. Nekünk ebből $a,\ b,\ c,$ és d kell, mert azok mennek a táblázatba. Az e értéke teljesen mindegy. Ez jön ki a kiragadott sorból:
  $y - k_p * u = k_z * u_z$
  Itt kiválasztottuk a hasznos tagokat balra, a haszontalanokat jobbra. Természetesen

a hiányzó tagok is ott vannak, csak a szorzó 0.

$y + 0 * e + 0 * r - k_p * u = k_z * u_z$

Innen már be is írhatjuk a számokat a táblázatba, y helyére 1-et, u helyére $-k_p$-t, a többi pedig 0. Kitöltöttem a többit is, hogy ne menjen ezzel az idő:

	y	*e*	*r*	*u*	*maradék*
y	1	0	0	$-k_p$	$k_z u_z$
e	A_E	1	0	0	0
r	0	k_K	1	0	$k_K u_a$
u	0	0	$-k_T$	1	0

- A szélére kiírtam, hogy a felírt képletek mivel egyenlők, azaz a korábban haszontalannak hívott tagokat.
- A változók mátrixa kell nekünk, leginkább a determinánsa, amit jelöljünk D-vel:

$$D = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_p \\ -A_E & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_T & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_K & 1 & 0 \\ 0 & -k_T & 1 \end{vmatrix} + k_p \begin{vmatrix} -A_E & 1 & 0 \\ 0 & k_K & 1 \\ 0 & 0 & -k_T \end{vmatrix} = 1 + \underbrace{k_p A_E k_K k_T}_{k} = 1 + k$$

- Kell még néhány spéci mátrix. Minden egyes változóra szükségünk lesz olyan formában, hogy a saját oszlopát lecseréljük a maradékra. Például y esetében:

$$D_y = \det\begin{bmatrix} k_z u_z & 0 & 0 & -k_p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_K u_a & k_K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_T & 1 \end{bmatrix} = k_z u_z \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_K & 1 & 0 \\ 0 & -k_T & 1 \end{vmatrix} + k_p \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_K u_a & -k_K & 1 \\ 0 & 0 & -k_T \end{vmatrix} = k_z u_z + k_p(-1)k_K u_a(-k_T) = k_K k_T k_p u_a + k_z u_z$$

- És itt jön a csoda, ugyanis bármelyik rendszer körerősítését megkaphatjuk, ha elosztjuk az adott rendszer D mátrixát a teljes szabályozó körével, vagyis a fő D mátrixszal. Pontosan ezt számoltuk ki, amikor korábban a négy egyenletet egymásba helyettesítettük. Ez az állandósult állapot képlete:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{k_K k_T k_p u_a + k_z u_z}{1 + k_K k_T k_p A_E} = \frac{k_K k_T k_p}{1 + k_K k_T k_p A_E} u_a + \frac{k_z}{1 + k_K k_T k_p A_E} u_z = \frac{k}{1+k} \frac{u_a}{A_E} + \frac{k_z}{1+k} u_z$$

ahol $k = k_K * k_T * k_p * A_E$. Ezt a k tagot kerestük, vagyis ami $k/(1 + k)$ alakban felírható, annak ezt a részét.

- Itt a többi rendszer körerősítése, de úgyse lesz belőle példa, csak legyen itt, ha szeretnél számolást gyakorolni:

$$D_e = \begin{vmatrix} 1 & k_z u_z & 0 & -k_p \\ -A_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_K u_a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_T & 1 \end{vmatrix} \qquad D_r = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k_z u_z & -k_p \\ -A_E & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_K & k_K u_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_u = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k_z u_z \\ -A_E & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_K & 1 & k_K u_a \\ 0 & 0 & -k_T & 0 \end{vmatrix}$$

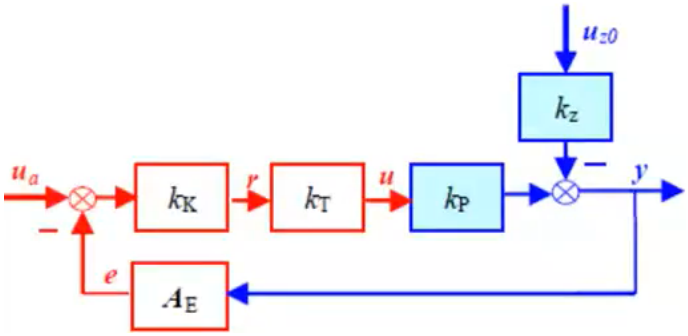
$$e = \frac{D_e}{D} = \frac{k}{1+k} u_a + \frac{A_E k_z}{1+k} u_z \qquad r = \frac{D_r}{D} = \frac{k_K}{1+k} u_a - \frac{A_E k_K k_z}{1+k} u_z \qquad u = \frac{D_u}{D} = \frac{k_K k_T}{1+k} u_a - \frac{A_E k_K k_T k_z}{1+k} u_z$$

- Ami nekünk fontos, hogy megkaptunk egy olyan függvényt, ami az adott rendszert a két bemeneti változóhoz írja le:

$$y = f_R(u_{a0}, u_{z0}) = \frac{k}{1+k}\frac{u_{a0}}{A_E} + \frac{k_z u_{z0}}{1+k} = \frac{k}{1+k} y_{A0} + \frac{k_z}{1+k} u_{z0}$$

Ez önmagában helyettesítheti a teljes hatásvázlatot, bármelyik rendszer szemszögéből leírhatjuk a teljes kört. Lényegében megoldottuk a lineáris egyenletrendszert bármelyik változóra.

- Egyszerűsítsük le a rendszert pusztán körerősítésre:

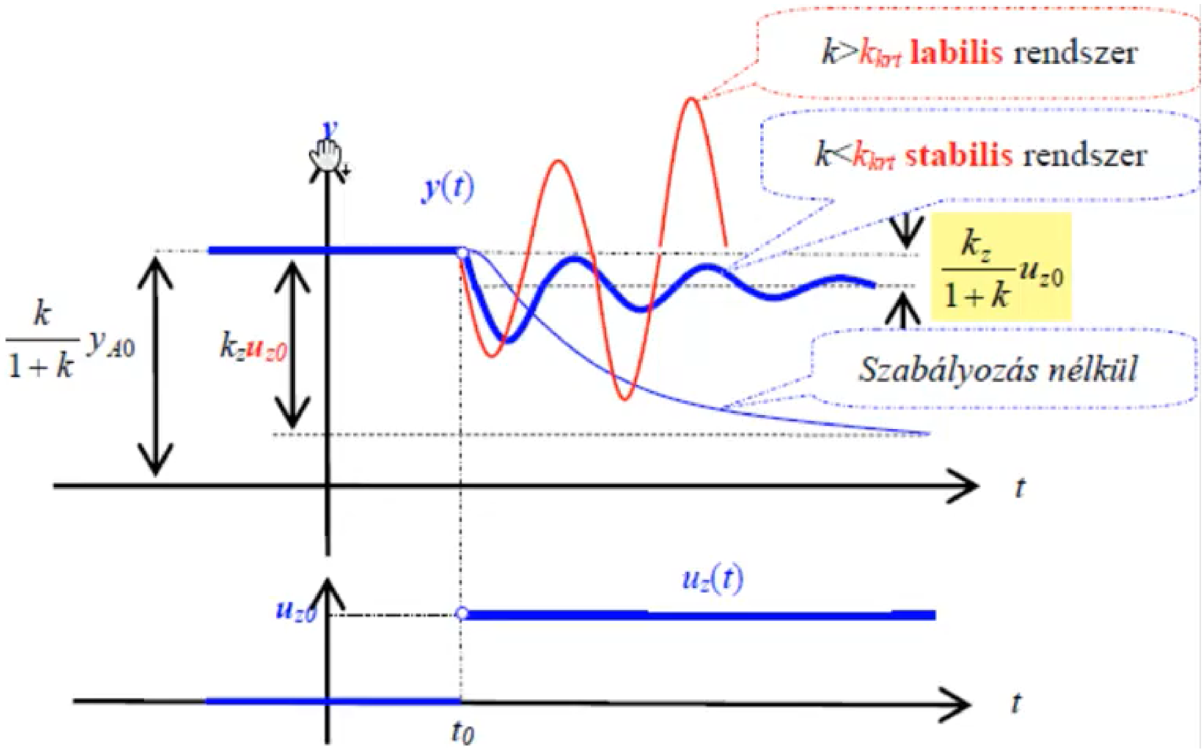


- És nézzük meg így y-t:

$$y = \frac{k}{1+k} y_{A0} - \frac{k_z}{1+k} u_{z0}$$

Látjuk, hogy ha k hatalmas, akkor $k/(1+k)$ tart 1-hez, tehát a rendszer kimenete lényegében egyenlő lesz a referencia jellel, $k_z/(1+k)$-t pedig 0-hoz tart, tehát a zavarjelet eltünteti.

- Láttunk már példát a labilis rendszerre, nézzünk meg egy ilyet újra:



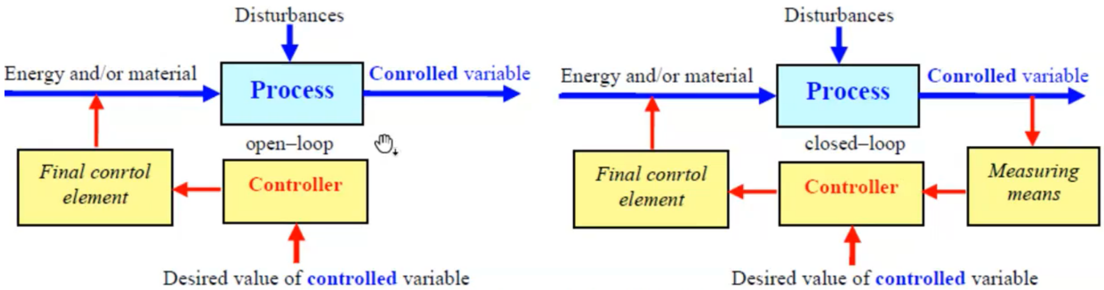
- Itt látszik, hogy ahogy növeljük k-t, mi lesz a hatása annak a két egyenletnek, amiket az előző pontban tárgyaltunk. Az y ugyanaz marad, a kitérést leíró tag pedig egyre kisebb. Azonban ha túl kicsire akarjuk, a szabályozó már nem fog ingadozás után beállni egy stabil pontra, hanem elkezd divergálni.

- A k_{krt} tag neve kritikus körerősítés. Az ennél kisebb körerősítések mind stabilak, az ennél nagyobbak mind labilisak. Mi történik egyenlőségnél? Jogos a kérdés: nem áll be sehova, és nem is lesz divergens, egyszerűen szinuszt ír le a végtelenségig. Hogy hol van ez a kritikus körerősítés, azt később vesszük.
- Azt is megfigyelhetjük, mi lenne, ha nem szabályoztuk volna a rendszert: egyszerűen kitér annyival a szabályozott jellemzőnk, ami a zavarás.

Kitekintés

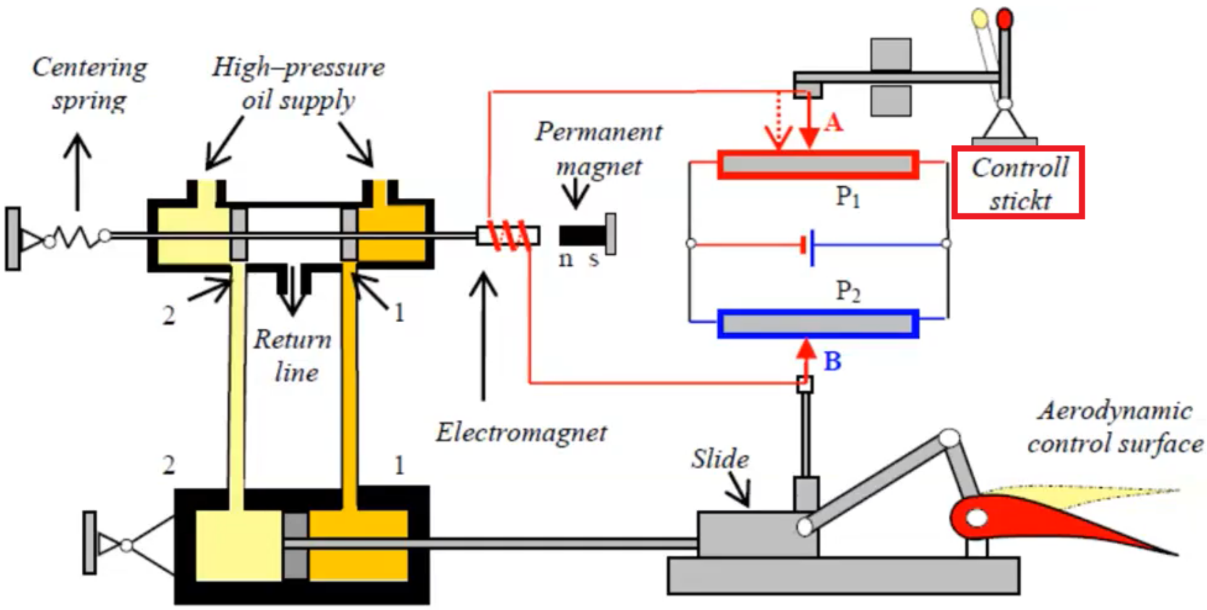
Ezek leginkább érdekességek, amiben jók, hogy felfrissítik az eddigi tudást, és segítségükkel könnyebben magyarázható el random rendszer.

- Az angolszász irodalom a következő ábrákkal írja le a nyílt és zárt körű szabályozást:



Pontosan ugyanaz, amit mi vettünk, nyílt körnél nincs visszacsatolás, csak máshogy rendezi a dobozokat.

- A következő egy vitorlázórepülő szárnyát vezérlő rendszer, piros keretekben kiemelve a félig angol, félig német kifejezéseket:

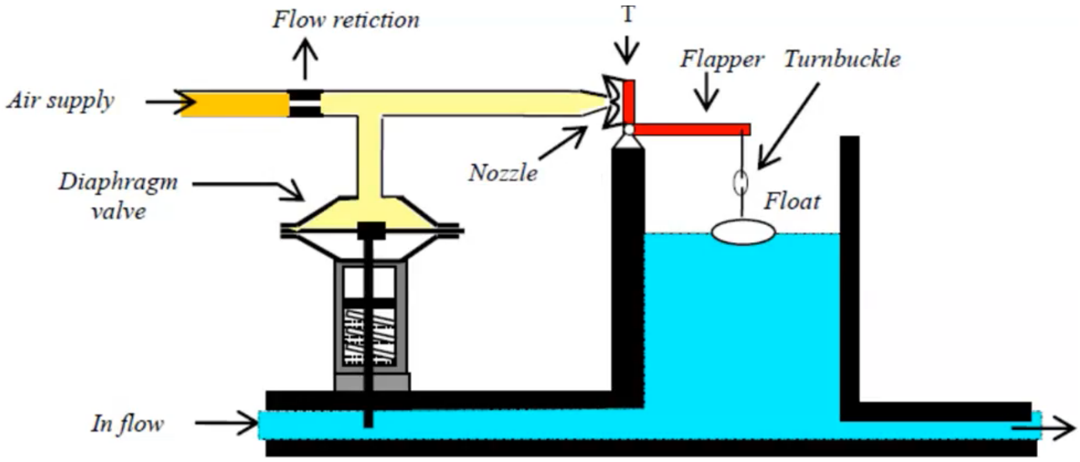


Elekrohydraulic servomechanism

- Van egy botkormány, amit átalakítunk feszültséggé. Ez abból áll elő, hogy A és B lapot eltoljuk egymástól. A-t mi mozgatjuk, B-t pedig a szabályozó. Ha ellentétesen állnak egymással, akkor nincs áram, tehát az elektromágnes nem ad jelet a szabályozó körre, így a szárny marad a helyén. Amint a szél a szárnyat elmozgatta,

B is el fog csúszni, újra lesz áram az elektromágnesben, amitől a szabályozó visszalöki a szárnyat. A hidraulika működése, hogy a mágnes kimozdításával egyik vagy másik oldal nyomása átkerül alulra, ami elmozdítja a szárnyat tartó kart. Így tudunk egy egyszerű botkormánnyal óriási erőket kifejteni, hatalmas ellenerőkkel (többszáz km/h-s széllel) szemben. Egy utasszállító is ugyanilyen elven működik, csak "kicsit" nagyobb méretben és több biztonsági berendezéssel.

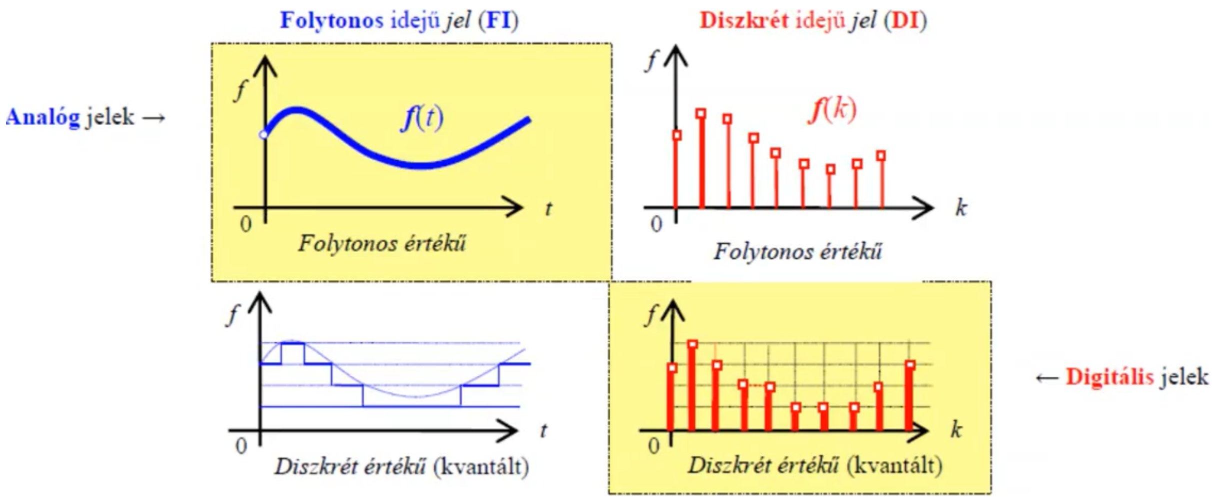
- Van extrémebb mód a tankban lévő vízmennyiség szabályozására:



Itt mindössze annyi történik, hogy ha fogy a víz, akkor a felszínén lebegő biszembaszom leránt egy kart, amitől egy nyomás alatt tartott légkamra nyomása kiszökik a szabadba. Viszont bal oldalt középen egy olyan kamra volt, ami egy membrán két oldalán ugyanolyan (nagy) nyomást tartott. Most, hogy felül kicsi lett, a nagy nyomás feltolja a magasba a membránt, amihez hozzá van erősítve a szelep, így megnyílik a vízfolyam, és újra telik a tank. Ha tele a tank, visszazáródik a T-vel jelölt sapka, nem fúj már ki levegőt, megnő bent a nyomás, másik irányba tolódik a membrán, és záródik a tank.

Jelek

- Egy jelet négy csoportra osztunk, de ebből kettő lényeges:



  - Analóg jel: bármilyen értéket felvehet, akár irracionális szám is lehet.

