

Zh-k: ..... Vizsga: ..... Össz: ..... JEGY: .....

Név: ..... Neptun: ..... Gyak.vez.: .....

**4. vizsga, 2017-01-23, Munkaidő: 90 perc**

1. **(a)** Mikor mondjuk azt, hogy az  $A$  és  $B$  események függetlenek egymástól? *(Mondja ki a definíciót!)* **(b)** Mikor mondjuk azt, hogy az  $A, B, C$  események függetlenek egymástól, vagy – más kifejezéssel élve –  $A, B, C$  események független rendszert alkotnak? *(Mondja ki a definíciót!)* **(c)** Igaz-e, hogy ha három esemény közül bármelyik kettő független egymástól, akkor a három esemény független rendszert alkot? *(Ha igen, bizonyítsa be! Ha nem, adjon ellenpéldát, és a szükséges tényeket igazolja!)*
2.  $X$  és  $Y$  függetlenek, és eloszlásaik:

$x$	0	10	20	30
$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

illetve

$y$	10	20	30	40
$p(y)$	0.1	0.2	0.3	0.4

- (a)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy  $Y > X$ ? **(b)** Mennyi  $X$ ,  $Y$  és  $X + Y$  szórása? *(Mindkét részben a számolási hiba is HIBA! Segítség: ha jól számol, mindkét részben "szép" eredmény jön ki.)*
3. Két gejzír (egy kisebbet és egy nagyobbat) rendszeresen megfigyelünk Izlandon. A percekben mért várakozási idők a kitörésükig, amiket  $X$  és  $Y$  jelöl, függetlenek, és mindketten 0.1 paraméterű exponenciális eloszlást követnek. **(a)** Határozza meg az  $X < 2 \cdot Y$  esemény valószínűségét! **(b)** Határozza meg  $Z = 2 \cdot Y - X$  valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a képletét! *(Ha a válaszokat korrekt integrálokkal megadja, de nem számolja ki, akkor csak 1-1 pontot veszít. Egy-egy jó ábra sokat segíthet!)*
4. Felmegy a legény fára, a meggyfa tetjére. Lerázza a meggyet, aztán ... a babája (válogatás nélkül) száz szemet szed a fedeles kosarába. A meggyeszemek súlya – egymástól függetlenül – egyenletes eloszlást követ 2 dkg és 4 dkg között. **(a)** Mi a valószínűsége, hogy a kosár nettó súlya meghaladja a 3.05 kg -ot? *(Használja a normális eloszlás lentebbi táblázatát!)* **(b)** Bár a meggyeszemek súlya egyenletes eloszlást követ, mégis normális eloszlással lehetett az (a) részben számolni. Miért? *(Korrekt, tiszta választ kérünk.)*
5. Legyen  $X = \text{RND}_1 \cdot \text{RND}_2$  és  $Y = \text{RND}_1$ . Határozza meg **(a)**  $X$  és  $Y$  várható értékét, és **(b)** az  $X$  és közötti  $Y$  kovarianciát!
6. Amikor az  $(x, y)$  -síkon tekintett  $f(x, y)$  sűrűségfüggvényű eloszlást az  $(u, v)$  -síkra transzformáljuk az

$$u = \mathbf{u}(x, y), \quad v = \mathbf{v}(x, y)$$

képletpár által definiált  $t$  transzformációval (a szükséges folytonossági, differenciálhatósági és invertálhatósági feltételek mellett), akkor fontos szerepe van egy bizonyos Jacobi mátrixnak. **(a)** Írja fel ezt a bizonyos Jacobi mátrixot a megfelelő parciális deriváltakkal! **(b)** Írja fel azt a képletet, ahogy az  $(u, v)$  -síkon kapott eloszlás  $s(u, v)$  sűrűségfüggvényét az  $f(x, y)$  sűrűségfüggvényből és a megfelelő Jacobi determinánsból elő lehet állítani! *(Korrekt, jól érthető képleteket kérünk! A  $t$  transzformáció inverzét a szokásoknak megfelelően jelölje  $t^{-1}$ , a  $t^{-1}$  -nek megfelelő képletpár tagjait pedig  $x = \mathbf{x}(u, v)$ ,  $y = \mathbf{y}(u, v)$ .)*

Standard normális eloszlásfüggvény (két tizedes pontossággal)

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		