Jelek 1.

10. E

Dinamikus hálózatok

$\cancel{t\to 0 \quad y_f(t) = y_g(t) \quad y_f(t)\to 0}$

- $y(t) = \underbrace{y_f(t)}_{\text{szabad válasz}} + \underbrace{y_g(t)}_{\text{gerjesztett válasz}}$

$t\to 0 \quad y_f(t)\to 0$ ki lehet fejezni az állapotváltozók segítségével

$y(t) = y_g(t)$ állandósult állapot

- Elsőfokú hálózat esetén

$x_f(t) = k\cdot e^{\lambda t} = k e^{-\frac{t}{\tau}}$

Sajátértékkel: $t\to\infty$, $x_f\to 0$ akkor $Re\{\lambda\} < 0$ ← stabilis

akkor $\lim_{t\to\infty} k e^{\lambda t} = k \lim e^{-|\lambda| t} = k \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{|\lambda| t}} \to 0$

~~A sajátértékkel~~

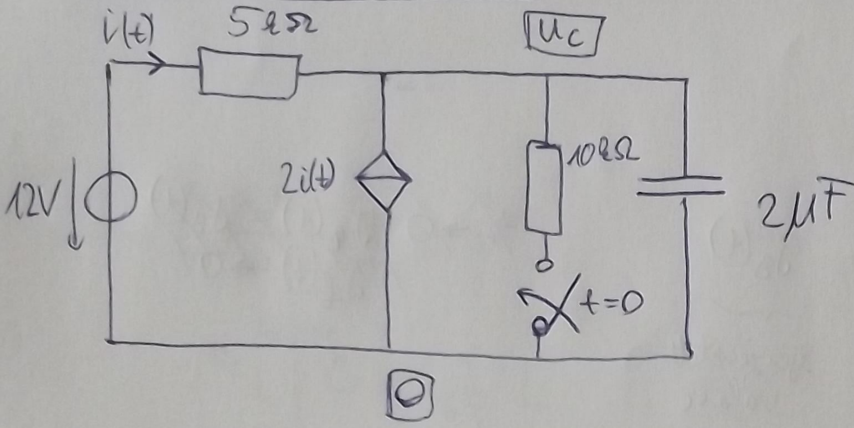
Időállandó:

$\tau > 0$ $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{|\tau|}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{t}{\tau}}} \to 0$

$\Rightarrow Re\{\lambda\} > 0$ vagy $\tau < 0$ $\Rightarrow$ nem stabilis

---

Példa nemstabilis hálózatra:



$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_c-12}{5} + 2i(t) + \frac{u_c}{10} + Cu_c' = 0 \\ &i(t) = \frac{12-u_c}{5} \end{aligned}\right\}$$

$$u_c' = \frac{u_c}{20} - \frac{24}{20}$$

$$u_c = u_{cf} + u_{cg}$$

$$u_{cf} = ke^{\lambda t} \qquad u_c' = \frac{1}{20}u_c$$

$$\lambda = \frac{1}{20}$$

$$\lambda > 0$$

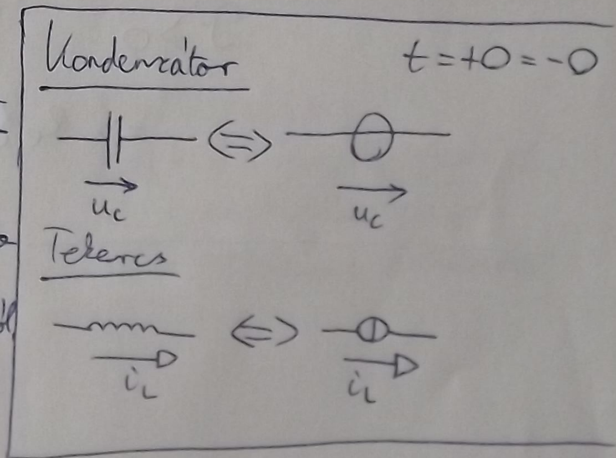
$$t \to \infty \quad u_{cf} = ke^{\frac{1}{20}t} \to \infty \to \text{nem stabilis}$$

