ANALÍZIS 2 | **II. ZÁRTHELYI** | 2013 november 20
Mérnök Informatikus szak | | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név:

Neptun kód: ☐☐☐☐☐☐ **Gyak.:** ☐ **8–10.** ☐ **16–18.**

1.	**2.**	**3.**	**4.**	$\sum$

1. feladat (25 pont)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4+x^2}-2)\sin(x)-\frac{1}{4}x^3}{x^5} = ?$$

2. feladat (25 pont)

Egy megfelelő másodrendű Taylor-polinom segítségével becsüljük meg az

$$f(x)=\ln(1+\ln(x))$$

képlettel megadott f függvény értékét az $x=1.1$ pontban és adjunk fölső korlátot a becslés hibájára a Lagrange-féle maradéktag segítségével.

3. feladat (25 pont)

Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az

$$f(x,y)=\begin{cases} x\arctan(\frac{y}{x}), & \text{ha } x\neq 0 \\ 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$$

képlettel megadott $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény folytonosságát, számoljuk ki parciális deriváltjait (mindenhol, ahol léteznek), illetve a $D_v f(0,0)$ vektor-szerinti deriváltat, ha

$$v=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

A kapott eredmények alapján döntsük el, hogy létezik -e $Df(0,0)$.

4. feladat (25 pont)

Keressük meg az

$$f(x,y)=y^3+2(x+y)^2-8x-20y$$

képlettel megadott f függvény lokális minimumainak illetve lokális maximumainak helyeit.

Zh megoldás

2. feladat (ilyen típusú biztos lesz a pzh-n)

$f(x) := \ln(1 + \ln(x))$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x + x\ln(x)}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+x\ln(x))^2}\left(1 + 1 + \ln(x)\right) = \frac{-(2+\ln(x))}{(x+x\ln(x))^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{\frac{1}{x}(x+x\ln(x))^{\cancel{2}} + (2+\ln(x))\,2\,\cancel{(x+x\ln(x))}(2+\ln(x))}{(x+x\ln(x))^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2(2+\ln(x))^2 - (1+\ln(x))}{(x+x\ln(x))^3} = \frac{2\ln(x)^2 + 7 + 7\ln(x)}{(x+x\ln(x))^3}$$

bázispontot $x_0 = 1$ - nek választjuk

(ott tudjuk az $\ln(x)$ értékét $(=0)$)

Kell:

$$T_{f,1,2}(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-2}{2!}(x-1)^2 =$$

1 bázispontú
2-od rendű
Taylor-polinom

$$= (x-1) - (x-1)^2$$

becslés: $f(1.1) = \ln(1 + \ln(1.1)) \simeq$

$f(1) = 0$
$f'(1) = 1$
$f''(1) = -2$

$$\simeq T_{f,1,2}(1.1) = (0.1) - (0.1)^2 = 0{,}09$$

Zh megoldás

2. feladat folytatása

Tudjuk: $\exists \xi \in [1, 1.1]$:

$$\underset{\text{érték}}{\text{valós}} - \underset{\text{érték}}{\text{becsült}} = \text{hiba} = \frac{f'''(\xi)}{3!}(1.1-1)^3 = \frac{0{,}001}{6} \cdot f'''(\xi)$$

$\Longrightarrow$ [illegible]

$$\text{hiba} = \frac{0{,}001}{6} \cdot \frac{7 + 7\ln(\xi) + 2\ln(\xi)^2}{(\xi + \xi\ln(\xi))^3}$$

0 és 1 között van a hiba
($\ln(1)$, $\ln(e)$)

$$0 \le \text{hiba} \le \frac{7+7+2}{1} \cdot \frac{0{,}001}{6} \le 0{,}003$$

(ennél jobbat is tudtunk volna mondani, ha 0, és 0,1 között választottuk volna meg)

valós érték (tényleges) = becsült érték + hiba

$$\boxed{0{,}09 \le \ln(1+\ln(1.1)) \le 0{,}093}$$

/* zh-ban szinte tuti, hogy 1, vagy 0-t kell választani

/* $\ln(1+\ln(1.1)) \approx 0{,}0910376$ */

/* bázis pontot mi választjuk, olyat kell aminek tudjuk az értékét, pl $\sin(x)$-ben nem biztos, hogy a 0-t érdemes választani */

Zh megoldás

sin, cos, e^x, $(1+z)^\alpha$, ln
ezeket tudni kell!

1. feladat (pzh-n lehet már 3 tagot is tudni kell)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{4+x^2}-2\right)\sin(x) - \frac{1}{4}x^3}{x^5} = ? \quad * =$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sqrt{4+x^2} = 2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \underbrace{2\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{már ilyen alakú}} = 2\left(1+\binom{1/2}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{1/2}{2}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^2 + \dots\right) =$$

$$\left((1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad z \in (-1,1)\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{x^4}{16} \dots\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{4+x^2}-2\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{64} + \dots$$

a többi magasabb rendű és nem fog kelleni

$$* = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{64} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \frac{1}{4}x^3}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{64}\right)x^5 + \text{valahányszor } x^7 + \dots}{x^5} =$$

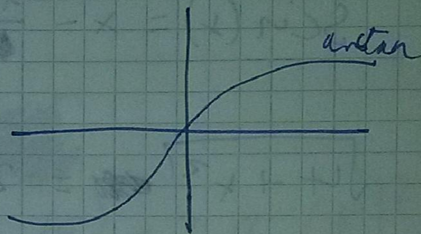
$$= -\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{64}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\text{valahányszor } x^2 + \dots}_{\to 0}\right) = \boxed{-\frac{1}{24}+\frac{1}{64}}$$

Zh megoldás

3. feladat

$$f(x,y)=\begin{cases} x\arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{ha } x\neq 0 \\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)} \underbrace{x}_{\to 0}\,\underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{\text{korlátos}} = 0$$



$\Rightarrow$ f folytonos

ha $x\neq 0$

$$\partial_1 f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)=$$

$$=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x+\frac{y^2}{x}}$$

$$\partial_2 f(x,y)=x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ha $x=0$

$$\partial_2 f(0,y)=0$$

$$\partial_1 f(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\nexists, \text{ ha } y\neq 0$$

és 0, ha $y=0$

$\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$

$D_v f(0,0) = \frac{d}{dt} f((0,0) + vt)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f((1,2)t)\Big|_{t=0} =$

$= \frac{d}{dt} f(t, 2t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{2t}{t}\right)\Big|_{t=0} =$

$= \arctan(2) \neq 0$

$\Rightarrow$ teljes derivált nem létezik

$\nexists\ Df(0,0)$, mert ha lenne akkor az

$D_v f(0,0) = Df(0,0)\, v =$

4. feladat ??