- ○ Digitális jel: korlátozott, hogy hány értéket vehet fel, például 2 biten csak a 00 (0), 01 (1), 10 (2), és 11 (3), azaz 4 szám állhat elő. Lehet, hogy egyenlő az értékek közti távolság, de az sem baj, ha nem.
- ○ Folytonos idejű jel: minden időpillanatban értelmezett
- ○ Diszkrét idejű jel: csak adott időpillanatban értelmezett, itt viszont kötelezően azonos a távolság két időpillanat közt. Egy ilyen időpillanatban vett értéket mintának nevezünk. Ilyenkor nem az idő, hanem a minta száma alapján hivatkozunk rá, hogy melyik pontot vizsgáljuk.
- ○ A valóságban szinte minden analóg jel folytonos, és minden digitális jel kvantált.
- ○ Kvantált jel: adott időpillanatokra mondtuk meg az értékét, nem konkrét függvényként írtuk fel. Például úgy írtuk le, hogy $t = 0$-ban 2, $t = 1$-ben $3\ldots$

- Alaposan tanultunk már az egy bemenetű és egy kimenetű tagról, amit SISO-nak hívunk:

Itt j jelentené a bemenetek, k pedig a kimenetek számát, de már a névből következik, hogy ezek a számok 1-ek.

- A tag lineáris differenciálegyenlete, vagyis a **rendszeregyenlet** ez volt:

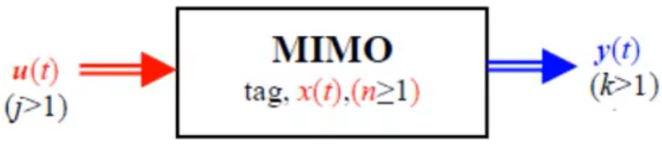
$$a_0\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_i\frac{d^{n-i}y(t)}{dt^{n-i}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_i\frac{d^{m-i}u(t)}{dt^{m-i}}+\cdots+b_{m-1}\frac{du(t)}{dt}+b_m u(t)$$

(lineáris, mert összeadásokból áll)

- Ez n-edrendű, ami azt jelenti, hogy a függvény, amivel dolgozik, maximum ekkora hatványú tagot tartalmaz. Épp ezért valamilyen szorzóval minden hatvány szerint deriválva van időben a kimenet, ahogy a gerjesztő jel is (az lehet kisebb hatványú).
- Az a kérdés, hogy ha adott az $u(t)$, akkor a kimenet hogy változik. Ezt úgy hívjuk, hogy meg kell oldani a differenciálegyenletet.
- Laplace-transzformálása után előáll az átviteli függvény, ami leírja, hogy Laplace-térben hogyan kell szorozni u-t, hogy y-t kapjunk. Ennek az az előnye, hogy a végtelen deriválásból egyszerű algebrai művelet lett, a probléma az, hogy egy kitalált, s operátor tartományban kell miatta dolgozni. Ez volt sus:

$$y(s)=\underbrace{\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_is^{m-i}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_is^{n-i}+\cdots+a_{n-1}s+a_m}}_{W(s):\,\text{algebrai tört}}u(s)=\frac{B(s)}{A(s)}u(s)=W(s)u(s)$$

- Az átviteli tagok egy másik kategóriája a multiple input, multiple output, vagyis MIMO tag, aminek több be- és kimenete lehet:



$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

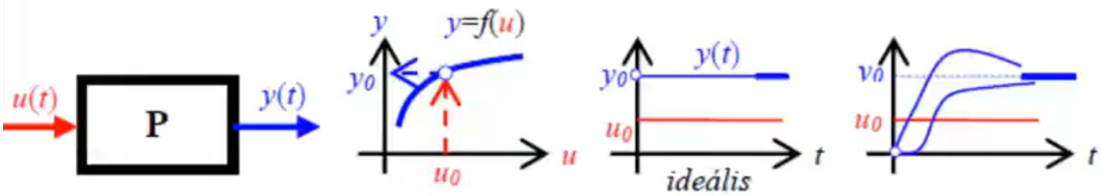
Itt A az állapotmátrix, B a bemeneti mátrix, ez írja le a tag belső változásait időben, a kimenet pedig csak egy egyszerű algebrai egyenlet.

- MIMO tag esetén mindenhol mátrixok vannak, még átviteli függvény helyett is átviteli mátrixot használunk. Mivel a Laplace-térben nagyon extrém, nem vesszük alaposan, csak említés szintjén ilyen cukiság lesz belőle (az oktató is kifejezte, hogy szívbajt kap tőle, szóval tényleg hagyjuk):

$$x(s) = (sI - A)^{-1} B u(s)$$

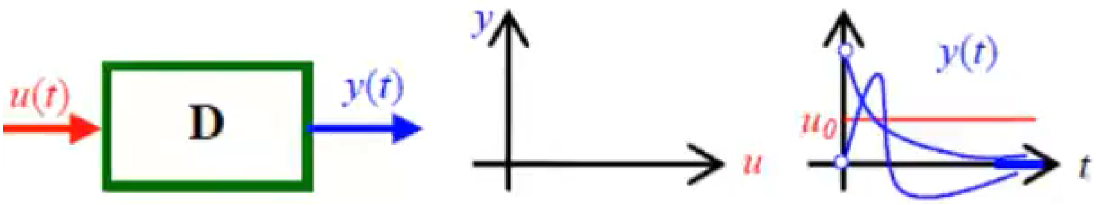
$$y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] u(s) = \underbrace{\frac{C \operatorname{adj}(sI - A) B + \det(sI - A) D}{\det(sI - A)}}_{\mathbf{W}(s)\text{: átviteli mátrix}} u(s) = \mathbf{W}(s) u(s)$$

- Az előadás utolsó témája, hogy miféle tagok léteznek, elsőként az önbeálló tag:



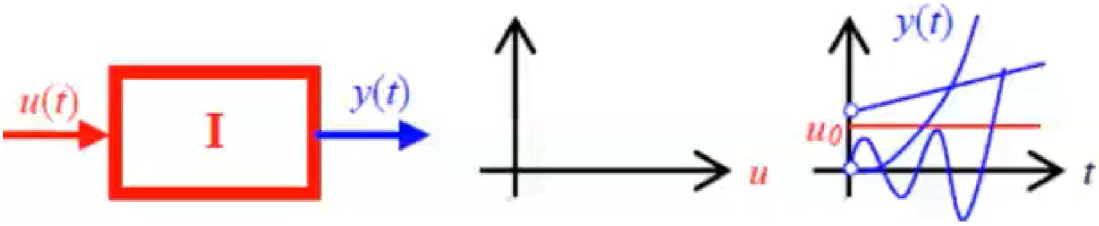
Van egy bemenő és egy kimenő jele. Úgy viselkedik, hogy állandó bemenetre állandó kimenő jelet állít elő (ezt a második ábra, a statikus karakterisztika írja le), viszont időben nem azonnal teszi ezt, hanem a jobb oldali ábrán látható módon, valamilyen gyorsasággal odaér és ott is marad. Ilyenekkel foglalkoztunk egész eddig, és ilyenekkel fogunk szinte kizárólag később is.

- Azért meg kell említeni, hogy vannak differenciáló jellegű tagok is:



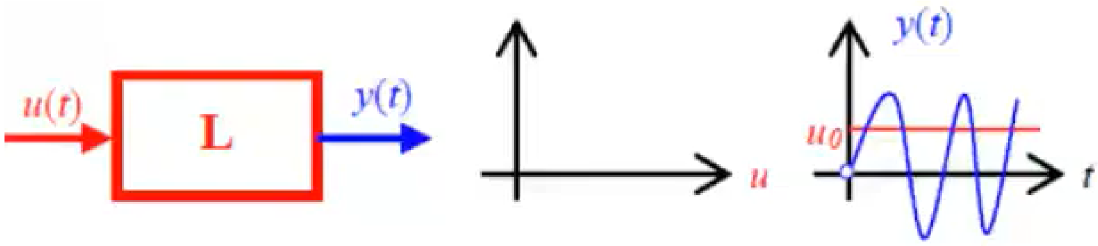
Semmiféle karakterisztika nem írható fel hozzá. Bármilyen állandó jelet is kap, a kimenet állandósult értéke mindig zérus.

- Ennek az ellentéte az integráló tag, aminek bármilyen állandó gerjesztésre végtelenbe fog tartani az értéke, valamilyen képlet alapján:



A hidraulikus erősítő és a szervomotor is ilyen tag volt, zérus bemenettel maradtak a szintjükön. Innen is látszik, hogy a tag úgy működik, hogy valamilyen módon a bemenetet folyamatosan hozzáadja a belső értékéhez, és azt adja kimenetként. Szintén nincs statikus karakterisztikája, mert nem tud állandó értéket adni semmilyen állandó bemenetre.

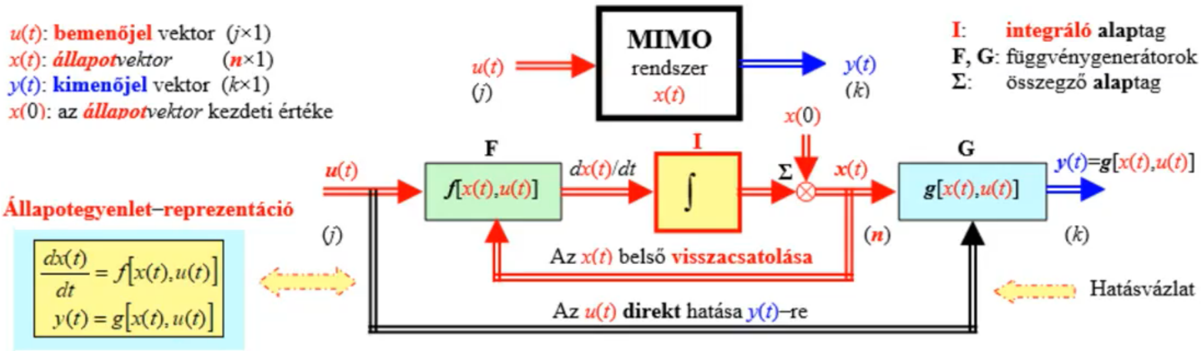
- Az utolsó tag is statikus karakterisztikától mentes, de ő állandó bemenetre már be sem áll sehova, csak oszcillál, de legalább nem lő ki a végtelenbe, ő a lengő tag:



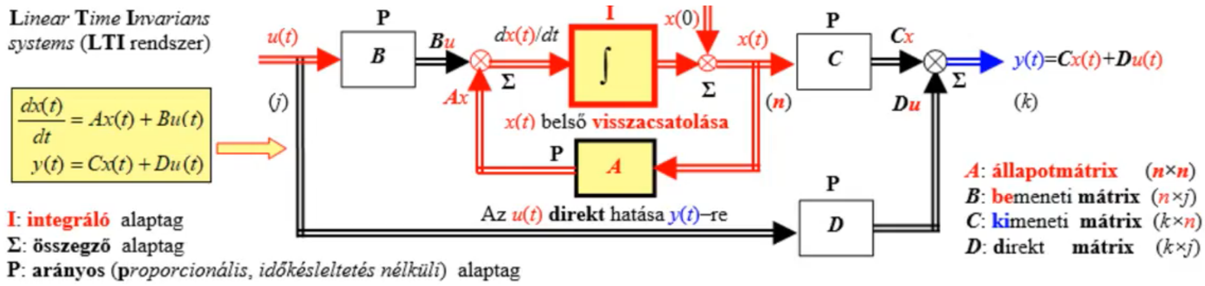
6. előadás

Az előző előadás teljes összefoglalása 63 percen keresztül nagyon jó elbeszélésben megtalálható az előadásfelvétel elején.

Dinamikus rendszerek matematikai modelljei



- Innen igazából már mindent ismerünk, próbáld meg leírni az ábrát. A megoldás így szól: a MIMO rendszer egy j darab bemenetű, k darab kimenetű, n állapotváltozós tag. Az állapotvektornak (ami az állapotváltozók összessége), van egy kezdeti értéke ($x(0)$). Ezek az állapotváltozók időben változnak, amikhez felhasználja a korábbi értékeit és a bemenetet is valamilyen szorzóval. Látható, hogy az állapotváltozók az $x(t)$ jelként jelennek meg a hatásvázlaton, és ezeket a bemenőjel ($u(t)$) vektorával együtt valamilyen függvény szerint az F tag átalakítja, majd kiadja az időbeli változását az állapotváltozóknak ($dx(t)/dt$), és ezt hozzáadja a jelenlegi értékükhöz (ez I, azaz az integráló alaptag). Innen már csak G-t kell leírni, ami az állapotváltozók jelenlegi értékét és a bemenőjelet valamilyen függvény alapján kifejezi kimenetté.
- Hogy miért szerepel külön bemenetként $x(0)$? Mert ami számokat az I összeadogat folyamatosan, azt írja le, hogy az elmúlt időben mennyit változott $x(t)$. Tehát hogy az állapotvektor t-beli értékét megkapjuk, miközben a tag csak a változását jegyzi meg, hozzá kell adnunk a kezdeti értéket is.
- Ha a rendszerünk lineáris, vagyis minden függvénye szorzásokban és összeadásokban leírható, nagyon leegyszerűsödik a dolgunk:



- Innen is ismerünk mindent: A az állapotmátrix, ami az állapotvektort módosítja saját maga alapján, ehhez hozzáadódik a bemenet B-szerese, ami a bemeneti mátrix. Ugyanaz kerül az integráló tagba, mint az előző példában, csak már a hatásvázlaton is két szorzat összegeként látjuk. Ugyanez a kimenet, ahol a C (kimeneti mátrix) az állapotváltozók szorzatát, D (direkt mátrix) pedig a bemenet szorzatát állítja elő, ezek összege a kimenet.
- A $dx(t)/dt$-t hívják még néha állapotsebességnek is, mert időbeli változást ír le.

- Kauzalitás tétele: a rendszer akkor kauzális, ha a kimenet létrehozásában u-nak csak az a komponense vesz részt, amelyik nem előzheti meg a kimeneti jelet. Magyarul nem volt jele azelőtt, hogy a rendszer bekapcsolt volna.
- A lineáris rendszerre már érvényes a szuperpozíció elve, míg a nemlineárisra nem. Ez mindössze annyit jelent, ha ismerjük egy bemenet és egy állapotvektor melletti kimenetet, és egy másik ilyen bemenet-állapotvektor párra is, akkor a kettő összege azt a kimenetet fogja adni, mintha a kimenetüket összeadtuk volna.
- Ez a rendszer lineáris időinvariáns. Ez azt jelenti, hogy amikor kezdem a bemenetet, akkor jelenik meg a kimenet is. Ha $t = 2.5$ másodpercnél adok rá jelet, akkor a kimenet is $t = 2.5$ másodpercnél kezd el nem zérus számokat mutatni.
- Természetesen itt is az a kérdés, hogy ha ismerünk minden kezdeti elemet, a mátrixokat, a gerjesztést, és a kezdeti állapotvektort, akkor hogyan változnak időben az állapotváltozók és a kimenet?
- Kifejthetjük a rendszer reprezentációját a mátrixokat behelyettesítve:

Koordinátás alak→

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A(n\times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}}_{B(n\times j)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}}_{C(k\times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1j} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{k1} & \cdots & d_{kj} \end{bmatrix}}_{D(k\times j)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

Mátrix alak→

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Itt annyit látunk, hogy az állapotváltozók időbeli változását leíró sor n darab elsőrendű differenciálegyenletet tartalmaz. Egyszerűen összeadja x-ek és a-k szorzatait, illetve b-k és u-k szorzatait, egy egyenletben egy-egy sornyi a-t és b-t felhasználva, tehát egyszerű összeadásokról és szorzásokról beszélünk az időbeli változásban. Egy-egy sor így néz ki mind a deriváltak közül, mind a kimenetek közül:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + \cdots + a_{ii}x_i(t) + \cdots + a_{in}x_n(t) + b_{i1}u_1(t) + b_{i2}u_2(t) + \cdots + b_{ii}u_i(t) + \cdots + b_{ij}u_j(t)$$

$$y_i(t) = c_{i1}x_1(t) + c_{i2}x_2(t) + \cdots + c_{ii}x_i(t) + \cdots + c_{in}x_n(t) + d_{i1}u_1(t) + d_{i2}u_2(t) + \cdots + d_{ii}u_i(t) + \cdots + d_{ij}u_j(t)$$

- Logikus, hogy ha az állapotváltozók változását le tudjuk írni deriváltként, akkor erre egy határozott integrált felírva 0-tól t-ig megkaphatjuk, mi $x(t)$ konkrét értéke. Ezt alapból nehéz kiszámolni, de valaki már Laplace-transzformálta és visszaszámolta nekünk:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad \text{és} \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) = C\left[e^{At}x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] + Du(t)$$

- Ezt a matlab az **`lsim(A, B, C, D, u, t, x0)`** függvénnyel rajzolja ki grafikusan, visszaadja y változását, az idő változását, és x változását is. Az **`lsim`** azt jelenti, hogy linear simulation.
- Technikailag ez a felírás az egész mátrixos felírás megoldóképlete. Használ olyan dolgokat, amik miatt nem adják feladatnak, pl. e-t hatványoz mátrixokkal. Egyedül akkor lenne bármilyen realitása kézzel, ha egyetlen eleme van x-nek, tehát A skalár.
- Itt is fel lehet tenni a kérdést, hogy állandó bemenetre lesz-e állandó kimenet, vagyis a rendszer stabilis-e. Akkor lesz az, ha a következő létezhet:

$$A * x_0 + B * u_0 = 0 \rightarrow \frac{dx_0}{dt} = 0$$

$$y = C * x_0 + D * u_0$$

Ilyenkor:

$$A * x_0 = \ - B * u_0$$

Viszont a mátrixalgebra szabályai szerint mátrixszal osztani nem lehet, így A máshogy megy a másik oldalra, láttunk már hasonlót:

$$A^{-1} * A * x_0 = \ - A^{-1} * B * u_0$$

$$I * x_0 = \ - A^{-1} * B * u_0$$

$$x_0 = \ - A^{-1} * B * u_0$$

- Azt még fontos megjegyezni, hogy azért jelenti ez a képlet, hogy stabil a rendszer, mert ha $\frac{dx_0}{dt} = 0$, akkor az integrátorban semmilyen változás nem történik, tehát x_0 konstans marad. Mivel a bemenetről előre eldöntöttük, hogy konstans, és a kimenet az állapotvektor és bemenet függvénye, az is konstans lesz, mert minden más szorzó (C és D mátrix) is konstans.
- A megoldóképlet $x(0)$-szerinti részét úgy hívják, hogy sajátmozgás (mert az integrátor a saját bemenetét integrálja, az $u(t)$-től függő részét pedig úgy, hogy gerjesztett mozgás (mert csak a gerjesztéstől függ), és a szuperpozíció elve miatt össze szabad őket adni, mert egyik a csak bemenet alapján számított kimenet, másik a csak állapotvektor alapján számított kimenet, és ebből a kettőből áll össze a rendszer.
- SISO-ban a dolgunk sokkal könnyebb:

A2/2. ábra. **Lineáris SISO** rendszer **állapotegyenlet–reprezentációja** és hatásvázlata

- Mivel egyetlen bemeneti értéke van, ezért D mátrix 1x1-es, tehát egy d skalárt használunk, B bemeneti mátrix egy oszlopvektor, hogy az egyetlen bemenetből minden állapotváltozó külön kezelhető legyen, C pedig egy sorvektor, hogy azt az állapotvektorral szorozva egy skalárt kapjunk, amit hozzá lehet adni $d * u(t)$-hez.
- A teljesen vastag vonalak jelzik a skalárokat, az “üregesek” pedig a vektorokat.
- A korábban felírt képletek is drasztikusan egyszerűsödtek. Természetesen egy MIMO rendszer képletével is le lehet írni a SISO-t, de könnyebben dolgozunk így:

Koordinátás alak→

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A(n\times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}}_{B(n\times 1)} u(t)$$

