ANALÍZIS(1) **II. ZÁRTHELYI** **1999. november 11.**
Műszaki Informatika szak B csoport Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (17 pont)

$$f(x)=\begin{cases} \left(\sin x^2\right)^x, & \text{ha } x\in(0,1)\\ c\,, & \text{ha } x=0\\ \dfrac{\sin 3x}{\arcsin\dfrac{x}{2}}\,, & \text{ha } x\in(-1,0)\end{cases}$$

a) Megválasztható-e c értéke úgy, hogy f folytonos legyen $x=0$-ban?
b) Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

Megoldás:

a)

$$\lim_{x\to+0}(\sin x^2)^x=\lim_{x\to+0}\mathrm{e}^{x\,\ln\,\sin x^2}=\mathrm{e}^0=1$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\,\sin x^2}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}-\underbrace{\frac{x^2}{\sin x^2}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\cos x^2}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{2x}=0$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin 3x}{\arcsin\frac{x}{2}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to-0}\frac{3\cos 3x}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}}=6$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\nexists\qquad\Longrightarrow\qquad\text{nincs megfelelő } c$$

b)

$$f'(x)=\begin{cases}(\sin x^2)^x\left(\ln\,\sin x^2+x\dfrac{1}{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x\right), & \text{ha } x\in(0,1)\\[2ex] \dfrac{3\cos 3x\cdot\arcsin\dfrac{x}{2}-\sin 3x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}}{\arcsin^2\frac{x}{2}}, & \text{ha } x\in(-1,0)\end{cases}$$

2. feladat (16 pont)

$$f(x) = \frac{3-x}{(x+2)^2}$$

Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!

Megoldás:

$$\lim_{x\to -2\pm} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{-1(x+2)^2 - (3-x)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)(-x-2-6+2x)}{(x+2)^4} =$$

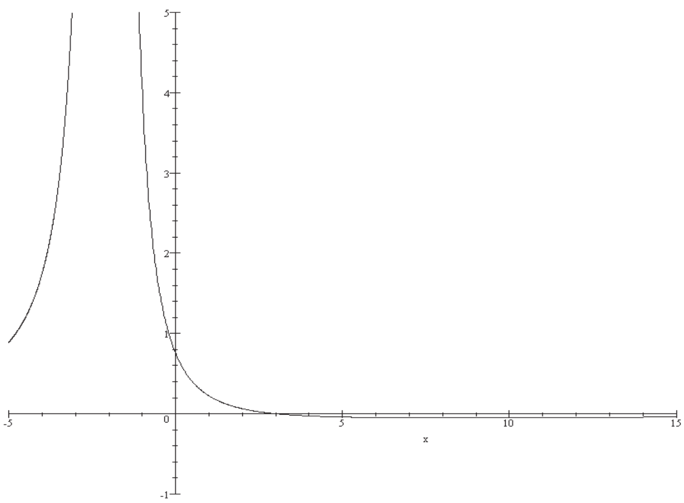
$$= \frac{(x+2)(x-8)}{(x+2)^4} = \frac{x-8}{(x+2)^3}$$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,8)$	8	$(8,\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$$f(8) = \frac{-5}{100}$$

$$f''(x) = \frac{(x+2)^3 - (x-8)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{x+2-(x-8)\cdot 3}{(x+2)^4} = \frac{-2x+26}{(x+2)^4} = \frac{2(13-x)}{(x+2)^4}$$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,13)$	13	$(13,\infty)$
f''	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\cup$		$\cup$	infl. pont	$\cap$



$R_f = \left[-\frac{5}{100}, \infty\right),\qquad D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

3. feladat (13 pont)

$$f(x) = \pi + \arcsin \frac{9}{x^2}$$

a) $D_f \ = ?\,, \quad R_f \ = ?$
$f'(x) \ = ?$

b) Adja meg azt az $x = 5$ pontot tartalmazó legbővebb intervallumot, melyen f invertálható! (Indokoljon !)
Írja fel itt az inverz függvényt és adja meg annak értelmezési tartományát!

Megoldás:

$\left|\frac{9}{x^2}\right| \leq 1 \qquad |x| \geq 3 \qquad D_f = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

Mivel $0 < \frac{9}{x^2} \leq 1, \quad \arcsin \frac{9}{x^2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Longrightarrow \quad R_f = \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{9}{x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-18}{x^3} \qquad \text{ha } |x| > 3$$

$x \in [3, \infty)$-ben $f' < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ szig. mon. csökken $\quad \Longrightarrow \quad \exists f^{-1}$.

