

11. Gyakorlat

Feltételes várható érték, Teljes várható érték tétele

1. Egyenletesen véletlenszerűen választok egy U számot az $[1; 2]$ intervallumon. Az U ismeretében várok U paraméterű exponenciális ideig, jelölje a várakozás idejét M .

a) Mennyi $\mathbb{E}(M | U)$? b) Határozzuk meg (U, M) együttes sűrűségfüggvényét.

2. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adjuk meg az

- a) $f_{Y|X}(y | x)$ sűrűségfüggvényt, b) $\mathbb{E}(Y | X)$ feltételes várható értéket,
c) (X, Y) kovarianciamátrixát és d) Y -nak X -re vonatkozó lineáris regresszióját.

3. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{4}{5}(x + y + xy) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adjuk meg az $\mathbb{E}(X | Y)$ regressziót.

4. Legyenek $X \sim N(0; 1)$, $Y \sim \text{Exp}(2)$ független valószínűségi változók. Számoljuk ki az alábbiakat.

- a) $\mathbb{E}(3X - Y + 1 | X)$ b) $\mathbb{E}((2XY)^2 - 7Y | X)$
c) $\mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2 | X + Y)$ d) $\mathbb{E}(X^2 \text{tg}(Y) + \frac{5X}{Y} - 2Y | Y)$

5. Háromszor dobunk egy szabályos kockával. Jelölje X a legkisebb, Y pedig a legnagyobb értéket. Adjuk meg az $\mathbb{E}(X | Y = 3)$ feltételes várható értéket.

6. Négyyszer dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az összes fejdobás számát, A pedig azt, hogy a második dobás lesz először fej. Adjuk meg az $\mathbb{E}(Y | A)$ feltételes várható értéket.

7. Egy szabályos kockával n -szer dobunk. Jelölje X a hatos, Y pedig a páros dobások számát. Számoljuk ki az $\mathbb{E}(Y | X)$ regressziót.

8. Egy érme p valószínűséggel landol a fej oldalán, ahol p egyenletesen helyezkedhet el az $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ intervallumon. Várhatóan hány dobásra lesz szükség ezzel az érmével, ha az első fejjel folytatjuk az érmedobás kísérletet.

9. Legyen $X \sim \text{Exp}(4)$ valószínűségi változó. Az X kiértékelése után választunk egy Y számot a $(0; X)$ intervallumon egyenletesen. $\mathbb{E}(Y) = ?$

10. Egy iratot keresünk, ami az íróasztalunk két fiókjának valamelyikében van, $\frac{2}{3}$ eséllyel a felső fiókban, egyébként az alsóban. A felső fiók átnézése 7 percig tart, az alsó fióké 3 percig. Tegyük fel, hogy az iratot csak az öt tartalmazó fiók teljes átnézése után találjuk meg. Várhatóan mennyi időbe telik megtalálni az iratot, ha az átnézést

- a) a felső fiókkal, b) az alsó fiókkal kezdjük?

11. Egy bányában eltévedt egy ember, aki egy csomópontban áll, ahonnan három irányba mehet tovább. Az első irányt választva kijut a bányából egy óra alatt, a második irányt választva visszaérkezik ugyanide 2 óra alatt, a harmadik irányt választva pedig 3 óra alatt ér vissza ugyanide. Feltéve, hogy minden esetben, amikor választania kell, akkor egyenlő valószínűséggel választja bármelyik opciót, várhatóan mennyi idő múlva jut ki a bányából?

- IMSc 10. Legyenek X_1 és X_2 független, azonos $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változók. Definiáljuk az $\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ és $S^2 = (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2$ valószínűségi változókat. Mennyi \bar{X} és S^2 korrelációja?