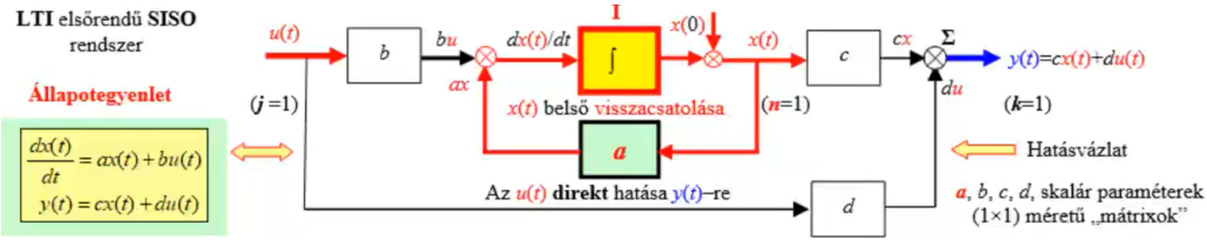
$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \end{bmatrix}}_{C(1\times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{d}_{D(1\times 1)} u(t)$$

Mátrix alak→ $\boxed{\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}}$

- Itt pontosabban látszik, hogy a kimenet csak akkor lehet skalár, ha egy sorvektort (ez a C) szorzunk az állapotvektorral, ami egy oszlopvektor.
- Van egy még egyszerűbb verziója az egésznek, amikor az állapotváltozók száma is 1. Ezt hívják úgy, hogy elsőrendű lineáris SISO rendszer. Ott már mátrixok sincsenek, és az egyensúlyi állapot is egy sima egyenlet:

$$x(t)_{t=\infty} = x_0 = -a^{-1}bu_0 = -(b/a)u_0 = \textbf{állandó}$$
$$y(t)_{t=\infty} = y_0 = cx_0 + du_0 = (-ca^{-1}b+d)u_0 = (-cb/a+d)u_0 = \textbf{állandó}$$

- A hatásvázlat is még egyszerűbb, minden vonal tömör:



- Itt már a megoldóképlet is barátságos:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \qquad y(t) = cx(t) + du(t) = c\left[e^{at}x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right] + du(t)$$

- Ha u_0 konstans, akkor már tényleg nagyon egyszerű a megoldóképlet:

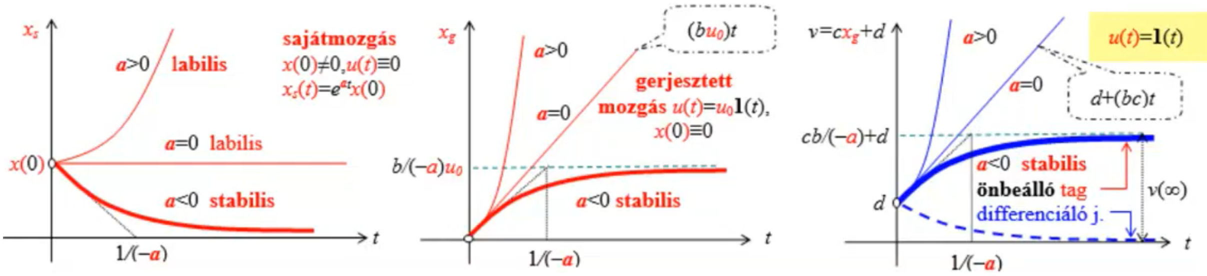
$$x_g(t) = \int_{\tau=0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu_0 d\tau = e^{at}\int_{\tau=0}^{t} e^{-a\tau}d\tau\, bu_0 = e^{at}\left(\frac{1}{-a}e^{-a\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\right)bu_0 = \frac{b}{-a}e^{at}\left(e^{-at}-1\right)u_0 = \left(\frac{b}{-a}\right)\left(1-e^{at}\right)u_0$$

2 stabilitás 2 vizsgálat

- Egy dolog nagyon fontos a hatásvázlaton, hogy mikor lehet stabil a rendszer. Gondoljuk végig az a értékeire.
  - Ha $a > 0$, akkor az integrátor folyamatosan megkapja a saját értékét, és ezt az egyre nagyobb számot adja hozzá, tehát exponenciálisan nő minden határon túl. Ez labilis.
  - Ha $a = 0$, akkor az integrátor nem kapja meg egyáltalán $x(t)$-t, viszont $u(t)$-t igen, amit folyamatosan összeadogat, egyre többet, és lineárisan, de szintén minden határon túl nő. Ez is labilis.
  - Ha $a < 0$, akkor az integrátor értékéből folyamatosan kivonja az állapotváltozók valahányszorosát, így biztos nem lő ki a sztratoszférába. Azt

bizonyítottuk ezzel az elmefuttatással, hogy a stabil rendszer a értéke biztos negatív.

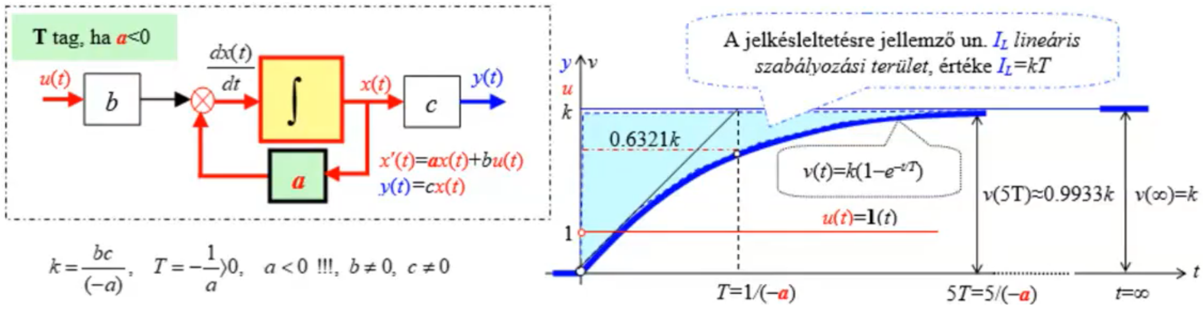
- ○ Szemléltethetjük grafikusan is, hogy a sajátmozgás, a gerjesztett mozgás külön-külön és együtt is csak $a < 0$ esetén stabilak:



- A jobb oldali ábrán a gerjesztő jelünk konstans 1, de csak időben 0-tól, tehát ismét egy Heaviside-függvénnyel van dolgunk. A vastag kék görbét, vagyis erre a gerjesztésre adott választ úgy hívjuk, hogy **átmeneti függvény**. Ha az átmeneti függvény beáll valahová, a rendszer stabilis, ha végtelenül növekszik, akkor a rendszer labilis.
- Gondoljunk bele a SISO helyzetébe ugyanebben a témában: az egyáltalán nem jó gondolatmenet, hogy az állapotmátrix minden eleme negatív legyen. A sajátértékeket kell vizsgálni, azoknak kell mindnek negatívnak lenni. Egy $n * n$-s mátrixnak n sajátértéke van, mind negatív kell legyen, hogy stabil rendszert kapjunk.

Egy energiatárolós arányos tag

- Az elsőrendű SISO rendszernek egy speciális esete, jele: T.
- Egyszerűen annyit jelent, hogy nincs direkt hatás, vagyis a bemenőjel nem adódik közvetlenül a kimenethez:



- Ilyenkor $a < 0$ esetén a teljes rendszer ugrásválasza (vagyis ha a bemenetre Heaviside-függvényt kapcsolunk, az arra megjelenő kimenet) egy exponenciális függvény lesz.
- Ez egy arányos tag, mert adott bemenetre adott kimenetet állít elő, csak az valamilyen késleltetéssel jelenik meg a bemenet és a kimenet között. Ez a késleltetés időben $1/(-a)$ ponton lesz. Nyilván nem valódi késleltetésünk van, mert az algebrai képletekkel nem lehetséges, hanem azt hívjuk késleltetésnek, amikor egy olyan pontot ér el a kimenet, ami már kb. az, amit el szerettünk volna érni. Ezt a pontot a $t = 1/(-a)$-ra választottuk bemondásos alapon. Az $5/(-a)$ időpillanatban mondhatjuk, hogy szinte teljesen, de legalábbis 99.33%-ban elérte a kimenet értékét.
- Érdekesség, hogy a világoskék terület pontosan $k/(-a)$.
- Azért használtuk k-t kimenetként, mert a bemenet 1, így a kimenet, ami normális esetben a bemenet * körerősítés, most 1 * körerősítés.

- A differenciálegyenletes formája is nagyon leegyszerűsödik:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t), \quad k = (bc)/(-a) \neq 0: \quad \textit{átviteli tényező}, \quad T = 1/(-a) > 0 \quad \textit{idő állandó}$$

Stabilitásvizsgálat: Tokyo Drift

- Vegyük át újra a MIMO rendszer karakterisztikus polinomját, ami így jön ki, és az alsó képlet az:

$$K(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left| \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{I(n \times n)} - \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A(n \times n)} \right| = \left| \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}}_{(\lambda I - A)(n \times n)} \right|$$

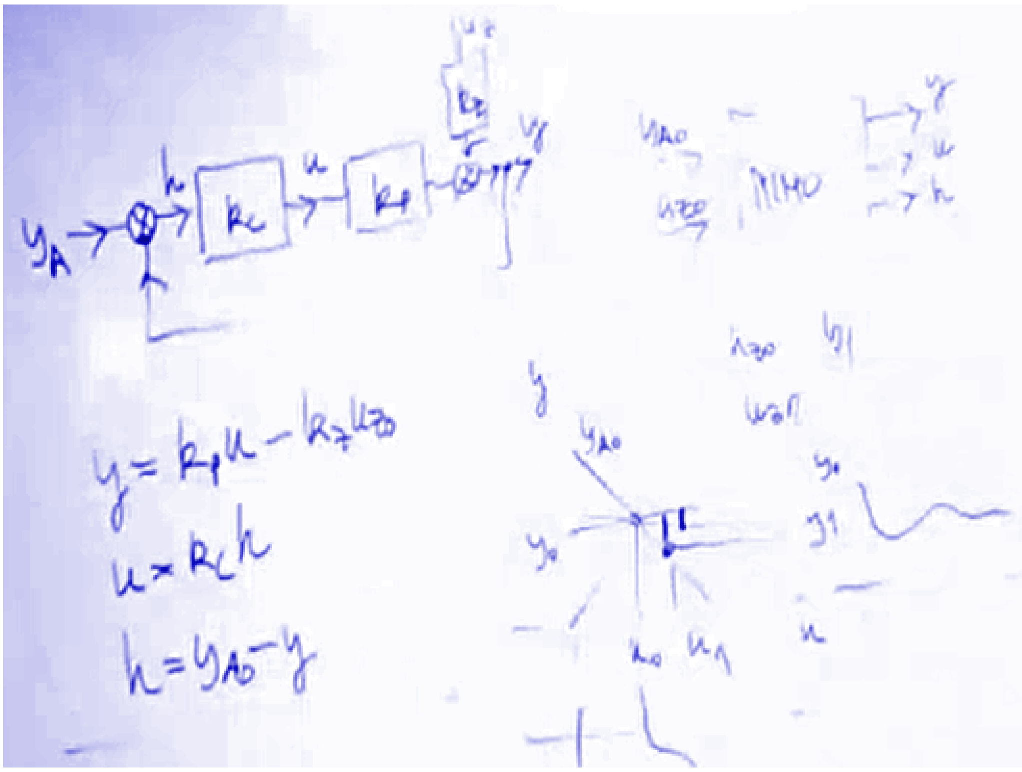
$$K(\lambda) = \lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + \cdots + h_{n-1}\lambda + h_n = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

- Amik ennek a gyökei (λ_i), azok az állapotmátrix sajátértékei. Az utolsó egyenlet bal oldala a polinom forma, a jobb oldali pedig a gyököket felsoroló forma. Ha a gyökök mind negatívok, a MIMO rendszer stabil, ugyanis összességében ez a jelenség azt írja le, hogy bármiféle értéket szorzunk a mátrixszal, mindenképp valami negatív szorzójú többszörösét adja vissza, tehát úgy viselkedik, mint amikor SISO-nál $a < 0$.
- Mivel megoldóképletet fejből mindenki csak másodfokú egyenletre ismer, emellett a harmad- és negyedfokú egyenlethez létezik, de azok több oldal hosszúak, mindig Matlabot használunk:
```
K = poly(A); % ez a karakterisztikus polinomja A-nak
lambda = roots(K) % ezek K gyökei
```
- Rövidíthető egy lépéssé ezzel a függvénnyel, ami azonnal a sajátértékeket írja ki:
```
lambda = eig(A)
```

7. előadás

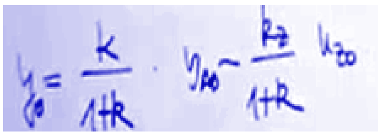
Problémafelvetés

- Vegyünk egy példát:



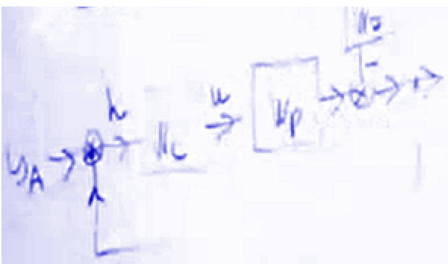
Innen mindent ismerünk. Bal felül a hatásvázlat, jobb felül felrajzoltuk MIMO tagként. Bemenetei a kívülről érkező jelek, kimenetei, amik előállnak a rendszeren belül bárhol. Bal alul az egyensúlyi pontot látjuk, jobb alul pedig a statikus karakterisztikát.

- Eddig statikus karakterisztikákon mutogattuk, hogy néz ki, ha a rendszer instabil. Ezzel csak az a gond, hogy bemutatni tudjuk rajt, de meghatározni nem.
- Tanultuk ezt is:



Ez azt írja le, hogy a körerősítés növekedésével a kimenet egyre közelebb van a bemenethez, és egyre jobban elnyomja a zavarjelet. De még mindig nem mondja el, hol van a határ, ami felett a növelése instabilitást okoz.

- A hatásvázlatban egyszerűen cseréljük ki a k-kat W-kre, hogy átviteli függvényeknek hívhassuk őket. Most formálisan csak ennyit csinálunk:



- Ezen az ábrán már minden egyenletnek a transzformáltja szerepel. Az átviteli függvény ugyanis a leírt függvények Laplace-transzformációjából áll elő, és a kimenetek és a bemenetek transzformáltjai közti kapcsolatot írják le:

$$y(s) = W_p u(s) - W_z u_z(s)$$
$$u(s) = W_c h(s)$$
$$h(s) = y_A(s) - y(s)$$

- Ami történt, hogy a jelekből függvény lett, míg eddig skalárok voltak, az erősítő szorzókból pedig átviteli függvények. Ezek is algebrai egyenletek, de nincs köze deriváláshoz.
- Linearitási tétel: Ha összegeket Laplace-transzformálsz, külön-külön kezeld őket, mint integrálásnál. A konstans szorzó is kiemelhető. Azt is tanultuk már, hogy a deriváltból egy szorzás és kivonás lesz, de azért írjuk fel újra mindkettőt:

$$\text{(1)}\quad L\{ax(t) \pm bu(t)\} = aL\{x(t)\} \pm bL\{u(t)\} = ax(s) \pm bu(s)$$
$$L^{-1}\{cx(s) \pm du(s)\} = cL^{-1}\{x(s)\} \pm dL^{-1}\{u(s)\} = cx(t) \pm du(t)$$
$$\text{(2)}\quad L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sL\{x(t)\} - x(0) = sx(s) - x(0)$$

- Még néhány fontos ismétlés, a legfontosabb transzformáltak:

$$L\{\,1(t)\,\} = \frac{1}{s}$$

$$L\{\,e^{a*t}\} = \frac{1}{s-a}$$

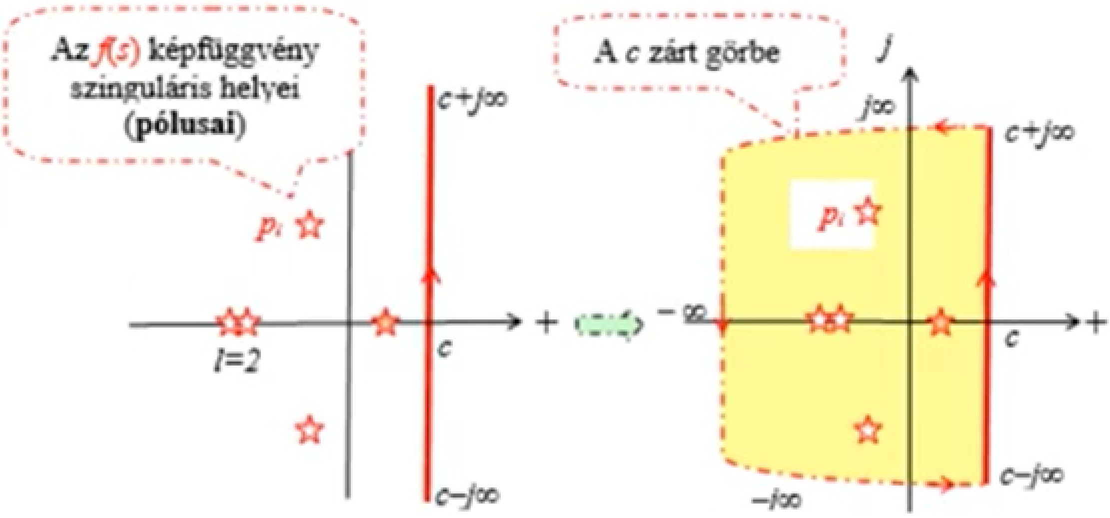
$$L\{\,sin(\omega t)\,\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

$$L\{\,k * f(t)\,\} = \; k * F(s)$$

- Ezt is értelmezzük újra:

- Bal oldalt egy **belépő** függvényt látunk. Annyit jelent, hogy időben 0-tól visszafelé mindenhol 0, utána lehet bármi.
- Jobb oldalt a pólusok és zérusok eloszlását láthatjuk a bal oldali függvénynek. Pólus az, hogy melyik értékeken nem értelmezzük (mert nullával osztás lenne belőle), a zérusok pedig azok a pontok, ahol az értéke 0. Ezek komplex értékek. A gyökök számából tudjuk, hányadfokú a függvény: hetedfokú a nevező (mert 7 pólus van), hatodfokú a számláló (mert 6 zérus van). Ezek komplex konjugált párok vagy valós gyökök. Ha kérdezik, hogy mi a **szingularitás helye**, az a pólust jelenti.

