MATEMATIKA A2 2.vizsga

2015 január 5.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Az $(1,2,-1,0),(0,1,0,1),(-1,-5,2,0),(2,3,-2,7)$ vektorok bázist alkotnak-e $\mathbf{R}^4$-ben?

2. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y)=\frac{x}{y-x}.$$

Legyen $f(0,0)=0$. Milyen irányban létezik az iránymenti derivált az origóban?

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}}\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}}\sin\sqrt{x^3}\,dx\,dy.$$

4. Feladat. Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x\neq y}}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1. Feladat. Az $(1, 2, -1, 0), (0, 1, 0, 1), (-1, -5, 2, 0), (2, 3, -2, 7)$ vektorok bázist alkotnak-e $\mathbf{R}^4$-ben?

Megoldás. Az adott vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix rangját kell meghatároznunk $\boxed{\mathbf{4p}}$.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Az $S_1 + S_3$, $(-2)S_1 + S_4$ elemi sortranszformációk után kapjuk $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Végül $3S_2 + S_3$, $S_2 + S_4$ után kapjuk $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tehát az A mátrix rangja 4 $\boxed{\mathbf{1p}}$, azaz, az adott vektorok bázist alkotnak $\boxed{\mathbf{1p}}$.

---

2. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \frac{x}{y - x}.$$

Legyen $f(0, 0) = 0$. Milyen irányban létezik az iránymenti derivált az origóban?

Megoldás. Első megoldás: Az y-tengely mentén a függvény azonosan nulla, így az ezzel párhuzamos iránymenti deriváltak nullák $\boxed{\mathbf{2p}}$. Ha az $y = mx$ $(m \neq 1)$ egyenes $\boxed{\mathbf{1p}}$ mentén közelítünk $\boxed{\mathbf{3p}}$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{mh}{\sqrt{1+m^2}}\right) - 0}{h} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h(m-1)},$$

és ez a limesz nem véges $\boxed{\mathbf{1p}}$. Iránymenti derivált az origóban csak az y-tengellyel párhuzamos irányban létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$.

Második megoldás: Közelítsünk az origóhoz a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\boxed{\textbf{2p}}$ irányból. $\boxed{\textbf{3p}}$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\frac{h\cos\alpha}{h\cos\alpha - h\sin\alpha} - 0}{h} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos\alpha}{h(\cos\alpha - \sin\alpha)},$$

amely limesz csak $\cos\alpha = 0$ $\boxed{\textbf{2p}}$ esetén létezik. Iránymenti derivált az origóban csak az y-tengellyel párhuzamos irányban létezik $\boxed{\textbf{1p}}$.

---

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin\sqrt{x^3}\, dx\, dy.$$

Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik $\boxed{\textbf{1p}}$. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk $\boxed{\textbf{1p}}$,

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin\sqrt{x^3}\, dx\, dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x^3}\, dy\, dx \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \left[y\sin\sqrt{x^3}\right]_0^{\sqrt{x}}$$

$$\overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x}\sin x^{\frac{3}{2}} dx \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \left[-\frac{2}{3}\cos x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} = \frac{4}{3}.$$

---

4. Feladat. Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x\neq y}} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

Megoldás. A határérték $\frac{0}{0}$ alakú $\boxed{\textbf{2p}}$, ezért átalakítjuk a törtet.
$\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, ha $x \neq y$. Így a keresett határérték $4\sqrt{2}$ $\boxed{\textbf{2p}}$.

---

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Megoldás. A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor egyben abszolút konvergens is. A tagok hatványok szorzatai, ez a hányados, vagy a gyökkritérium alkalmazását sugallja.
Gyökkritériummal $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \sqrt[n]{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} (\sqrt[n]{n})^2\frac{2}{3} \xrightarrow[\boxed{\mathbf{2p}}]{n\to\infty} \frac{2}{3},$$

ugyanis $\sqrt[n]{n}$ 1-hez tart. Mivel $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ létezik, és kisebb mint 1 $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sor konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.
Hányadoskritériummal $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \frac{(n+1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{2}{3} \xrightarrow[\boxed{\mathbf{2p}}]{n\to\infty} \frac{2}{3},$$

ugyanis $\frac{n+1}{n}$ 1-hez tart. Mivel $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ létezik, és kisebb mint 1 $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sor konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.
