rész I

Kinematika

2B-40

Adott egy részecske egy adott t pillanatban

$$v(t) = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t - \left(3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^2 \tag{1}$$

sebességgel halad továbbá tudjuk hogy $t = 0$ ban az $x = 8$mhelyen tartózkodott:

$$x(t = 0) = 8\mathrm{m}. \tag{2}$$

Határozzuk meg a részecske elmozdulás idő $x(t)$ függvényét, továbbá a sebesség maximális értékét!

Megoldás

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

2pt

$$x(t) = 8m + \int_0^t \left[4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\tau - \left(3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)\tau^2\right]\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

Felhasználva hogy

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{4}$$

illetve az integraciós konstanst (2) segítségével rögzítve kapjuk hogy

$$x(t) = 8m + \left[4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\tau + \left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\frac{\tau^2}{2} - \left(3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)\frac{\tau^3}{3}\right]_0^t \tag{5}$$

$$x(t) = \underline{8m + 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t + \left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2 - \left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^3} \tag{6}$$

1pt

ha

$$f(x^*) = f_{max}$$

akkor

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)\Big|_{x=x^*} = 0$$

és

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)\right)\Big|_{x=x^*} < 0$$

1pt

Felhasználva hogy

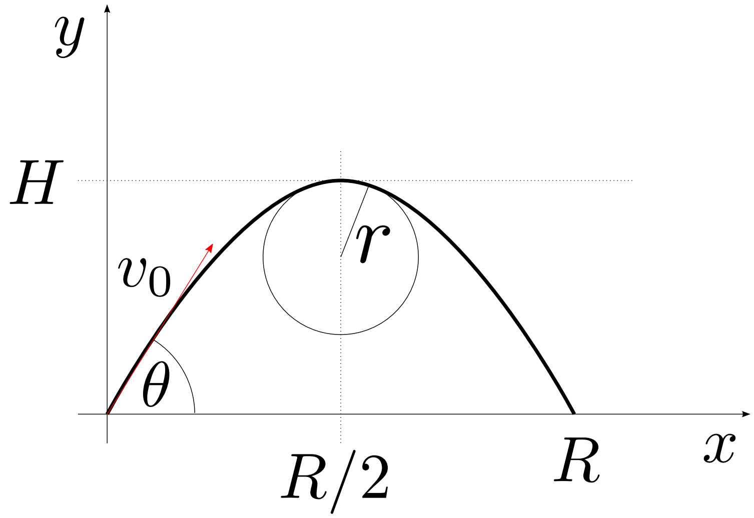
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) - 2\left(3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t)\Big|_{t=t^*} = \left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) - 2\left(3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^* = 0 \tag{9}$$

amiből

$$t^* = \frac{1}{3}\mathrm{s} \tag{10}$$



1. ábra. Hajítások geometriai és kinematikai paramétereinek definíciói.

vissza helyettesítve (1)-be kapjuk hogy

$$v_{max} = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + (2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\left(\frac{1}{3}\mathrm{s}\right) - \left(3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)\left(\frac{1}{3}\mathrm{s}\right)^2 \approx \underline{4.33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \tag{11}$$

1pt

3C-29

A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt $v_0$kezdő sebességgel kilőt lövedék röppályáját és az R lőtávolságot! A hajítások geometriai és kinematikai paramétereit az 1 ábra alapján definiáljuk.

Megoldás

$$\boxed{s(t) = s_0 + v_0 t + \tfrac{a}{2}t^2}$$

1pt

feltéve hogy a lövedék az origóból indul, a mozgás vízszintesen egy egyenletesen haladó függőlegesen pedig egy egyenletesen gyorsuló mozgás kapjuk hogy

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t, \tag{12}$$

$$y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{g}{2}t^2. \tag{13}$$

2pt

Ez a két egyenlet paraméteresen határozza meg a pályát! A pálya egyenletének meghatározásához (Egy $y(x)$ függvényt keresünk!) felyezzük ki az elsőből t-t és helyettesítsük be a másodikba!

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \tag{14}$$

$$y = v_0 \sin(\theta)\left[\frac{x}{v_0 \cos(\theta)}\right] - \frac{g}{2}\left[\frac{x}{v_0 \cos(\theta)}\right]^2 \tag{15}$$

amiből némi algebrával kapjuk hogy

$$y(x) = \mathrm{tg}(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}x^2. \tag{16}$$

1pt

A lőtávolság meghatározásához döbbenjünk rá hogy a pálya egyenlete zérus $x = R$ értékre! tehát (16) zérus helyeit kell keresni. Kiemelve x-et (16)-ből kapjuk hogy

$$y(x) = x\left[\mathrm{tg}(\theta) - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}\right]. \tag{17}$$

ennek a másodfokú egyenletnek két zérus helye van! Egy az $x = 0$ (még jó.. ezt rögzítettük a peremfeltétellel.) a másik pedig R:

$$R = \mathrm{tg}(\theta)\frac{2v_0^2\cos^2(\theta)}{g} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\frac{2v_0^2\cos^2(\theta)}{g} \tag{18}$$

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta) \tag{19}$$

ahol felhasználtuk a $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ trigonometrikus azonosságot.