- Válasszunk egy olyan c valós értéket, ahonnan húzunk egy függőlegest, és minden pólus balra van tőle:



  Utána egészítsük ki egy zárt görbével olyan módon, hogy annak és a c egyenesnek a belsejében legyen minden pólus.
- Az egyenes menti integrál értékét a zárt görbe szabja meg. A zárt görbe integrálja a pólusokhoz tartozó rezidumok összege. Ezekből a kifejtési tétel ad időfüggvényt, egyszerűsíti az inverz transzformációt:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{M(s)}{N(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M(p_i)}{\left.\frac{dN(s)}{ds}\right|_{s=p_i}} e^{p_i t}$$

  Ezen a ponton mondta meg a tanár, hogy **képletet nem tanulunk**, csak alkalmazni kell tudni. Szerintem ezt alkalmazni se kellene.
- Korábban vettük már rendszeregyenlet transzformáltját:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1}\frac{dy(t)}{dt} + h_n y(t) = g_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + g_{m-1}\frac{du(t)}{dt} + g_m u(t) \qquad n \ge m$$

$$L\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1}\frac{dy(t)}{dt} + h_n y(t)\right\} = L\left\{g_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + g_{m-1}\frac{du(t)}{dt} + g_m u(t)\right\}$$

$$(s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1}s + h_n)y(s) = (g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1}s + g_m)u(s)$$

$$y(s) = \underbrace{\frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1}s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1}s + h_n}}_{W(s)} u(s) = W(s)u(s)$$

- Ennek az a legfontosabb része, hogy $y(s) = W(s) * u(s)$, tehát az átviteli függvény úgy adja meg a kimenetet, hogy szorozzuk vele a bemenetet. Így jön ki az átviteli függvény:

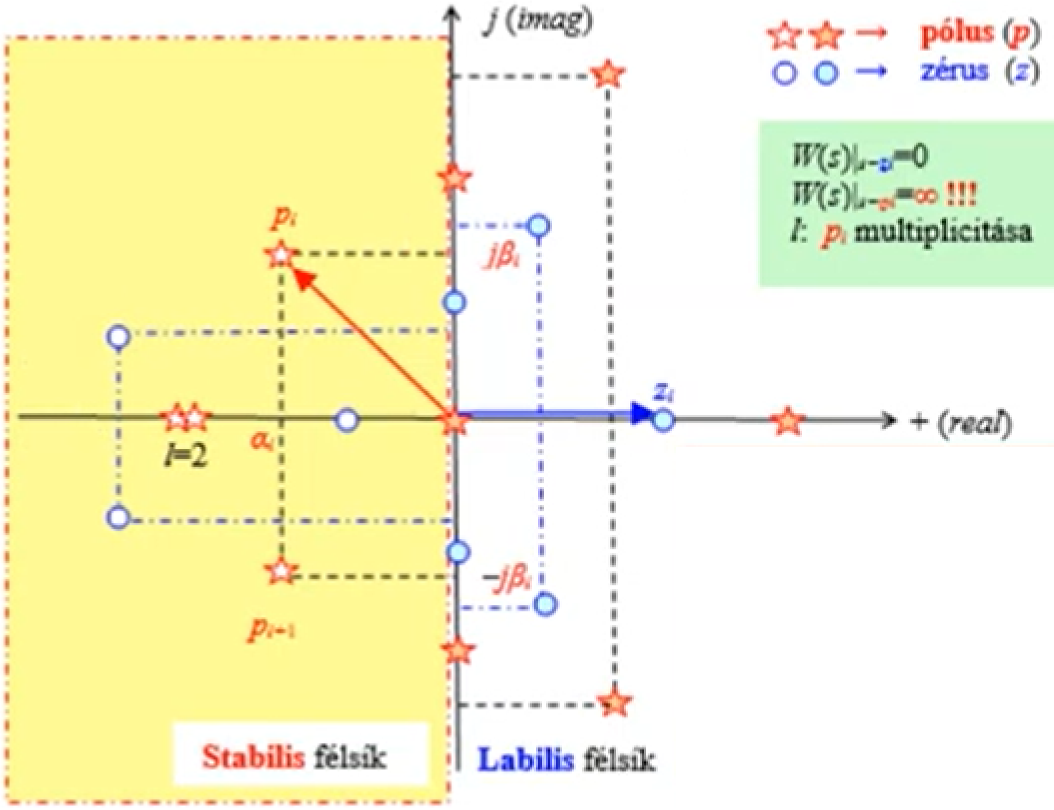
$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1}s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1}s + h_n} = \frac{y(s)}{u(s)} \qquad n \ge m$$

  Innen is az első és utolsó tag a legfontosabb.
- Vettük a különböző formákat is:

$$W(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{y(s)}{u(s)}=\underbrace{\frac{g_0s^m+g_1s^{m-1}+\dots+g_{m-1}s+g_m}{s^n+h_1s^{n-1}+\dots+h_{n-1}s+h_n}}_{\text{polinomiális alak}}=\frac{\sum_{i=0}^{m}g_is^{m-i}}{s^n+\sum_{i=1}^{n}h_is^{n-i}}=g_0\underbrace{\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}}_{\text{gyöktényezős alak}}=g_0\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=$$

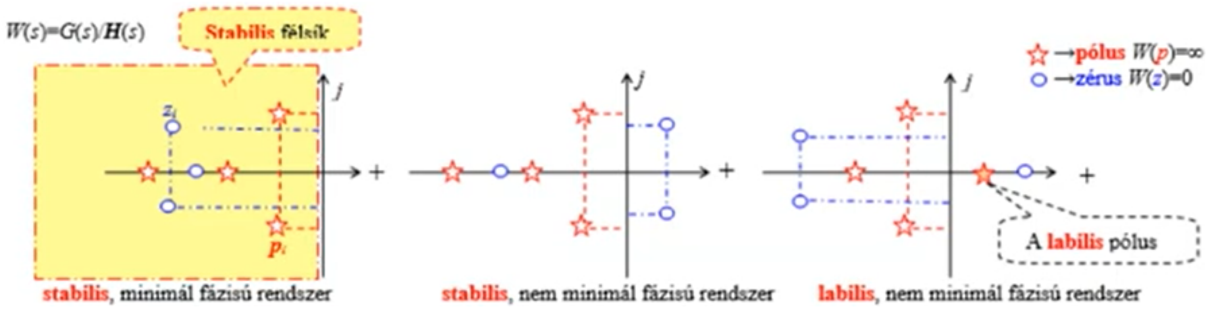
$$=\underbrace{\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\dots+\frac{r_n}{s-p_n}}_{\text{részlettörtes alak}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{s-p_i}$$

- De innen egyetlen dolog fontos: a pólusokat látjuk a nevezőben, tehát azok döntik el a rendszer stabilitását. Innentől már tudjuk is, miért a negatív valós félsík a stabilis:

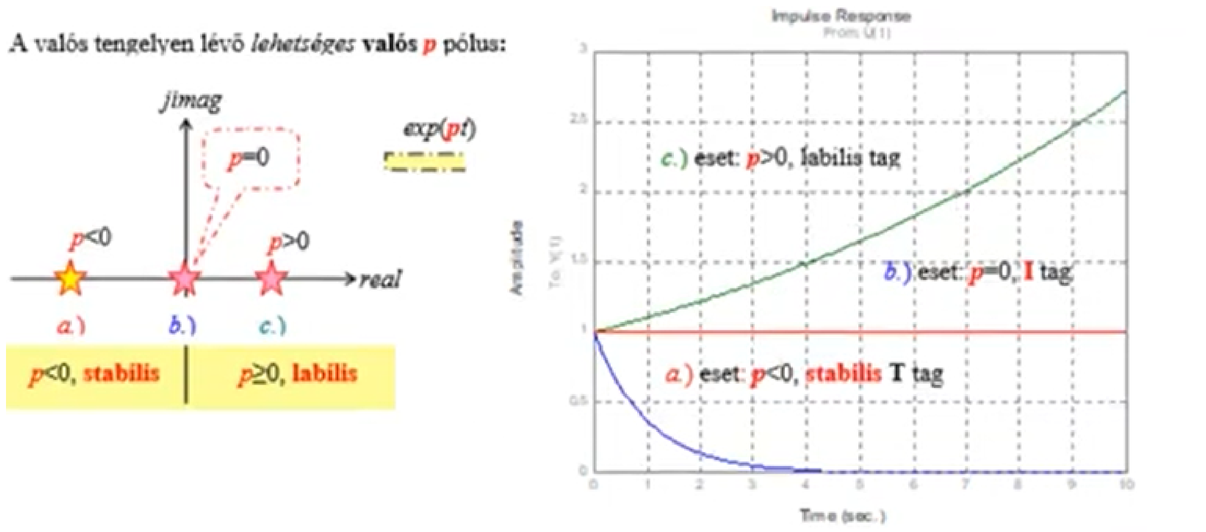


  Ugyanis ha a függvényünk csak a pozitív tartományban létezik, akkor negatív számokat kivonva belőlük semmiképp nem kaphatunk nullát. Ez a legjobb magyarázata annak, hogy mindig a negatív gyököket kell keresni és annyira jó a negatív visszacsatolás is.

- A következő ábrán csak annyi a lényeg, hogy zérus lehet pozitív valós félsíkon, nem lesz tőle labilis a rendszer, csak pólustól.

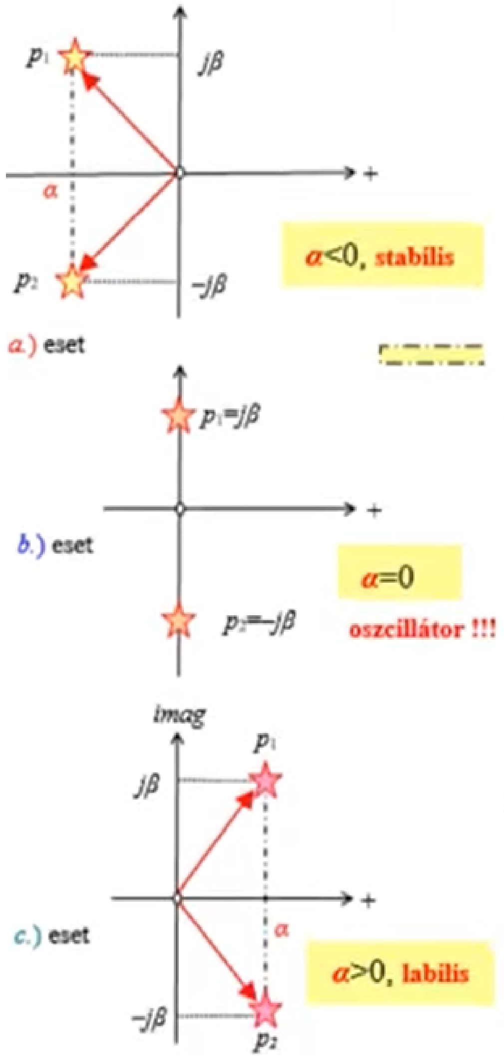


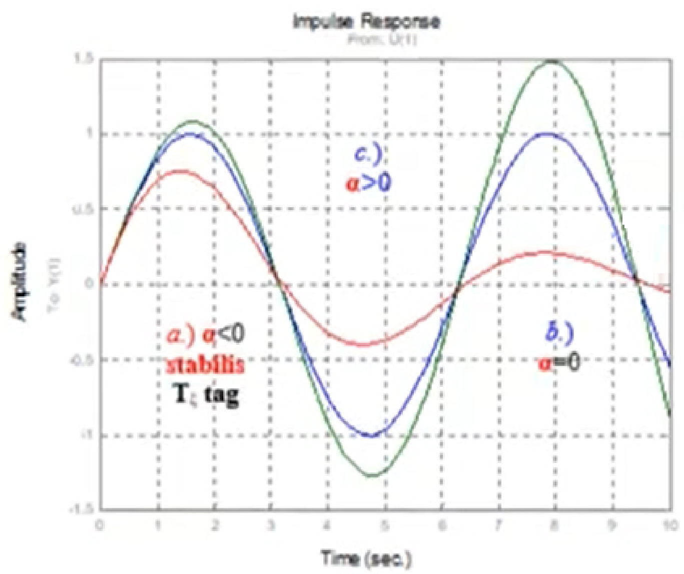
- Hogy mi az a minimál fázis, amiatt ne aggódj, nem a tárgy része.
- Lássunk arra is újra példát, hogy mi van akkor, ha egy valós pólus pozitív, 0, vagy negatív:



Különféle [*a.*) **negatív**, *b.*) **zérus** és *c.*) **pozitív**] **valós** ***p*** **pólusokhoz** tartozó **súlyfüggvények**: $w(t)=L^{-1}\{W(s)\}$

- Sosem cseng le a rendszer, ha nem negatív minden valós pólus. Ugyanez komplex tagokkal hasonló dolgot mutat, csak szinusszal:





Különféle **konjugált komplex** **póluspárokhoz** [*a.*) **negatív** valós részű, *b.*) **zérus** valós részű, *c.*) **pozitív** valós részű] tartozó **súlyfüggvények** $w(t)=L^{-1}\{W(s)\}$

- Látható, hogy csak a negatívok miatti súlyfüggvény (így hívják a felrajzolását) tart 0-ba, ami a cél lenne egy ilyen vizsgálatnál.

Állapotegyenlet megoldása Laplace-transzformációval

- Jön a finom rész, ezt számoljuk át:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Néztük, hogy kibontva n darab diffegyenlet:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A(n \times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}}_{B(n \times j)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}}_{C(k \times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{kj} \end{bmatrix}}_{D(k \times j)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

- Ezt is néztük, hogy Laplace térben mi lesz:

$$\begin{matrix} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L\left\{\dfrac{dx(t)}{dt}\right\} = L\{Ax(t) + Bu(t)\} \\ L\{y(t)\} = L\{Cx(t) + Du(t)\} \end{matrix}$$

****

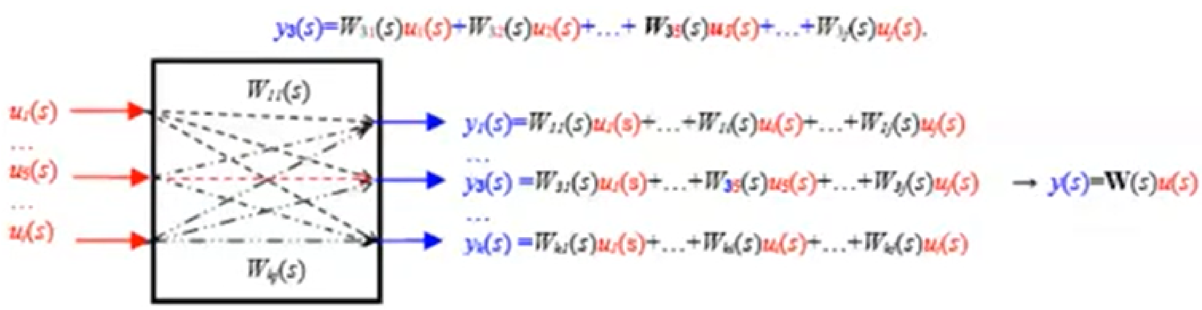
$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s) \quad \rightarrow \quad (sI - A)x(s) = x(0) + Bu(s) \quad \rightarrow \quad x(s) = (sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)]$$
$$y(s) = Cx(s) + Du(s) = C\{(sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)]\} + Du(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s) =$$
$$= C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + \mathbf{W}(s)u(s)$$

- Nyilván ezt se kell tudni levezetni, csak tudjuk, miért van. Oda kell eljutni, hogy $W(s)$ is egy mátrix, amit átviteli mátrixnak hívunk:

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) = \Phi(s)Bu(s) \quad \text{és} \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$
$$y(s) = \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]u(s) = \left[C\Phi(s)B + D\right]u(s) = \mathbf{W}(s)u(s)$$
$$\mathbf{W}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C\Phi(s)B + D$$

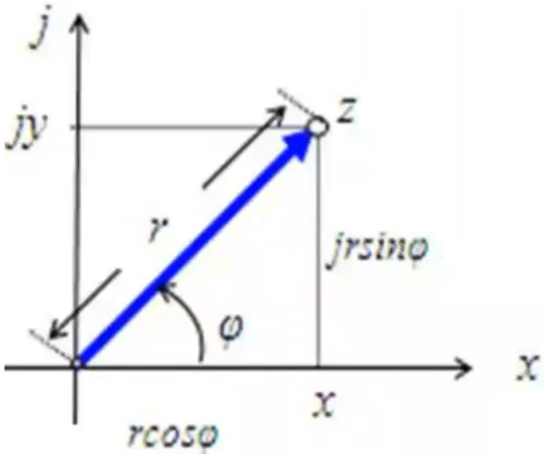
$$y(s) = \mathbf{W}(s)u(s) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1j}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2j}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{k1}(s) & W_{k2}(s) & \cdots & W_{kj}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \end{bmatrix}$$

- Felírhatunk belőle soronként minden egyes kimeneti értéket:



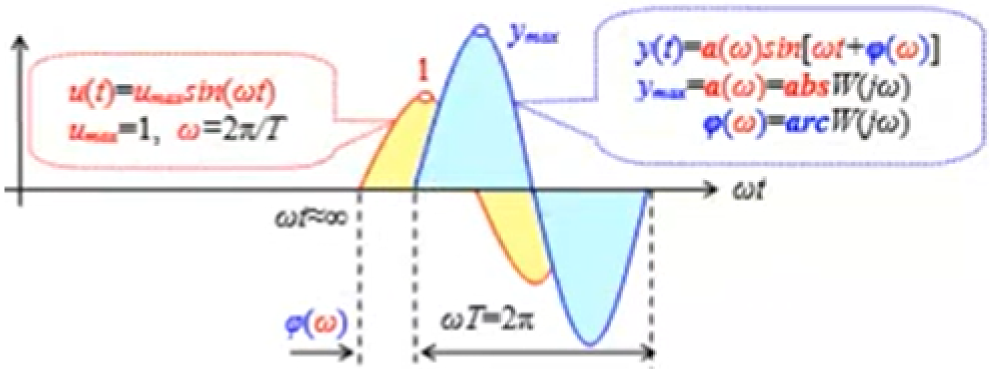
Komplex számok valódi jelentése

- Ismétlés megint! Beszéltük, hogy létezik $r * e^{j*\varphi}$ alakja a komplex számoknak. Ez azt jelenti, hogy lehet sugaruk (innentől amplitúdó) és egy elforgatásuk:



Az elforgatást hívjuk fázisnak. A továbbiakban vele fogunk dolgozni.

- A SISO tag $W(s)_{z=j*\omega} = W(j * \omega)$ frekvencia függvénye. Egyszerűen annyit jelent, hogy s-t lecseréljük $j * \omega$ tagokra, és ezzel a behelyettesítéssel számolunk.
- Egy rendszer képes úgy működni, hogy ha szinuszos bemenetet adunk rá, akkor annak frekvenciától függően módosulhat az amplitúdója (kimozdulása), a fázisa (eltolása), vagy esetleg mindkettő:



Látható, hogy az amplitúdó változott (1-ről y_{max}-ra) és a fázis eltolódott ($\varphi(\omega)$ eltolással). Már csak a jelöléseket kell értelmezni. Látjuk, hogy a bemenet egy 1 amplitúdójú 1 Hz-es jel (a frekvencia a körfrekvencia szorzója). A kimeneten két függvény jelenik meg. Az $a(\omega)$ az adott körfrekvencián az amplitúdó erősítése (ezt

$W(s)$ mondja meg, ahogy a következőt is), $\varphi(\omega)$ pedig a fázis eltolása. Ezeket a szinuszfüggvény megfelelő pontjain helyeztük el, ezt a jobb felső képlet mutatja.