$y = \pi + \arcsin \frac{9}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \sin(y - \pi) = \frac{9}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{\sin(y - \pi)}$

$\Longrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{-\sin y} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{-\frac{9}{\sin y}}$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{9}{\sin x}} \qquad D_{f^{-1}} = \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

4. feladat (8 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\,, & \text{ha } x \neq 0 \\ \alpha\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Határozza meg α értékét úgy, hogy f folytonos legyen $x = 0$-ban!
$f'(0) = ?$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}; \qquad f(0) := \frac{\pi}{2}$$

Tehát $\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetén f folytonos $x = 0$-ban.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} - \frac{\pi}{2}}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \frac{-2}{x^3}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x^4+1} = 0$$

Vagy:

$$x \neq 0: \qquad f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} \frac{-2}{x^3} = \frac{-2x}{x^4+1}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ és f folytonos $x = 0$-ban $\qquad \Longrightarrow \qquad f'(0) = 0$

5. feladat (10 pont)

Írja fel az $(\mathrm{e}, 1)$ ponton átmenő, a pont egy környezetében differenciálható $y = y(x)$ függvény érintő egyenesének egyenletét, ha a függvény kielégíti az alábbi implicit kapcsolatot!

$$x \ln y + y \ln x = 1$$

Megoldás:

$$\mathrm{e} \cdot \ln 1 + 1 \cdot \ln \mathrm{e} = 1 \qquad \text{(valóban)}$$

x szerint deriválva az egyenlet mindkét oldalát:

$$1 \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' + y' \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x} = 0$$

Behelyettesítve $(x = \mathrm{e},\ y = 1)$:

$$\ln 1 + \mathrm{e} \cdot y'(\mathrm{e}) + y'(\mathrm{e}) \ln \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} = 0$$

$$y'(\mathrm{e}) = -\frac{1}{\mathrm{e}(\mathrm{e}+1)}$$

$$y_{\text{é}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}(\mathrm{e}+1)}(x-\mathrm{e})$$

6. feladat (8 pont)

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arch}(x+1) + C$$

b)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x+2)(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{\frac{1}{2}} + C$$

7. feladat (12 pont)

$$\int_2^\infty \frac{5-9x}{x^2\,(x+5)}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás:

$$\frac{5-9x}{x^2(x+5)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5}$$

$$5-9x = A(x+5) + Bx(x+5) + Cx^2$$

$$\begin{array}{llll}
x=0: & 5 = 5A & \Longrightarrow & A = 1 \\
x=-5: & 50 = 25C & \Longrightarrow & C = 2 \\
x=1: & -4 = 6A + 6B + C & \Longrightarrow & B = -2
\end{array}$$

$$\int_2^\infty \frac{5-9x}{x^2(x+5)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\int_2^\omega \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x+5}\right)\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{-1}{x}-2\ln x+2\ln(x+5)\right)\Big|_2^\omega =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\omega}-\underbrace{2\ln\omega+2\ln(\omega+5)}_{=2\ln\frac{\omega+5}{\omega}\to 0}-\left(-\frac{1}{2}-2\ln 2+2\ln 7\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}+2\ln 2-2\ln 7$$

8. feladat (16 pont)

a) $\displaystyle\int (2x+1)\,\sin 3x\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int_1^6 \frac{3x+\sqrt{x+3}}{2x+6}\,\mathrm{d}x = ?$ $\qquad$ $t=\sqrt{x+3}$ helyettesítéssel dolgozzon!

Megoldás:

a)

$$\int \underset{\substack{u=2x+1\\ u'=2}}{(2x+1)}\quad \underset{\substack{v'=\sin 3x\\ v=-\frac{\cos 3x}{3}}}{\sin 3x}\quad \mathrm{d}x = (2x+1)\frac{-\cos 3x}{3}+\frac{2}{3}\int\cos 3x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{3}(2x+1)\cos 3x+\frac{2}{3}\,\frac{\sin 3x}{3}+C$$

b) $t=\sqrt{x+3}$ $\qquad$ $x=1:\quad t=2;\qquad x=6:\quad t=3$
$x=t^2-3$
$\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$

$$\int_1^6 \frac{3x+\sqrt{x+3}}{2x+6}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{3t^2-9+t}{2t^2}\,2t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_2^3 \left(3t - \frac{9}{t} + 1\right)\, \mathrm{d}t = \left(3\frac{t^2}{2} - 9\ln t + t\right)\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - 9\ln 3 + 3 - (6 - 9\ln 2 + 2)$$

Pótkérdés (csak a 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3x} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln 3x = ?$

Megoldás:

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-5x}}{1 + \mathrm{e}^{-6x}} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln 3x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{3x}\cdot 3}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to+0} -\frac{x^2}{2} = 0$$