Az állapotváltozós normálalak szisztematikus előállítása

$$x' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ állapotváltozók}$$

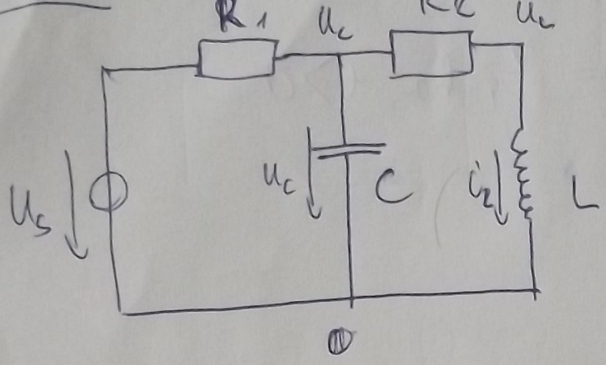
$$y = \underline{C}^T\underline{x} + Du \qquad u_c,\ i_L$$

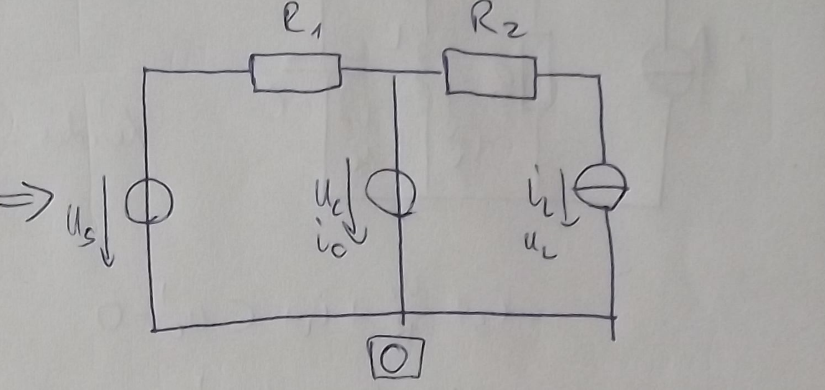
- újrarajzolom a hálózatot (képzeletben)
- a karakterisztikák ($i_c = u_c \cdot C$; $u_L = L \cdot i_L$) segítségével kiküszöbölöm a kondenzátorokat és tekercseket a forrásokat és rezisztív elemeket tartalmazó hálózatból
- rendezés után → az állapotváltozókra vonatkozó diff. egyenletrendszer.



Jelek 1.

Példa:





$$\left.\begin{aligned} \frac{u_c - u_s}{R_1} + i_c + \frac{u_c - u_L}{R_2} = 0 \\ i_L = \frac{u_c - u_L}{R_2} \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} u_c' \\ i_L' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

$$i_c = C u_c' \qquad u_L = L i_L'$$

Másodfokú dinamikus hálózatok

- 2 dinamikus elemet tartalmaznak.
- 2 dinamikus elemet tartalmaznak.
- leírhatók: – egy másodfokú differenciális egyenlettel
  - két elsőfokú differenciális egyenletből álló differenciális egyenletrendszerrel.

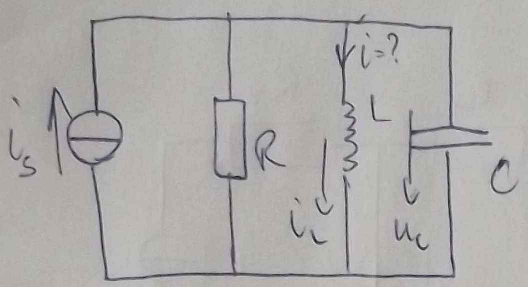
Pl1: $x''(t) + 2\alpha x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$

$x(t)$ – válasz
$f(t)$ – a hálózat gerjesztése
α – csillapítási tényező
ω_0 – rezonáns frekvencia

Pl2: $$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_s$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} u_s$$

Példa:



$t < 0 \quad u_C = u_C(-0)$

$i_L = i_L(-0)$ adott

Kérdés: $i(t) = ?$, ha $t > 0$

$$-i_s + \frac{u_C}{R} + i_L + C u_C' = 0$$

$$u_L = u_C = L i_L'$$

$$i(t) = i_L(t)$$

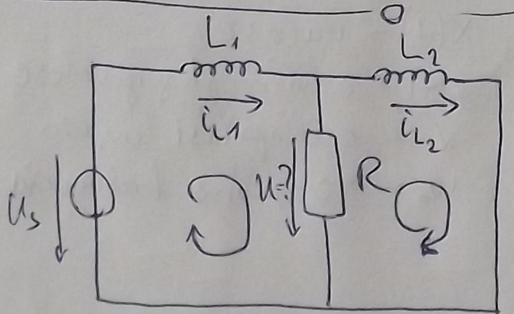
a,

$$i_L'' + \frac{1}{RC} i_L' + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} i_s$$

b,

$$\left.\begin{aligned} u_C' &= -\frac{1}{RC} u_C - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} i_s \\ i_L' &= \frac{1}{L} u_C \end{aligned}\right\}$$

$$i = i_L$$



$t = 0$ mert i_{L1}, i_{L2}

$$\left.\begin{aligned} L_1 i_{L1}' + R(i_{L1} - i_{L2}) &= u_s \\ L_2 i_{L2}' + R(i_{L2} - i_{L1}) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$t > 0 \quad u(t) = ?$

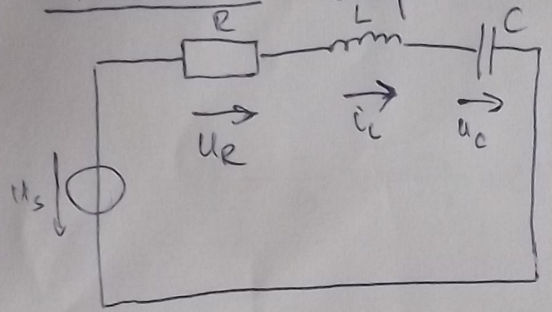
$$i_1' = -\frac{R}{L_1} i_1 + \frac{R}{L_1} i_2 + \frac{1}{L_1} u_s$$

$$i_2' = \frac{R}{L_2} i_1 - \frac{R}{L_2} i_2 \qquad u = R(i_1 - i_2)$$

Jelek 1.

Másodfokú hálózatok megoldása

II. módszer: állapotváltozós normálalak



Soros RLC

$\left.\begin{array}{l} u_C(-0) \\ i_L(-0) \end{array}\right\}$ adott

$u_R = ?$

állapotváltozós normálalak

$$\left.\begin{array}{l} i_L' = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} u_s \\ u_C' = \frac{1}{C} i_L \\ u_R = R i_L \end{array}\right\}$$

$u_C(-0)$ és $i_L(-0)$ adott $\Rightarrow$

$i_L = i_L^f + i_L^g$

$u_C = u_C^f + u_C^g \Rightarrow$

$u_R = R i_L$

$$X = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} i_L' \\ u_C' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = u_C \quad C^T = [R, 0] \quad D = 0$$

Köv. oldal $\Rightarrow$

A másodfokú differenciálegyenlet és az állapotváltozós normálalak két elsőfokú differenciális egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása

$$a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_s$$

$$x = \underbrace{x^f}_{\text{szabadválasz}} + \underbrace{x^g}_{\text{gerjesztett válasz}}$$

- a szabadválasz a homogén diff. egyenlet megoldása
- a gerjesztett válasz a teljes egy. megoldása a forrással együtt

---

A szabadválasz számolása:

- felírom a homogén diff. egyenletrendszert

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \lambda e^{\lambda t} \\ k_2 \lambda e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$(a_{11} - \lambda) k_1 + a_{12} k_2 = 0$$
$$a_{21} \cdot k_1 + (a_{22} - \lambda) k_2 = 0$$

$\Rightarrow$ Triviális megoldás : $k_1 = k_2 = 0$ $\Rightarrow$ nem ez kell

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Nem triviális megoldás

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$|A - \lambda E| = 0$ $\leftarrow$ karakterisztikus egyenlet

$$|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\frac{a_1}{a_2} = -a_{11} + a_{22} \quad \frac{a_0}{a_2}$$

$$\lambda^2 + \frac{a_1}{a_2}\lambda + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{a_1}{a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2} + 4\frac{a_0}{a_2}}}{2} =$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

sajátértékek

A sajátértékek lehetnek

1, valósak, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x^f_{(t)} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ => stabil hálózat $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