- Látunk egy olyan függvényt, hogy $abs(W(j * \omega))$. Mit is csinálunk itt? Menjünk kifelé rétegenként:
  - $j * \omega$: Ez egy olyan komplex szám, aminek csak frekvenciát adtunk, egy komplex szorzóval, hogy egy felfelé mutató nyíl legyen, aminek hossza a frekvencia. Az átviteli függvény ezt valahogy megváltoztatja. Nézzük meg őt.
  - $W(j * \omega)$: Ami az átviteli függvényben egy frekvencia magas vektorral történik, az két dolog. Először is megnyújtja valamilyen hosszúra, és elcsavarja valamennyire. A hossza fogja jelenteni, hogy adott frekvencián mennyit erősít, és az elfordulás szöge fogja jelenteni, hogy mennyivel tolódik el a fázis (elvégre a fázis egy szög).
  - abs: Egy komplex szám egy vektor. Amit ez a függvény mond, az az abszolút értéke, vagyis a hossza. Ez Pitagorasz-tétellel számolható. Ha a szám $x + j * y$, akkor a hossza $\sqrt{x^2 + y^2}$.
  - arc: Ez volt a másik függvény, ami ismeretlennek tűnik. Ez egyszerűen a vektor elfordulásának szöge: $arctg(y/x)$.
  - Kézi számolásra példa (ami feladathoz túl durva, csak legyen itt):

$$3\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) \quad \rightarrow \quad W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+2}{3s+4} = \frac{G(s)}{H(s)} \quad \rightarrow \quad W(j\omega) = W(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega+2}{3j\omega+4} = \frac{G(j\omega)}{H(j\omega)}$$

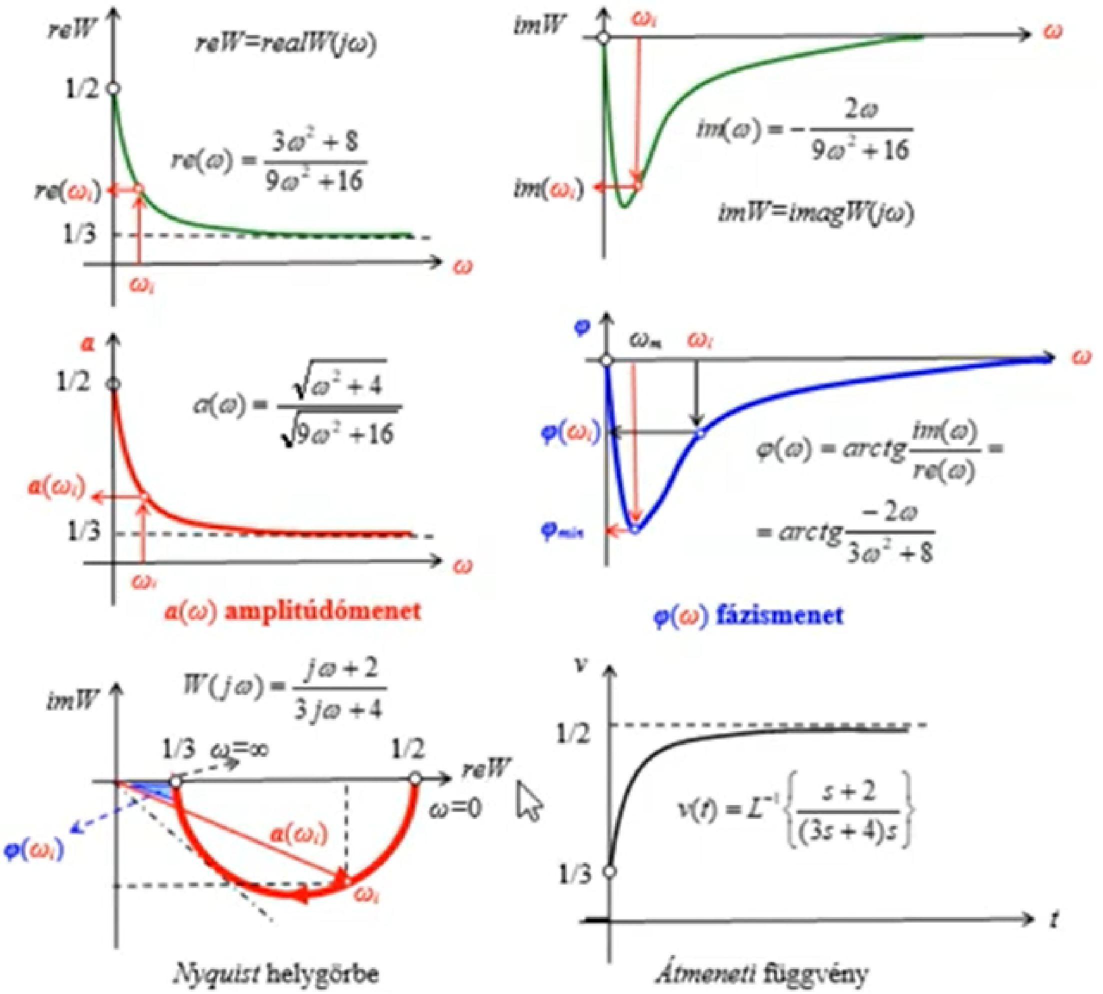
$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{j\omega+2}{3j\omega+4}\frac{(-3j\omega+4)}{(-3j\omega+4)} = \frac{8+3\omega^2+j\omega(4-6)}{4^2+(3\omega)^2} = \underbrace{\frac{8+3\omega^2}{16+9\omega^2}}_{realW(j\omega)} + j\underbrace{\frac{-2\omega}{16+9\omega^2}}_{imagW(j\omega)}$$

$$W(j\omega) = \underbrace{absW(j\omega)}_{\alpha(\omega)} e^{\overbrace{j\,arcW(j\omega)}^{\varphi(\omega)}} = \frac{|G(j\omega)|}{|H(j\omega)|} e^{j(arcG(j\omega)-arcH(j\omega))} = \underbrace{\frac{\sqrt{2^2+\omega^2}}{\sqrt{4^2+(3\omega)^2}}}_{\alpha(\omega)} e^{\overbrace{j(arctg\frac{\omega}{2}-arctg\frac{3\omega}{4})}^{\varphi(\omega)}}$$

$$\alpha(\omega) = absW(j\omega) = \sqrt{[realW(j\omega)]^2+[imagW(j\omega)]^2} = \frac{abs(j\omega+2)}{abs(3j\omega+4)} = \frac{\sqrt{\omega^2+4}}{\sqrt{9\omega^2+16}} = \sqrt{\frac{4+\omega^2}{16+9\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = arcW(j\omega) = arcG(j\omega) - arcH(j\omega) = arctg\frac{\omega}{2} - arctg\frac{3\omega}{4} = arctg\frac{imagW(j\omega)}{realW(j\omega)} = arctg\frac{-2\omega}{3\omega^2+8}$$

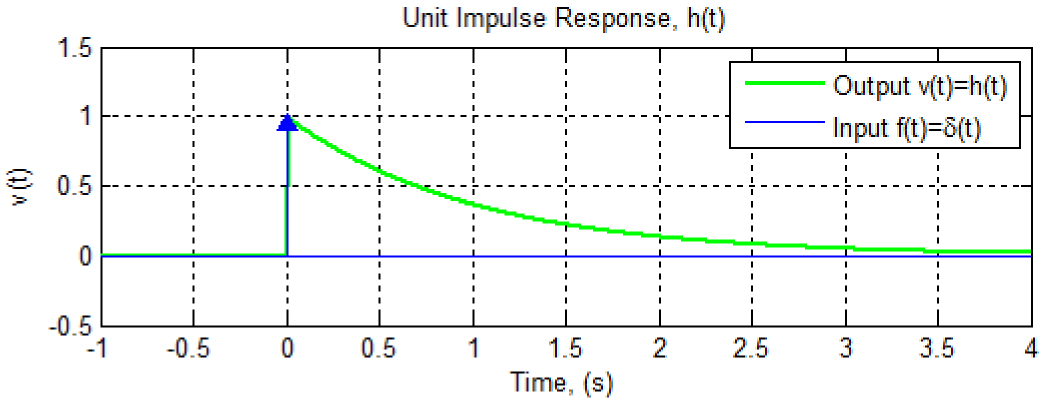
- Ha kirajzoljuk az itt megkapott függvényeket ebben a konkrét példában, már láthatunk értelmezhető dolgokat:



- A felső sor egyszerűen a valós és képzetes rész kirajzolva, nem olyan fontosak nekünk. Adott helyen ennyi és annyi a frekvencia és a fázis, ennyit mutatnak.
- Lett egy $a(\omega)$ függvény. Ez egyszerűen megmondja, hogy a neki megadott ω körfrekvencia milyen erősítést kap. Ő az amplitúdómenet bal középen.
- A fázisról is beszéltünk már, neki is van menete, tehát kirajzolható görbeként, jobb oldalt látod középen.
- Bal alul a Nyquist helygörbe már egy érdekesebb forma. A konkrét átviteli függvény lehetséges értékeit rajzolja ki a számsíkon. Azt mutatja meg, hogy miközben ω befutja a 0-tól ∞-ig tartó intervallumát, ezt a félkört jobbról balra, az amplitúdó (ami hasonlít a valós részre, mint azt láttuk) folyamatosan csökken (ezt a korábbi görbék bizonyítják), a fázis (ami hasonlít a képzetes részre) pedig egyre jobban kitér, majd újra eléri a 0-t (ezt a viselkedést is látni a korábbi grafikonokon).

Gerjesztőjelek típusai

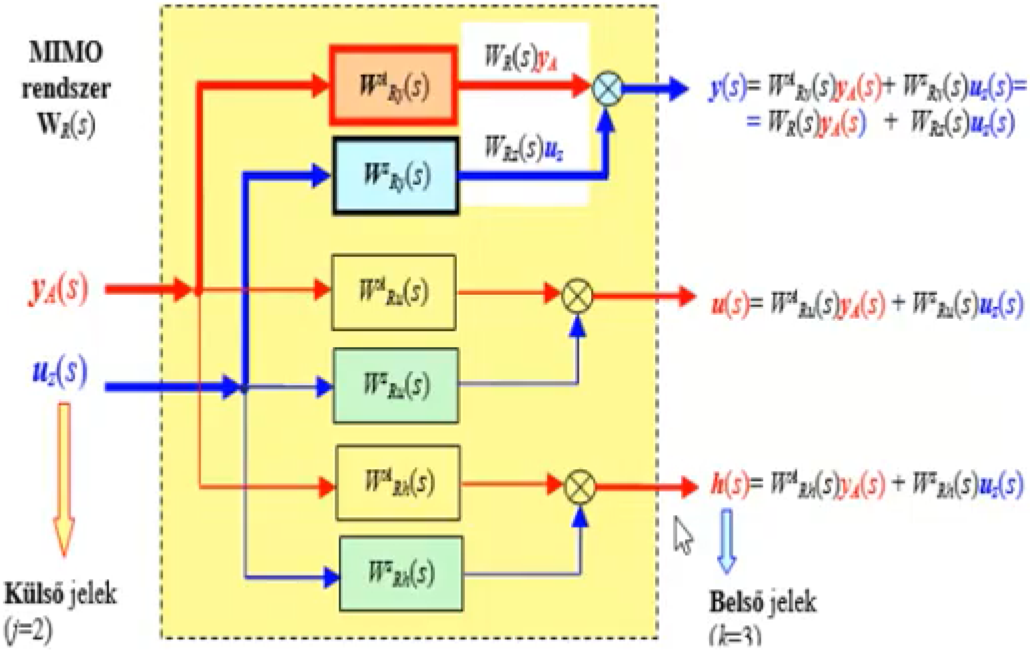
- Dirac-delta: $\delta(t)$. Ha csak egy impulzust adunk a rendszernek $t = 0$ időpillanatban, de vizsgáljuk, hogy arra időben mi a válasz, azt úgy hívjuk, hogy impulzusválasz. Súlyfüggvény néven is ismert. Valahogy így fog kinézni egy ilyen mérés:



- Kék a bemenet, zöld a kimenet.
- Heaviside-függvény: $\varepsilon(t)$. A tananyag elején végig ezzel számoltunk. 0-ról 1-re kapcsolja a bemenetet $t = 0$-ban. Amit erre válaszol a rendszer, azt hívjuk ugrásválasznak, mert a függvényt egységugrásnak is hívjuk, ugyanis egy egységet ugrott fel $t = 0$-ban.

8. előadás

- Egy kis ábra, hogy miért is MIMO minden zavarjeles rendszer:



- Minden belső jel, nemcsak a vezérlőjel, de még a hibajel is felírható a bemenetek valamilyen átviteli függvénnyel való szorzataként.

Holtidő kezelése

- Ha Laplace operátor tartományban van egy e hatványunk, az késleltetést jelent, azt már vettük. Viszont ezzel bajban vagyunk, mert nem tudjuk visszatranszformálni. Inkább közelítő függvényt alkalmazunk, ez Matlabban a `pade`:

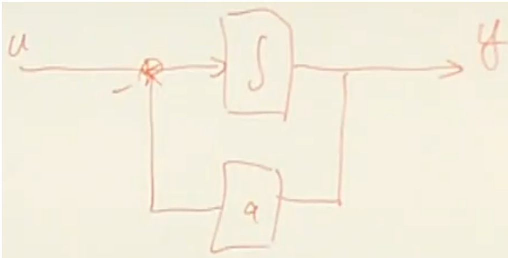
$$W_p(s)=\underbrace{\frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1}+\cdots+g_{m-1}s+g_m}{s^n + h_1 s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n}}_{G_{pT}(s)/H_{pT}(s)} e^{-sT_h} = \frac{G_{pT}(s)}{H_{pT}(s)}e^{-sT_h} \cong \frac{G_{pT}(s)}{H_{pT}(s)}\underbrace{\frac{G_h(s)}{H_h(s)}}_{\approx\exp(-sT_h)} = \frac{G_p(s)}{H_p(s)}$$

$$e^{-sT_h} \cong \frac{G_h(s)}{H_h(s)} = \frac{1-\frac{sT_h}{2}+\frac{(sT_h)^2}{10}-\frac{(sT_h)^3}{120}}{1+\frac{sT_h}{2}+\frac{(sT_h)^2}{10}+\frac{(sT_h)^3}{120}} = \frac{120-60(sT_h)+12(sT_h)^2-(sT_h)^3}{120+60(sT_h)+12(sT_h)^2+(sT_h)^3} \qquad (N=3)$$

9. előadás

1. feladat

- Vegyük ezt a rendszert:



$$\frac{dx}{dt} = ax + u$$
$$y = x$$
$$a = -0.8$$

- Helyettesítsünk be, úgy egyszerűbb:
$$\frac{dx}{dt} = -0.8 * x + u$$
$$y = x$$

- *Stabilis?*
Igen, mert $a < 0$.

- *Mi lesz az állandósult állapot egységugrás esetén?*
Ez egyszerűen annyit jelent, hogy $\frac{dx}{dt}$ beállt 0-ra, miközben u egy konstans érték, tehát nem változik tovább a rendszer:
$$0 = -0.8 * x + u$$
$$0.8 * x = u$$
Mivel egységugrásról van szó, $u = 1$:
$$0.8 * x = 1$$
$$x = 1.25$$

- Matlab megoldás
```
a = -0.8
b = 1 % mert nincs külön szorzás a bemenet és az integráló közt
c = 1 % mert nincs külön szorzás az integráló és a kimenet közt
d = 0 % mert nincs direkt jel
sys = ss(a, b, c, d) % csináljunk belőle rendszert (ss = state space)
dcgain(sys) % ez számolja ki, hogy mi történik, ha a derivált 0
step(sys) % ugyanez grafikonon, hogy mennyi idő múlva áll be ;)
```

- *Számoljunk átviteli függvényt!*
$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$-t keressük. Két képletünk van, és egyikből kell kifejezni a másikat,

hogy ez teljesülhessen, ugyanis $y(s)$ mindig $x(s)$ függvénye, és $x(s)$-ben lesz $u(s)$, tehát valahol behelyettesítés lesz.

$y = x$ Laplace-transzformáltja $y(s) = x(s)$

$\frac{dx}{dt} = -0.8 * x + u$ Laplace-transzformáltja

$s * x(s) - x(0) = -0.8 * x(s) + u(s)$

A rendszer úgy indult, hogy x-et semmi nem piszkálta korábban, ezért $x(0) = 0$, tehát ezt a tagot elhagyhatjuk.

$s * x(s) = -0.8 * x(s) + u(s)$

$s * x(s) + 0.8 * x(s) = u(s)$

$x(s) * (s + 0.8) = u(s)$: használjuk az $y(s) = x(s)$ képletet, emiatt sima behelyettesítés:

$y(s) * (s + 0.8) = u(s)$

$\frac{y(s)*(s+0.8)}{u(s)} = 1$

$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s+0.8} = W(s)$

- *Számoljuk ki a rendszer a válaszát!*
  Ez annyit jelent, hogy $y(t)$-re vagyunk kíváncsiak, ami az inverz Laplace-transzformáltja $y(s)$-nek. Ezt ki tudjuk már fejezni. A gerjesztés ($u(s)$) még mindig egységugrás, ennek tudjuk, hogy a Laplace-transzformáltja $\frac{1}{s}$, tehát:

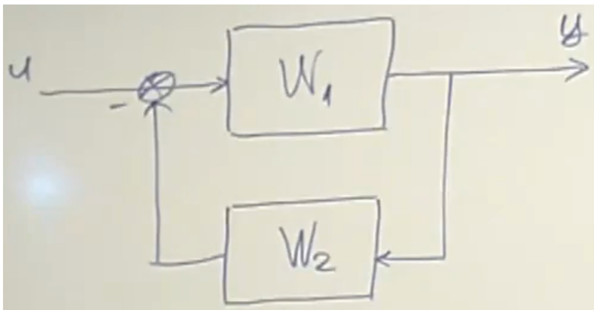
  $y(s) = \frac{1}{s+0.8} * u(s)$

  $y(s) = \frac{1}{s+0.8} * \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2+0.8*s}$

  Hogy a rendszer válaszát tudjuk, ezt kellene inverz Laplace-ozni. Ez viszont már csak Matlabban opció, ha leírjuk számláló és nevező vektorként, és beadjuk az **`ilaplace`** függvénynek.

2. feladat

- Vegyük ezt a rendszert:



- *Mi az átviteli függvénye?*
  W-ket látunk, ez a rendszer Laplace-térben van. Valójában $u(s)$ és $y(s)$ a be- és

kimenet, csak ez nincs felírva, mert gyorsabb volt így. Dolgozzunk is valamit, vegyük végig a lehetséges útvonalakat. Egyrészt nagyon látszik, hogy W_1-en keresztül közvetlenül eljutunk y-ba, tehát az első tagja $y(s)$ összegének $W_1 * u(s)$. A második tag már nem ennyire evidens, de egyszerű. Az y jel negatívan visszacsatolódik W_1 szorzóra W_2-n keresztül, tehát ez a tag $-W_1 * W_2 * y(s)$ lesz. Rakjuk össze:

$y(s) = W_1 * u(s) - W_1 * W_2 * y(s)$

Rendezzük tovább, mert $y(s)$ pontos függvénye kell:

$y(s) + W_1 * W_2 * y(s) = W_1 * u(s)$

Emeljük ki $y(s)$-t:

$y(s) * (1 + W_1 * W_2) = W_1 * u(s)$

És $u(s)$-re osztással elő is áll az átviteli függvény:

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{W_1}{1+W_1*W_2} = W_R$$

- *Legyen* $W_1 = \frac{1}{s+1}$ *és* $W_2 = \frac{1}{s+2}$*. Számoljuk ki az eredő átviteli függvényt!*

Matlab, különben itt leszünk estig:

```
s = tf('s')
W_1 = 1 / (s + 1)
W_2 = 1 / (s + 2)
Wr = W_1 / (1 + W_1 * W_2)
```

Ennek eredménye, amit a Matlab ki fog dobni:

$$W_R = \frac{s^2+3s+2}{s^3+4s^2+6s+3}$$

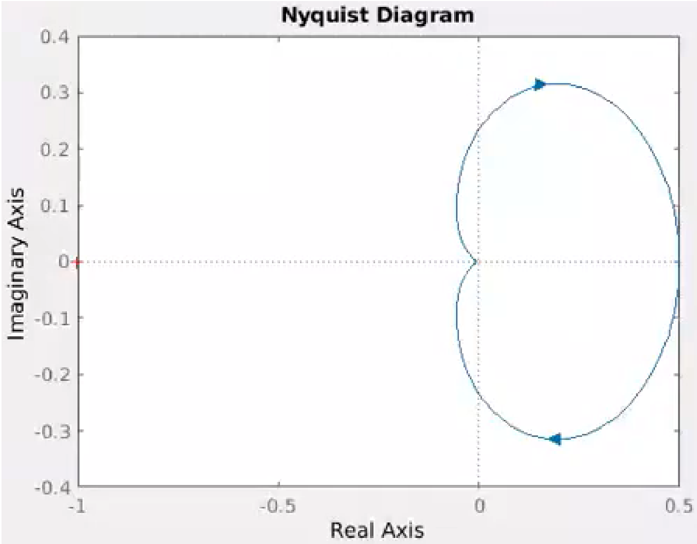
- Pár dolog tovább Matlabban, pl. hogy lesznek átviteli függvényből állapotmátrixok:

```
>> [A, B, C, D] = tf2ss( Wr.Numerator{1}, Wr.Denominator{1} )

A =

    -4    -6    -3
     1     0     0
     0     1     0


B =

     1
     0
     0


C =

     1     3     2


D =

     0
```

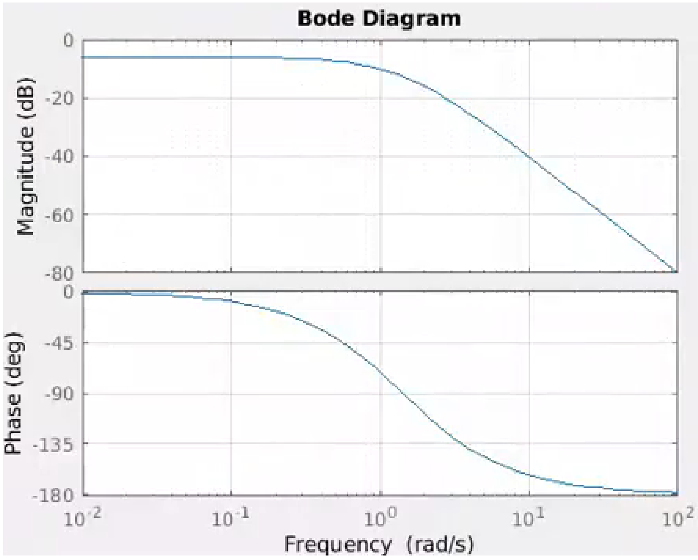
- *Stabil a rendszer?*
  Matlab megoldás egyrészt a rendszer ugrásválaszának vizsgálata:
  sys = ss(A, B, C, D)
  step(sys)
  Itt látható, hogy beállt egy konstans értékre, tehát stabil. Egy másik módszer az állapotmátrix sajátértékekeinek vizsgálata:
  eig(A)

  A sajátértékek Matlab szerint:
  $-\ 1.5\ +\ 0.866i$
  $-\ 1.5\ -\ 0.866i$
  $-\ 1\ +\ 0i$
  Mivel mind negatív, a rendszer stabil.

- *Vizsgáljunk stabilitást Nyquist és Bode alapján!*
  Itt a W_1 bemeneténél felnyitott kör átviteli függvényét kell vizsgálni, tehát mi történik a jellel, míg eljut W_1 elől ugyanoda. Egyszerűen átmegy W_1-en, majd W_2-n, és visszatér ugyanoda. Tehát egyszerűen $W_0 = W_1 * W_2$. Ezt Matlabban beadjuk a **nyquist** függvénynek, és:



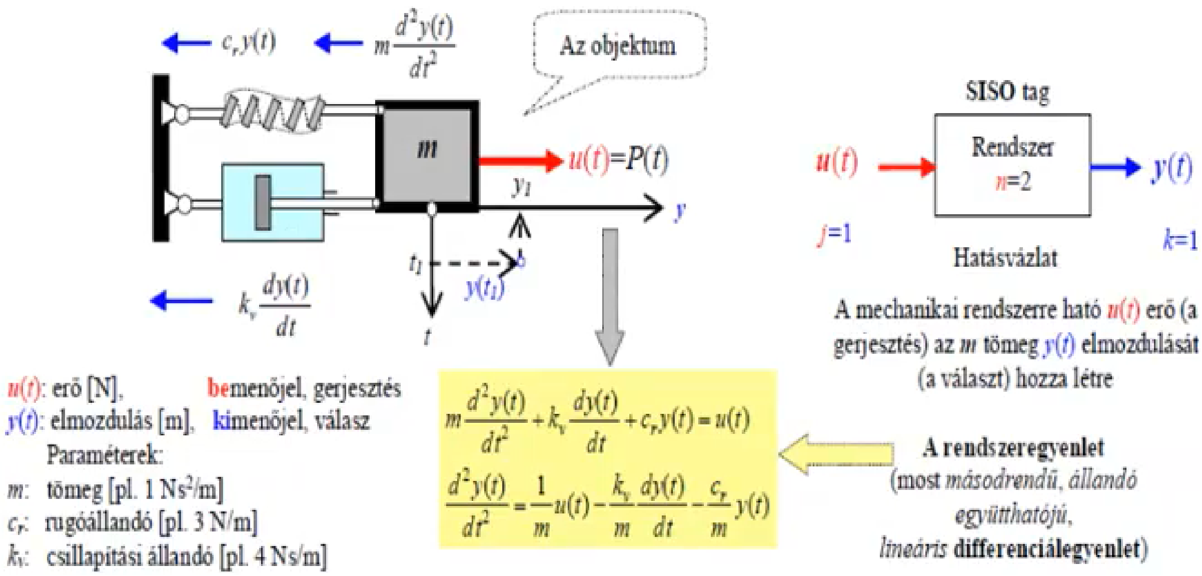
Itt csak annyit kell látni, hogy $-1+0i$ nincs a felrajzolt formán belül, így a rendszer stabil. A **bode** parancs eredménye ugyanúgy W_0 bemenetre:



Itt az a kérdés, hogy ahol a felső elkezd esni, ott az alsón $-180°$ felett vagyunk-e. Mivel igen, a rendszer stabil.

3. feladat

- Adott ez a fizikai rendszer:

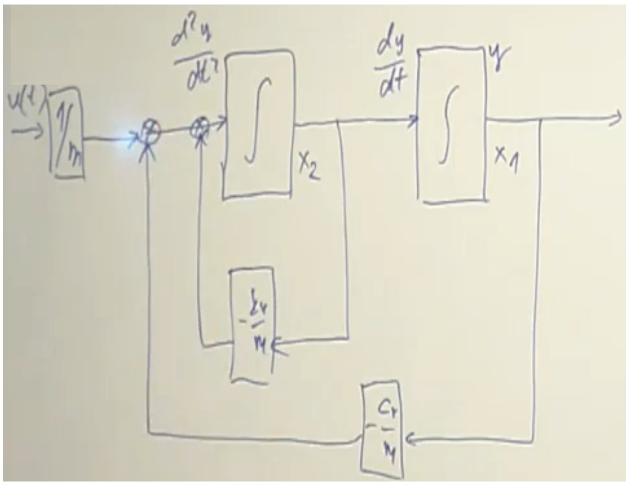


- Látni rajt, hogy egy tömeget egy rugó és egy csillapító tag is tart a bal oldalán. Ezt a tömeget akarjuk jobbra húzni egy bizonyos erővel, ez lesz a gerjesztőjel, a kimeneti jel pedig az elmozdulása a nyugalmi helyzetéből.
- A kék balra mutató nyilak a legyőzendő erők. Felül először a rugóé van felírva (amin látszik, hogy minél nagyobb az elmozdulás, annál nagyobb erőt fejt ki ellentétes irányban), tőle jobbra a legyőzendő tehetetlenség. Lent a csillapító tag hatása látszik.
- A rendszeregyenletet megkapjuk a feladathoz, az eddigi csak az értelmezése volt:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+k_v\frac{dy(t)}{dt}+c_r y(t)=u(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=\frac{1}{m}u(t)-\frac{k_v}{m}\frac{dy(t)}{dt}-\frac{c_r}{m}y(t)$$

- Az első egyenlet egyszerű, egyszerűen a három ellenerőt kell ellensúlyozni azzal, hogy helyben tartjuk a testet, tehát az összegük a gerjesztőjel.
- A második ugyanez, csak felírva másodrendű egyenletként, átrendezve a legmagasabb deriváltra.
- *Rajzoljuk fel a hatásvázlatát!*



Értelmezzük, hogy jött ez ki:

  - Egy deriválási fok egy integrátort jelent. A képletben az van, hogy y-t deriválgatjuk. Ha egy deriváltat integrálunk, csökken a fokszáma. Ezért a nagyobb fokú deriváltba fut be a gerjesztés, majd folyamatosan halad integrátorokon keresztül, amíg teljesen le nincs deriválva, és y nem lesz belőle.

  - Általában az integrátor kimenetét x jelzi, de itt több is van. Legyen az indexe az, hogy hányadik derivált integrálása, így az elsőfokú derivált integrálása lesz x_1, a másodfokúé x_2. Később látjuk majd, hogy a számozás mindegy.
  - A második képlet alapján berajzoljuk a visszacsatolásokat. Látjuk, hogy a másodrendű deriváltra van felírva, ezért oda kötjük a szorzókat. Van egy $1/m$ szorzó $u(t)$ előtt, ehhez csak egy szorzót kell berajzolni. Van egy $-k_v/m$-es visszacsatolása az elsőrendű deriváltnak, tehát az integrátor kimenetét visszacsatoljuk ekkora szorzóval. Ez egy negatív visszacsatolás, de a negatív szorzót nem kötelező az összeadóhoz írni, most a dobozba írtuk. Az utolsó tag az $y(t)$-t szorozza, vezessünk tehát onnan is egy visszacsatolást.

- *Írjuk fel az integrátorok egyenleteit!*
  Kezdjük x_1-ével, az a könnyebb. Egyetlen bemenete és egyetlen kimenete van, és igazából a hatásvázlaton is látszik, hogy az integrátor bemenete $\frac{dy}{dt}$, ezt akarjuk felírni, és az egyetlen jel, ami ebbe fut, az x_2. Ez annyit jelent, hogy $\frac{dy}{dt} = x_2$. Mivel y -nak, ami a kimenete, az x_1 nevet adtuk, ezt gyorsan cseréljük is ki. Ugyanazt fogja jelenteni, csak egységes lesz a felírás: $\frac{dx_1}{dt} = x_2$.
  A következő felírás tehát $\frac{dx_2}{dt}$-é lesz. Ezek mind ott vannak az ábrán, spóroljunk az idővel: $\frac{dx_2}{dt} = -\frac{c_r}{m} * x_1 - \frac{k_v}{m} * x_2 + \frac{1}{m} * u$. Most a rendszert fogjuk egyszerűsíteni, ezért javasolt olyan formában felírni, hogy x_1 balra, tőle a magasabbrendű deriváltak jobbra (itt csak x_2), majd végül a gerjesztés. Már csak a kimenet kell, nem túl nehéz: $y = x_1$.
- Alkossuk meg az A, B, C, D mátrixokat!
  Láthattuk, hogy ez már egy MIMO egyenlet, mert több deriváltunk van. Erre már ismertünk egy formát:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1\left(x_1(t),\ldots, x_n(t), u_1(t),\ldots, u_j(t)\right)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2\left(x_1(t),\ldots, x_n(t), u_1(t),\ldots, u_j(t)\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = f_{n-1}\left(x_1(t),\ldots, x_n(t), u_1(t),\ldots, u_j(t)\right)$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n\left(x_1(t),\ldots, x_n(t), u_1(t),\ldots, u_j(t)\right)$$

$$\Updownarrow ****************************** \Updownarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), u(t)\right)$$

Mit ad az ég, pont tudjuk így rendezni a dolgokat:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{c_r}{m} * x_1 - \frac{k_v}{m} * x_2 + \frac{1}{m} * u$$

Pótoljuk a hiányzó 0-s szorzókat, és rendezzük őket szépen:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 * x_1 \quad + 1 * x_2 \quad + 0 * u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{c_r}{m} * x_1 \quad - \frac{k_v}{m} * x_2 \quad + \frac{1}{m} * u$$

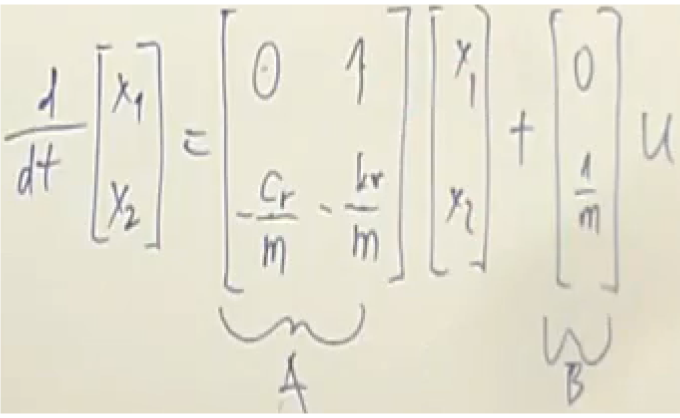
Hová fejtettük ki az előző ábra képleteit? Ide:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}}_{\frac{dx(t)}{dt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

$$\Updownarrow ** \Updownarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

Tehát x-ek szorzói adják az A mátrixot, u-k szorzói a B mátrixot, és pont olyan formában rajzoltuk fel őket, hogy ezt kiadják:



Maradt a C és D mátrix, azokat y ugyanilyen formája adja meg:

$y = 1 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * u$

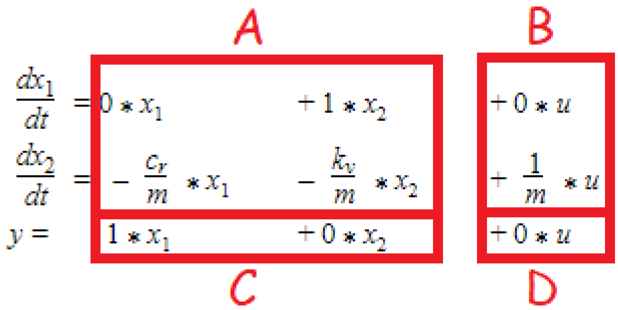
Ennek x-es szorzói adják meg a C mátrixot, a d skalárt (vagy 1x1-es D mátrixot) pedig az, hogy hányszor szorozza u-t. Vegyük át újra az egészet:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 * x_1 \quad + 1 * x_2 \quad + 0 * u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{c_r}{m} * x_1 \quad -\frac{k_v}{m} * x_2 \quad + \frac{1}{m} * u$$

$$y = 1 * x_1 \quad + 0 * x_2 \quad + 0 * u$$

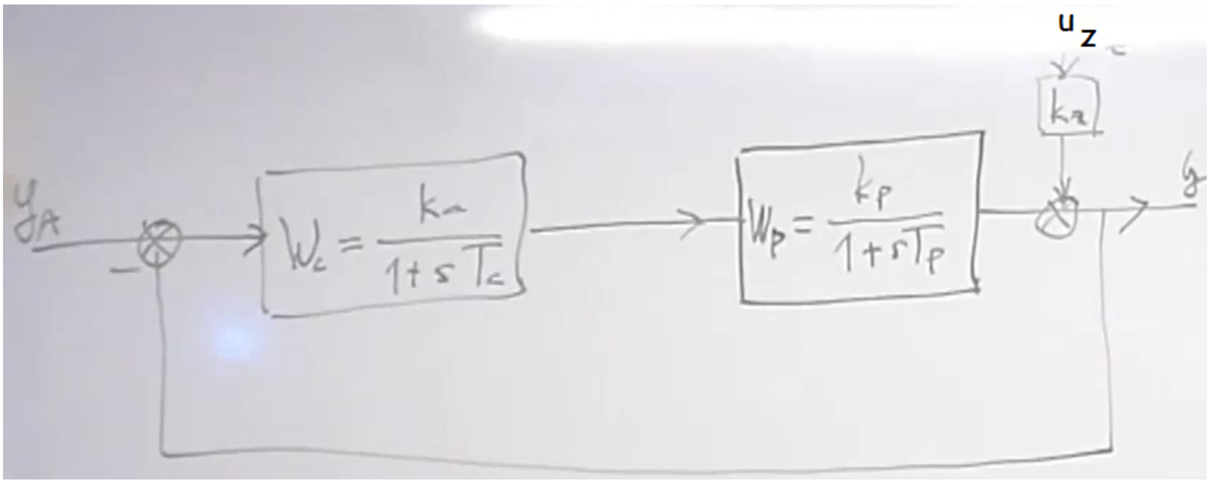
És keressük meg az Illuminati-t:



10. előadás

4. feladat

- Vegyük az alábbi hatásvázlatot Laplace-térben, amiből a cél, hogy visszatérjünk az idő szerinti térbe, és abból legyen hatásvázlat:



- *Írjuk fel W_p átviteli függvényét, írjuk fel rendszeregyenletként is!*

  Látjuk, hogy egy bemenete van, ami az irányítójel (u) lesz, a kimenete pedig y-nal lesz jelölve, de ez nem a rendszerre vonatkozó y, hanem a folyamat kimenete.

  $$y(s) = \frac{k_p}{1+s*T_p} * u(s)$$

  Az átviteli függvény csak egyszerű behelyettesítés, de a rendszeregyenlethez egy deriváltra kell kihoznunk, amihez a Laplace-térben $s * y(s)$-nek kell előállnia az egyik oldalon (tudjuk, hogy $s(0) = 0$, ezért $s * y(s) - y(0) = s * y(s)$):

  $$y(s) * (1 + s * T_p) = k_p * u(s)$$

  $$y(s) + s * T_p * y(s) = k_p * u(s)$$

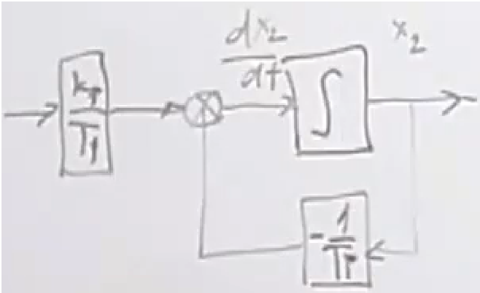
  $$s * T_p * y(s) = k_p * u(s) - y(s)$$

  $$s * y(s) = \frac{k_p}{T_p} * u(s) - \frac{1}{T_p} * y(s)$$

  Ezt tagonként már nagyon könnyű Laplace-transzformálni. A konstansok maradnak, a többire tanultunk átalakítást:

  $$\frac{dy}{dt} = \frac{k_p}{T_p} * u(t) - \frac{1}{T_p} * y(t)$$

  Ebből már fel tudunk rajzolni egy rendszert, van egy szorzó a bemenetre, és egy negatív visszacsatolás:

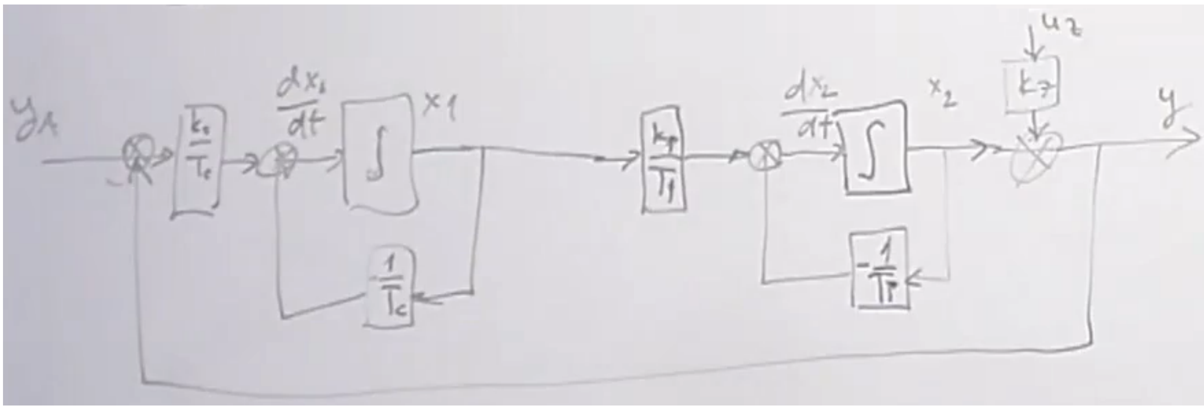


- *Írjuk fel W_C-t rendszeregyenletként!*

  Teljesen ugyanaz volt a kiinduló állapot, csak p helyett c volt a konstansok indexe:

  $$\frac{dy}{dt} = \frac{k_c}{T_c} * u(t) - \frac{1}{T_c} * y(t)$$

  A hatásvázlat is teljesen ugyanaz, inkább akkor már egészben rajzoljuk is fel a teljes rendszert:



  Igen, a táblára az előző feladathoz képest fordítva került fel x_1 és x_2. Ez szándékos, ugyanis az lenne a cél, hogy bemutassa, hogy teljesen mindegy a sorrend, mert végső soron a mátrixok szorzása ugyanarra az eredményre jut.