– a megoldás jellege túlcsillapított, exponenciálisan lecsengő

2, valósak $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ← ha stabil

$$x^f_{(t)} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t \cdot e^{\lambda_1 t}$$

határhelyzet

3, komplex sajátértékek

$$\lambda_1 = a + j\,b$$
$$\lambda_2 = a - j\,b$$

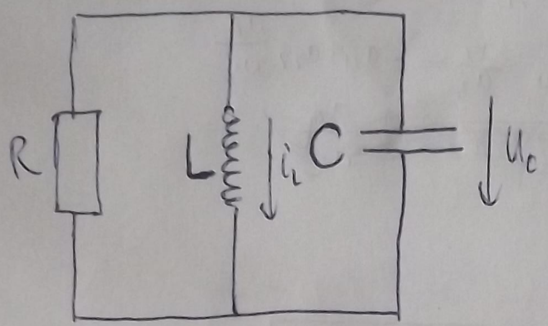
$x^f_{(t)} = C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2}$ C_1 és C_2 is komplex

– a megoldás rezgő jellegű (csillapított rezgés)

– stabil, ha a valós része a sajátértékeknek kisebb mint 0

Példa – túlcsillapított párhuzamos RLC

> Nincs forrás, ezért csak szabadválasz van.



$R = \frac{2}{3}\,\Omega$

$L = 1H$

$C = \frac{1}{2}F$

~~u(-0)~~

$u_C(-0) = 10V$

$i_L(-0) = 2A$

$u_R = ?$

$u_R = u_L = u_C$

$u_L = L i_L'$

$i_C = C u_C'$

$u_C' = -\frac{1}{RC} u_C - \frac{1}{C} i_L$

$i_L' = +\frac{1}{L} u_C$

$u_R = u_C$

$u_C = K_1 e^{\lambda t}$

$i_L = K_2 e^{\lambda t}$

$|A - \lambda E| = 0$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ +\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{RC}-\lambda & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad = \begin{vmatrix} -\lambda-3 & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2}}{2} \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

Előadás

A szabadválasz:

$$u_c = K_{11} e^{\lambda_1 t} + K_{12} e^{\lambda_2 t} = K_{11} e^{-2t} + K_{12} e^{-t}$$

$$i_L = K_{21} e^{\lambda_1 t} + K_{22} e^{\lambda_2 t} = K_{21} e^{-2t} + K_{22} e^{-t}$$

$$u_c' = -2 K_{11} e^{-2t} - K_{12} e^{-t}$$

$$i_L' = -2 K_{21} e^{-2t} - K_{22} e^{-t}$$

Kapcsolatot keresünk K_{11} K_{12} K_{21} K_{22} között

$$u_c' = -3 u_c - 2 i_L$$

$$i_L' = u_c$$

$$-2K_{11} e^{-2t} - K_{12} e^{-t} = -3(K_{11} e^{-2t} + K_{12} e^{-t}) - 2(K_{21} e^{-2t} + K_{22} e^{-t})$$

$$-2 K_{21} e^{-2t} - K_{22} e^{-t} = K_{11} e^{-2t} + K_{12} e^{-t}$$

$\forall\ t \geq 0$ esetén igaz, $t = 0$ választással:

$$-K_{11} - K_{12} = -3K_{11} - 3K_{12} - 2K_{21} - 2K_{22}$$

$$-2K_{21} - K_{22} = K_{11} + K_{12}$$

$$K_{12} = -K_{22} = A_2$$

$$K_{21} = \frac{A_1}{2}$$

$$K_{11} = A_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_c &= A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-t} \\ i_L &= -\frac{A_1}{2} e^{-2t} - A_2 e^{-t} \end{aligned}}$$

$t = 0$-ban, folytonossági feltételek

$u_c(-0) = u_c(+0)$

$i_L(-0) = i_L(+0)$

$10 = A_1 + A_2$ $\qquad A_1 = 24$

$2 = -\frac{A_1}{2} - A_2$ $\qquad A_2 = -14$

$$u_c(t) = (24 e^{-2t} - 14 e^{-t})\, \varepsilon(t)\ \text{V}$$

$$i_L(t) = (-12 e^{-2t} + 14 e^{-t})\, \varepsilon(t)\ \text{A}$$