- *Írjuk fel az állapottér reprezentációt!*

  Ezt keressük:

  $$\frac{dx}{dt} = A * x(t) + B * u(t)$$

  $$y(t) = C * x(t) + D * u(t)$$

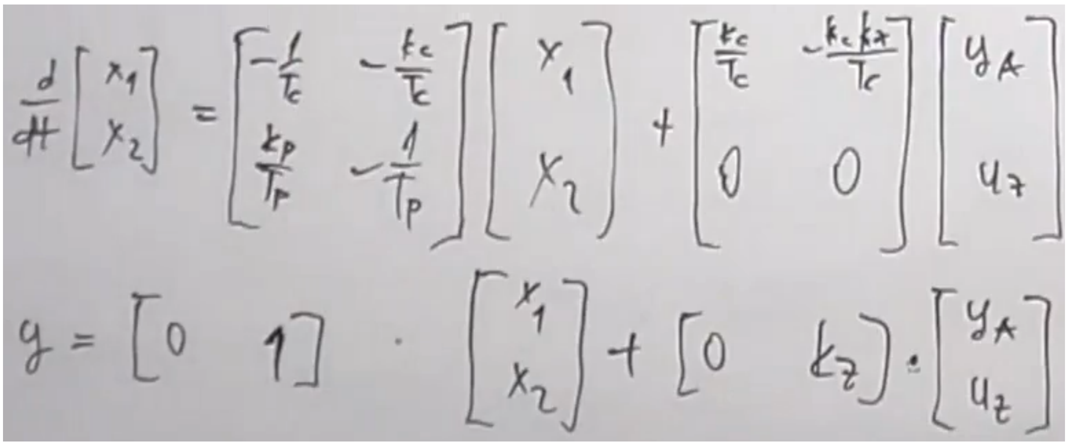
  Az előző feladat alapján már láttuk, hogy az integráló tagokra és a kimenetre kell felírni mindent. Ezt a feladatot már ismerjük, vonalakat követünk és összeadjuk a szorzókat, és olyan sorrendben tesszük a változókat, hogy a mátrixok jól jöjjenek ki.

  $$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_c} * x_1(t) - \frac{k_c}{T_c} * x_2(t) + \frac{k_c}{T_c} * y_A(t) - \frac{k_c * k_z}{T_c} * u_z(t)$$

  $$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k_p}{T_p} * x_1(t) - \frac{1}{T_p} * x_2(t) + 0 * y_A(t) + 0 * u_z(t)$$

  $$y(t) = 0 * x_1(t) + 1 * x_2(t) + 0 * y_A(t) + k_z * u_z(t)$$

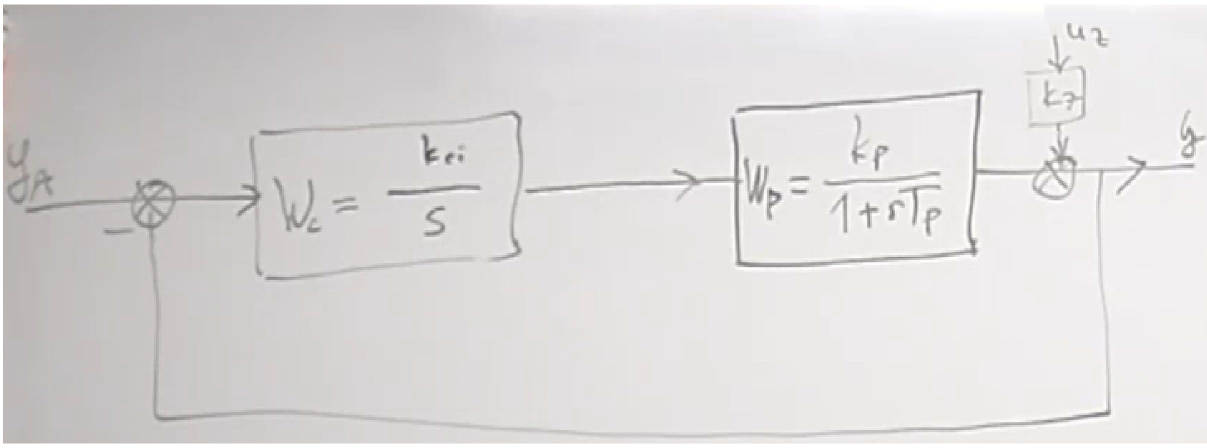
A mátrixok a felírásból simán kiolvasva tehát:



5. feladat

Alapvetően arra, hogy gyakorold az önálló munkát, mert minden volt hozzá. Csak végső megoldást írok ide.

- Vegyünk egy egyszerűbb hatásvázlatot:



- *Mik az átviteli függvények és a belőlük adódó rendszeregyenletek?*

  A szabályozóhoz:

  $$y(s) = \frac{k_{ci}}{s} * u(s)$$

  $$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_{ci}}{s}$$

  Transzformálva:

  $$s * y(s) = k_{ci} * u(s)$$

  $$\frac{dy}{dt} = k_{ci} * u(t)$$

  A folyamathoz:

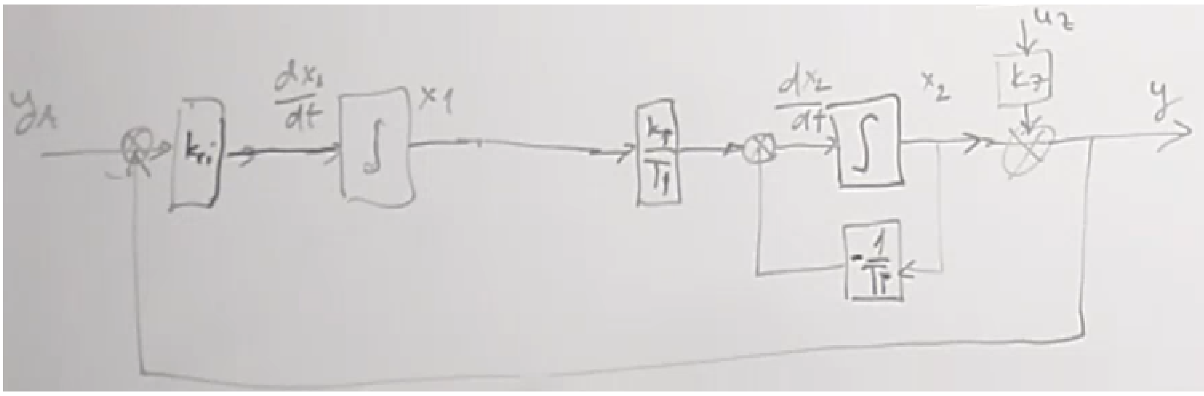
  $$y(s) = \frac{k_p}{1+s*T_p} * u(s)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{k_p}{1+s*T_p}$$

Ez az előző feladatnál volt, transzformálva így néz ki:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{k_p}{T_p}*\ u(t)\ -\frac{1}{T_p}*\ y(t)$$

- *Rajzolj belőlük hatásvázlatot!*
  Ez lesz:



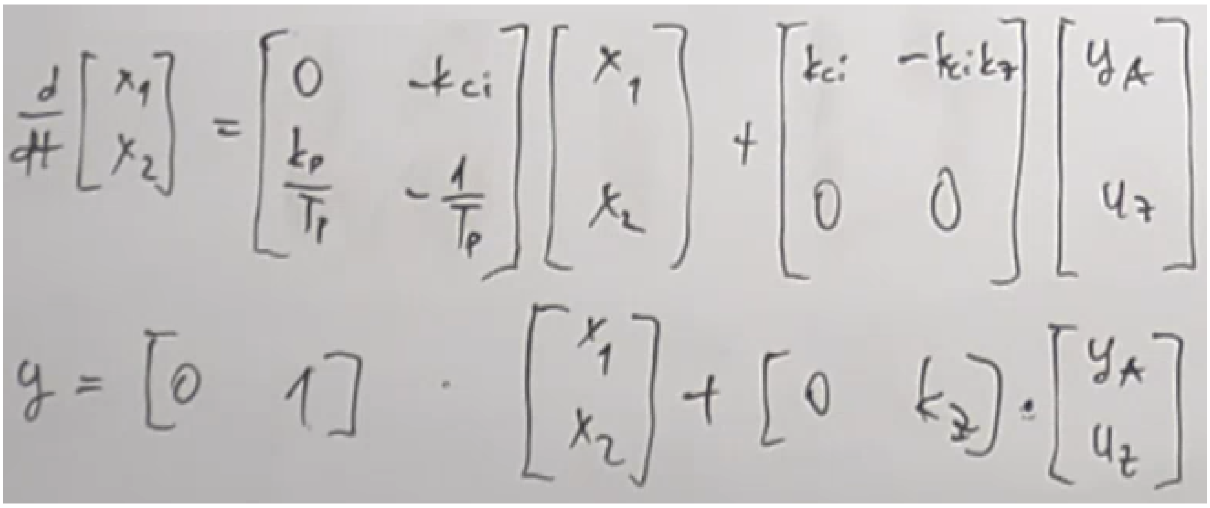
- *Írd fel a rendszeregyenleteket!*

$$\frac{dx_1}{dt}=\ 0\ *\ x_1(t)\qquad -\ k_{ci}*\ x_2(t)\quad +\ k_{ci}*\ y_A(t)\quad -\ k_{ci}*\ k_z*\ u_z(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{k_p}{T_p}*\ x_1(t)\qquad -\frac{1}{T_p}*\ x_2(t)\quad +\ 0\ *\ y_A(t)\quad +\ 0\ *\ u_z(t)$$

$$y(t)\ =\ 0\ *\ x_1(t)\qquad +\ 1\ *\ x_2(t)\quad +\ 0\ *\ y_A(t)\quad +\ k_z*\ u_z(t)$$

- *Neo halp bitte*



Hatásvázlat gyakorló feladatok

1. Rajzold fel a következő rendszert:
$$\frac{dx}{dt} = u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

2. Rajzold fel a következő rendszert:
$$\frac{dx}{dt} = 2 * u(t)$$
$$y(t) = 5 * x(t)$$

3. Rajzold fel a következő rendszert:
$$\frac{dx}{dt} = -1 * x(t) + 2 * u(t)$$
$$y(t) = 5 * x(t) + 1 * u(t)$$

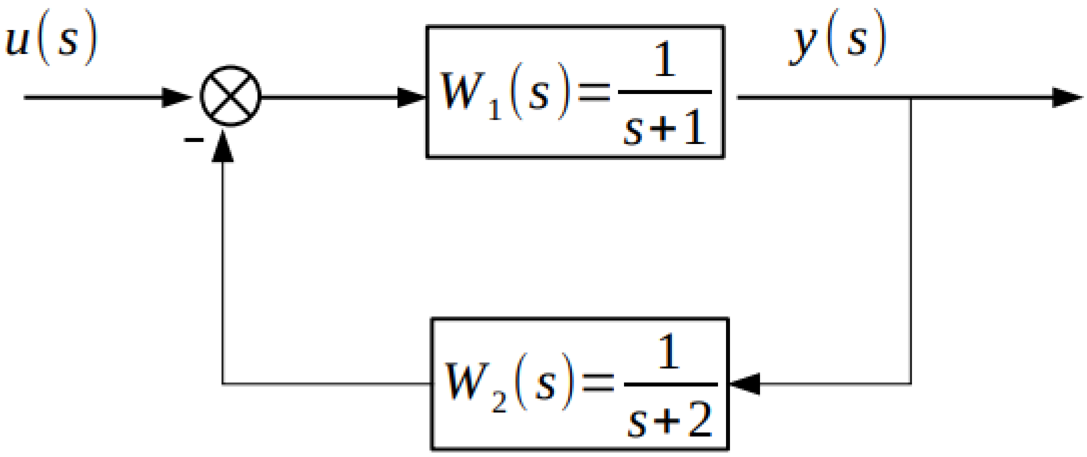
4. Rajzold fel a következő rendszert:
$$\frac{dx}{dt} = -1 * x(t) + 2 * u(t) + y(t)$$
$$y(t) = 5 * x(t) + 1 * u(t)$$

5. Rajzold fel a következő rendszert:
$$\frac{dx_1}{dt} = u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

6. Rajzold fel a következő rendszert:
$$\frac{dx_1}{dt} = -2 * x_1(t) * 4 * u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -1 * x_1(t) + 3 * x_2(t) + 2 * u(t)$$
$$y(t) = 5 * x_2(t) + 4 * u(t)$$

1. gyakorlat

Vezessük le ennek az átviteli függvényét:



Oké:

$$y(s)=W_1(s)\cdot\left[u(s)-W_2(s)\cdot y(s)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$y(s)=W_1(s)\cdot u(s)-W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot y(s)$$

$$\Downarrow$$

$$y(s)+W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot y(s)=W_1(s)\cdot u(s)$$

$$\Downarrow$$

$$y(s)\cdot\left[1+W_1(s)\cdot W_2(s)\right]=W_1(s)\cdot u(s)$$

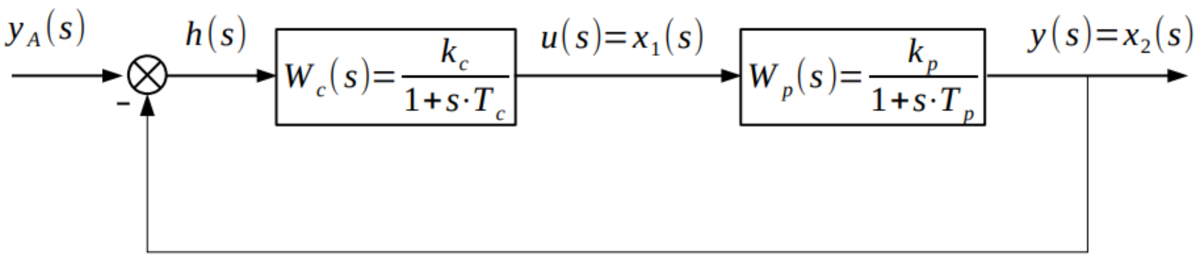
$$\Downarrow$$

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{W_1(s)}{1+W_1(s)\cdot W_2(s)}=W_R(s)$$

Köszi, hogy itt voltatok.

2. gyakorlat

1. feladat



$$k_c=10 \qquad T_c=2$$

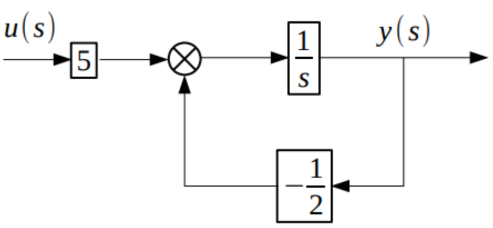
$$k_p=1 \qquad T_p=10$$

$$W_c(s)=\frac{G_c(s)}{H_c(s)}=\frac{k_c}{1+s\cdot T_c}=\frac{10}{1+2s} \qquad W_p(s)=\frac{G_p(s)}{H_p(s)}=\frac{k_p}{1+s\cdot T_p}=\frac{1}{1+10s}$$

a) Adja meg a szabályozó és a folyamat elsőrendű, lineáris differenciálegyenletét, valamint a P, I, és Σ lineáris alaptagokból felépített hatásvázlatát!

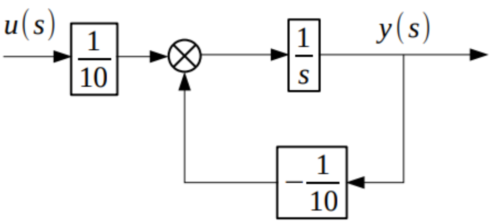
$$W_c(s)=\frac{k_c}{1+s\cdot T_c}=\frac{10}{1+2s}=\frac{y(s)}{u(s)}$$

$$10\cdot u(s)=(1+2s)\cdot y(s)$$
$$\downarrow$$
$$10\cdot u(s)=y(s)+2\cdot s\cdot y(s)$$
$$\downarrow$$
$$5\cdot u(s)-\frac{1}{2}\cdot y(s)=s\cdot y(s)$$
$$\downarrow$$
$$s\cdot y(s)=-\frac{1}{2}\cdot y(s)+5\cdot u(s)$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt}=-\frac{1}{2}\cdot y(t)+5\cdot u(t)}$$

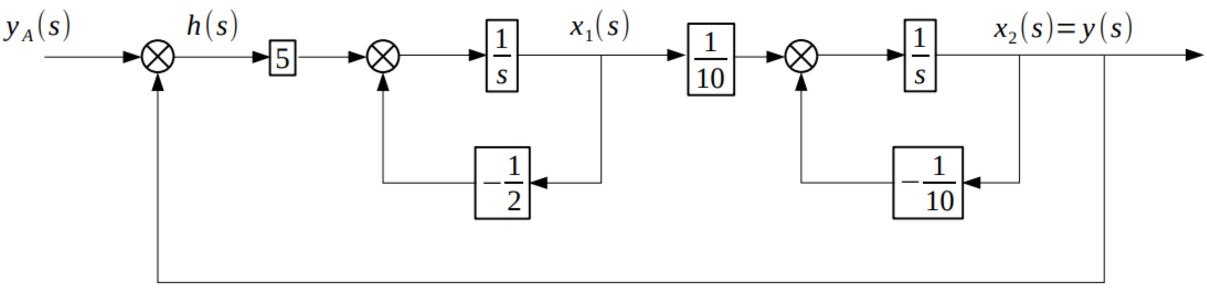


$$W_p(s)=\frac{k_p}{1+s\cdot T_p}=\frac{1}{1+10s}=\frac{y(s)}{u(s)}$$

$$u(s)=(1+10s)\cdot y(s)$$
$$\downarrow$$
$$u(s)=y(s)+10\cdot s\cdot y(s)$$
$$\downarrow$$
$$\frac{1}{10}\cdot u(s)-\frac{1}{10}\cdot y(s)=s\cdot y(s)$$
$$\downarrow$$
$$s\cdot y(s)=-\frac{1}{10}\cdot y(s)+\frac{1}{10}\cdot u(s)$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt}=-\frac{1}{10}\cdot y(t)+\frac{1}{10}\cdot u(t)}$$



b) A szabályozó és a folyamat alaptagokból felépített hatásvázlata alapján készítse el a zárt szabályozási rendszer P, I, és Σ lineáris alaptagokból álló hatásvázlatát!



c) A szabályozó $u(t)$ kimenőjelét $x_1(t)$ állapotváltozónak, illetve a folyamat $y(t)$ kimenőjelét $x_2(t)$ állapotváltozónak felvéve írja fel a lineáris, zárt hurkú szabályozási rendszer állapotegyenlet reprezentációját, ha bemenőjel az $y_A(t)$ referencia jel, kimenőjel pedig az $y(t) = x_2(t)$ szabályozott jellemző!

$$x_1(s)=\frac{10}{1+2s}\cdot[y_A(s)-x_2(s)]$$
$$\downarrow$$
$$x_1(s)+2\cdot s\cdot x_1(s)=10\cdot y_A(s)-10\cdot x_2(s)$$
$$\downarrow$$
$$s\cdot x_1(s)=-\frac{1}{2}x_1(s)-5\cdot x_2(s)+5\cdot y_A(s)$$

$$x_2(s)=\frac{1}{1+10\cdot s}\cdot x_1(s)$$
$$\downarrow$$
$$x_2(s)+10\cdot s\cdot x_2(s)=x_1(s)$$
$$\downarrow$$
$$s\cdot x_2(s)=\frac{1}{10}x_1(s)-\frac{1}{10}x_2(s)$$

$$s\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -5\\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}[y_A] \quad \text{vagy} \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -5\\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}[y_A]$$

$$y=[0\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[0][y_A]$$

d) Adja meg a zárt szabályozási rendszer eredő átviteli függvényét!

$$W_c(s)=\frac{k_c}{1+s\cdot T_c}=\frac{10}{1+2s} \qquad W_p(s)=\frac{k_p}{1+s\cdot T_p}=\frac{1}{1+10s}$$

$$W_0(s)=W_c(s)\cdot W_p(s)=\frac{10}{1+2s}\cdot\frac{1}{1+10s}=\frac{10}{(1+2s)\cdot(1+10s)}=\frac{10}{20s^2+12s+1}$$

$$W(s)=\frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}\frac{\frac{10}{20s^2+12s+1}}{1+\frac{10}{20s^2+12s+1}}=\frac{10}{(20s^2+12s+1)+10}=\frac{10}{20s^2+12s+11}$$

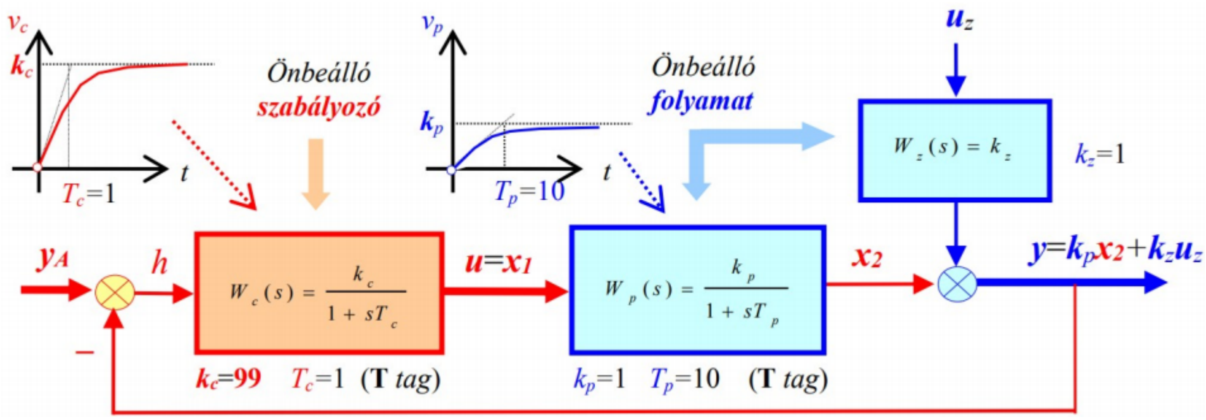
e) Indokolja meg a rendszer aszimptotikusan stabilis tulajdonságát!

$$20s^2 + 12s + 11 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4*20*11}}{2*20} = \frac{-12 \pm \sqrt{-736}}{40} = \frac{-12 \pm j*27.1293}{40} = -0.3 \pm j * 0.6782$$

Mindkét gyök negatív valós részű, ezért a rendszer aszimptotikusan stabilis.

2. feladat - arányos szabályozás



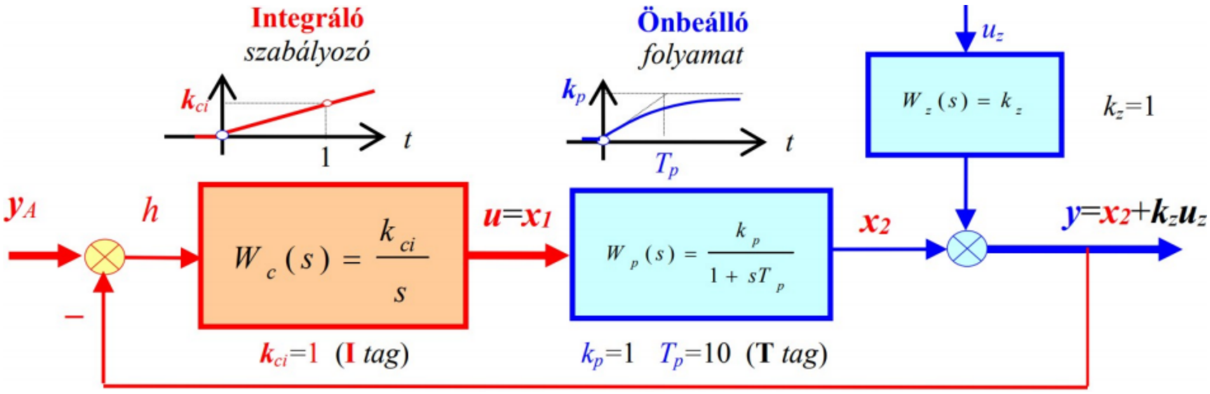
Kellene hozzá állapottér reprezentáció:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T_c} & -\frac{k_c}{T_c} \\ \frac{k_p}{T_p} & -\frac{1}{T_p} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_c}{T_c} & -\frac{k_c k_z}{T_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} y_A(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix}}_{u^*(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k_z \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} y_A(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix}}_{u^*(t)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_c} & -\frac{k_c}{T_c} \\ \frac{k_p}{T_p} & -\frac{1}{T_p} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{k_c}{T_c} & -\frac{k_c k_z}{T_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & k_z \end{bmatrix}$$

3. feladat - integrál szabályozás



Ide elég a rendszeregyenlet, úgyis látjuk benne a mátrixokat:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{ci} \\ \frac{k_p}{T_p} & -\frac{1}{T_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ci} & -k_{ci}k_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix}$$

Konzultációk

1. feladat

- Emlékszel az átviteli függvényre?

$$\frac{dx}{dt}=a\cdot x+b\cdot u$$

$$y=x$$

$$W(s)=\frac{y(s)}{u(s)}$$

$$\frac{dy}{dt}=a\cdot y+b\cdot u$$

$$\downarrow$$

$$s\cdot y(s)=a\cdot y(s)+b\cdot u(s)$$

$$\downarrow$$

$$s\cdot y(s)-a\cdot y(s)=b\cdot u(s)$$

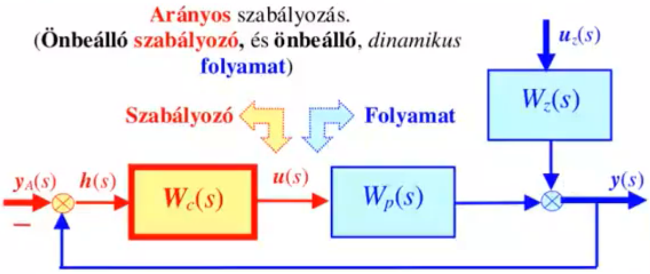
$$\downarrow$$

$$y(s)\cdot(s-a)=b\cdot u(s)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{b}{s-a}=W(s)$$

- Nézzük át újra a stabilitásvizsgálatot:



$$W_c(s)=k_c=10$$

$$W_p(s)=\frac{k_p}{1+s\cdot T_p}=\frac{2}{1+20s}=\frac{y(s)}{u(s)}$$

$$W_z(s)=1$$

$$W_R(s)=\frac{y(s)}{y_A(s)}=\frac{20}{21+20s}$$

$$W_{RZ}(s)=\frac{y(s)}{u_z(s)}=\frac{1+20s}{21+20s}$$

$$21+20s=0$$

$$\downarrow$$

$$20s=-21$$

$$\downarrow$$

$$pólus=-\frac{21}{20}$$

- Tartozott hozzá egy olyan kérdés, hogy *mi a zavarjel, ha a kimenetet 10 egységgel változtatja meg?* Ez azt jelenti, hogy hozzáad 10-et, tehát konstans 10-zel gerjeszt. Mivel az átviteli függvénye egyszerűen 1, ezért egy egyszerű szorzó, ez azt jelenti, hogy nem módosít semmit, tehát a $W_z(s)$ doboz olyan, mintha ott se lenne. Innen már evidens, hogy $u_z = 10$.

- *Ha van szabályozás, mennyire téríti el a kimenő jelet?* Ezt kétféle módon is megadhatjuk. Nézzük meg a zárt kör egyenletét, ami két dologból áll össze. Egyrészt soros kapcsolásnál egyszerűen szorozzuk az átviteli függvényeket, egy visszacsatolt körben pedig a $\frac{W_1}{1+W_1*W_2}$ módszert alkalmazzuk, ahol W_1 az egyenes út, W_2 pedig a visszacsatolás átviteli függvénye (ami ebben a feladatban nincs, tehát 1). A + azt jelenti, hogy pozitív visszacsatolás van. A soros kapcsolás $W_c(s) * W_p(s)$ (a párhuzamos egy összeadás lenne), nyitott körünk nincsen (tehát a szorzója 1), így a teljes egyenlet:

$$W_R(s) = \frac{y(s)}{y_A(s)} = \frac{W_c(s)*W_p(s)}{1+W_c(s)*W_p(s)}$$

Tegyük egyszerűbbé a szorzatot: $W_c(s) * W_p(s) = 10 * \frac{2}{1+20s} = \frac{20}{1+20s}$

Így az átviteli függvény: $\frac{\frac{20}{1+20s}}{1+\frac{20}{1+20s}} = \frac{20}{1+20s} * \frac{1}{1+\frac{20}{1+20s}} = \frac{20}{(1+\frac{20}{1+20s})*(1+20s)} =$

$\frac{20}{1+20s+20} = \frac{20}{21+20s}$

Azt kell vizsgálnunk, hogy ha $s \to 0$, akkor mi az átviteli függvény értéke. Ez $\frac{20}{21}$, mivel egyszerűen be lehet helyettesíteni 0-t, tehát az alapjel $\frac{20}{21}$ arányban van jelen a kimenő jelen. Ez természetesen azt jelenti, hogy a zavarjel $\frac{1}{21}$ arányú, de ez túl logikus lenne a javítónak, ezért nem adna rá pontot, szóval számoljuk ki a zavarjeltől nyitott kör átviteli függvényét is. Nézzük meg, milyen út vezet u_z-től y-ig: igazából egymás után kapcsolva W_z és a visszacsatolt kör. Ismerjük már a $\frac{W_1}{1+W_1*W_2}$ képletet, ahol W_1 az egyenes út, W_2 a visszacsatolás átviteli függvénye. Mivel ebben a feladatban az egyenes úton nincs semmi doboz (egyszerűen azonnal megy a jel W_z után a kimenetre), most W_2-be helyettesítünk be:

$$W_{RZ}(s) = \frac{y(s)}{u_z(s)} = W_z(s) * \frac{1}{1+W_c(s)*W_p(s)} = \frac{1}{1+W_c(s)*W_p(s)} = \frac{1}{1+20*\frac{1}{1+20s}} =$$

$$\frac{1}{1+\frac{20}{1+20s}} = \frac{1}{1+\frac{20}{1+20s}} * \frac{1+20s}{1+20s} = \frac{1+20s}{1+20s+20} = \frac{1+20s}{21+20s}$$

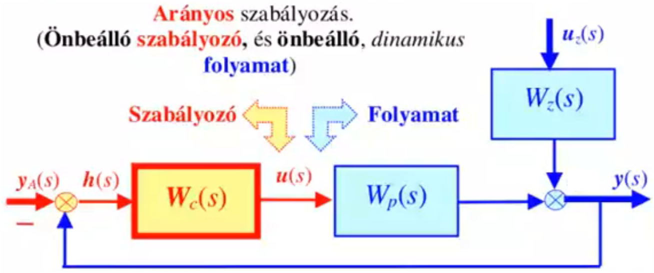
Itt már látható, hogy ha $s \to 0$, akkor a zavarjel $\frac{1}{21}$ részére csökken.

- Stabil a rendszer?

  Nézzük meg, mikor 0 a nevező: $21 + 20s = 0$, tehát $s = -\frac{21}{20}$. Mivel ez az egyetlen pólus, és negatív, ezért a rendszer stabil.

2. feladat - statikus karakterisztika

- Ugyanebben a rendszerben milyen egyensúlyi állapot áll fenn?

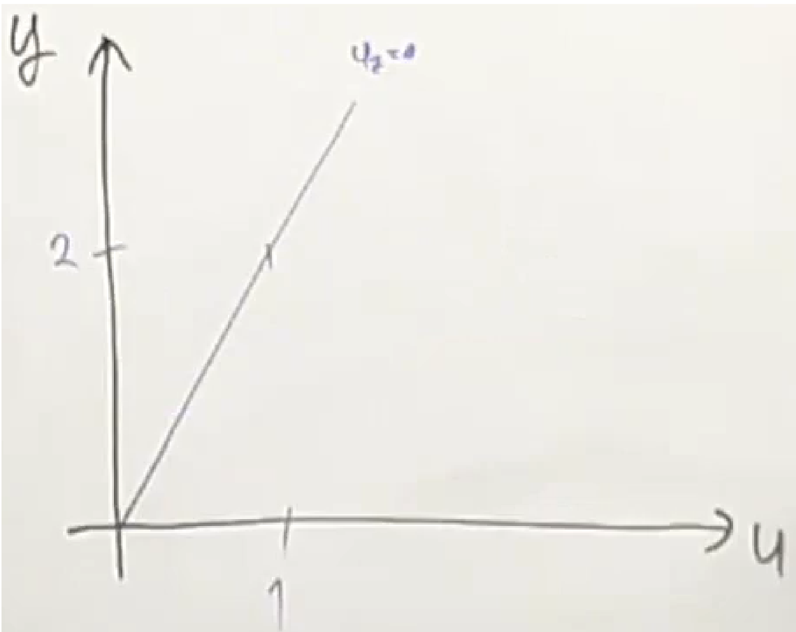


$$W_c(s) = k_c = 10$$

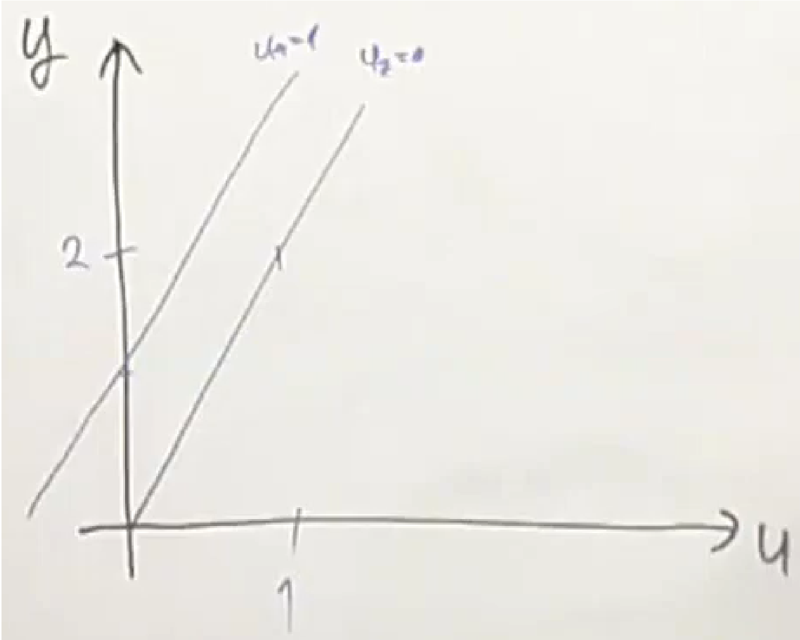
$$W_p(s) = \frac{k_p}{1+s \cdot T_p} = \frac{2}{1+20s} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$W_z(s) = 1$$

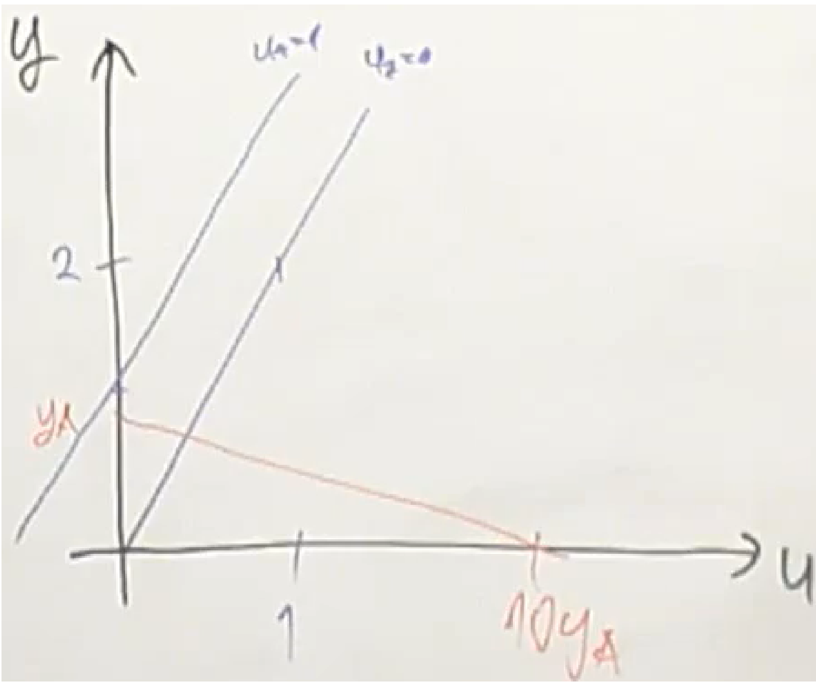
- Az önbeálló tagok állandósult állapotát az $s \to 0$ helyzetben írhatjuk fel, innen már látjuk, hogy $y(s) = 2 * u(s)$, vagyis $y(t) = 2 * u(t)$. Mivel ez a folyamat átvitele, és utána egy összegzővel van bekötve a zavar, ezért hozzáadódik a teljes képlethez, ami az lesz, hogy $y(t) = 2 * u(t) + u_z(t)$. Rajzoljuk is be ezt az egyenest a statikus karakterisztikánk koordináta-rendszerébe, de eltolás nélkül, és ezt jelezzük:



- Egy eltolásra példa:



- Írjuk fel a szabályozó átvitelét is, itt már az $y_A(s)$ adódik hozzá, mert y-ban már benne van a teljes előző rendszer és a zavar is:
  $u(s) = 10 * (y_A(s) - y(s)) = 10 * y_A(s) - 10 * y(s)$
  Ezen a ponton cseréljük is őket nyugodtan t-re, mert a szorzás és az összeadás Laplace-transzformációja is ugyanaz a szorzás és összeadás:
  $10 * y(t) = 10 * y_A(t) - u(t)$
  $y(t) = y_A(t) - \frac{1}{10} * u(t)$
- Általánosan felrajzolva ez a statikus karakterisztika:

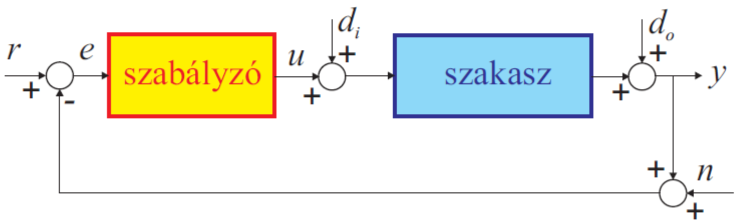


Azért $10 * y_A$-nál 0, mert $y(t) = y_A(t) - \frac{1}{10} * u(t) = 0$ értéket keresve $y_A(t) = 0.1 * u(t)$, vagyis $y_A(t) = u(t)$.

Függelék

Visszacsatolás átviteli függvényének teljes levezetése

A szabályozott jellemző és a kör külső jelei között átvitelek



Az y szabályozott jellemző és a körre ható külső jelek kapcsolata

$$Y(s) = W_P(s)W_C(s)R(s) + W_P(s)D_i(s) + D_o(s) - W_P(s)W_C(s)N(s) - W_P(s)W_C(s)Y(s)$$

Átrendezés után (elhagyva az s-től való függés jelölését)

$$\begin{aligned} Y &= \frac{W_P W_C}{1 + W_P W_C} R + \frac{W_P}{1 + W_P W_C} D_i + \frac{1}{1 + W_P W_C} D_o - \frac{W_P W_C}{1 + W_P W_C} N \\ Y &= W_{yr} R + W_{yd_i} D_i + W_{yd_o} D_o + W_{yn} N \end{aligned}$$