1pt

3C-30
Diferenciál számítás segítségével mutassuk meg hogy a lőtávolság $\theta = 45°$ra veszi fel a maximális értékét!
Megoldás

ha

$$f(x^*) = f_{max}$$

akkor

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)\Big|_{x=x^*} = 0$$

és

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)\right)\Big|_{x=x^*} < 0$$

2pt

Differenciálva (19)-t θ szerint kapjuk hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}R(\theta) = \frac{v_0^2}{g}2\cos(2\theta), \tag{20}$$

illetve

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}R(\theta) = -\frac{v_0^2}{g}4\sin(2\theta). \tag{21}$$

Az első kifejezés zérus ha

$$\cos(2\theta) = 0 \tag{22}$$

tehát

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Mivel a fizikailag releváns szögek a $[0, \pi/2]$ zárt intervallumban keresendőek ebből

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45°. \tag{24}$$

2pt

Ellenőrzés képpen vizsgáljukl meg hogy a második derivált negatív!

$$-\frac{v_0^2}{g}4\sin(2\theta) = -\frac{v_0^2}{g}4\sin(\pi/2) = -4\frac{v_0^2}{g} \tag{25}$$

1pt

3C-32
Határozzuk meg hogy milyen θ^* kilövési szög mellett lesz a H emelkedési magasság egyenlő az R lőtávolsággal!
Megoldás
Mivel a röppálya egy parabola ezért a maximumát a lőtávolság felénél fogja felvenni!

$$H = y_{MAX} = y(R/2) \tag{26}$$

3pt

Behelyettesítve a (16) pálya egyenletbe a (19) lőtávolság felét kapjuk hogy

$$H = \operatorname{tg}(\theta)\left[\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)\right] - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta)}\left[\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)\right]^2 \tag{27}$$

$$= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\left[\frac{v_0^2}{g}\sin(\theta)\cos(\theta)\right] - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta)}\left[\frac{v_0^2}{g}\sin(\theta)\cos(\theta)\right]^2 \tag{28}$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\sin^2(\theta) - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2(\theta) \tag{29}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2(\theta) \tag{30}$$

1pt

A keresett θ^* meghatározásához tegyük egyenlővé a (30) és (19) kifejezéseket!

$$R(\theta^*) = H(\theta^*) \tag{31}$$

$$\frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta^*) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2(\theta) \tag{32}$$

$$2\sin(\theta^*)\cos(\theta^*) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta) \tag{33}$$

$$\operatorname{tg}(\theta^*) = 4 \tag{34}$$

ez teljesül ha $\theta^* \approx 75.96°$.

1pt

4C-28

Fejezzük ki a röppálya r görbületi sugarát abban a pillanatban amikor a lövedék a pálya leg magasabb pontjában van!

Megoldás

Amikor a lövedék a pálya legmagasabb pontjában van akkor sebességének csak $x$irányú komponense lehet melynek értéke

$$v_x = v_0\cos(\theta) \tag{35}$$

továbbá ebben a pillanatban a lövedék gyorsulása merőleges sebességének irányára és nagysága g! tekinthetünk ebben a pillanatban a részecskére tehát úgy mintha $v_t = v_x$tangenciális sebességgel és $a_{cp} = g$ centripetális gyorsulással haladó részecske lenne.

4pt

Ebben az esetben alkalmazhatjuk az ismert

$$a_{cp} = \frac{v_t^2}{r} \tag{36}$$

összefüggést! Tehát

$$r = \frac{v_0^2\cos^2(\theta)}{g} \tag{37}$$

1pt

3C-38

Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb 1mtávolsága tud elugrani. Mekkora a maximális vízszintes irányú sebességre képes a szöcske ha az ugráshoz szükséges időt elhanyagoljuk?

Megoldás

Ahogy már beláttuk feljebb az R lőtávolság (amilyen messzire a szöcske ugrik) akkor maximális ha az elrugaszkodás pillanatában

$$\theta = \pi/4. \tag{38}$$

Ekkor

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{39}$$

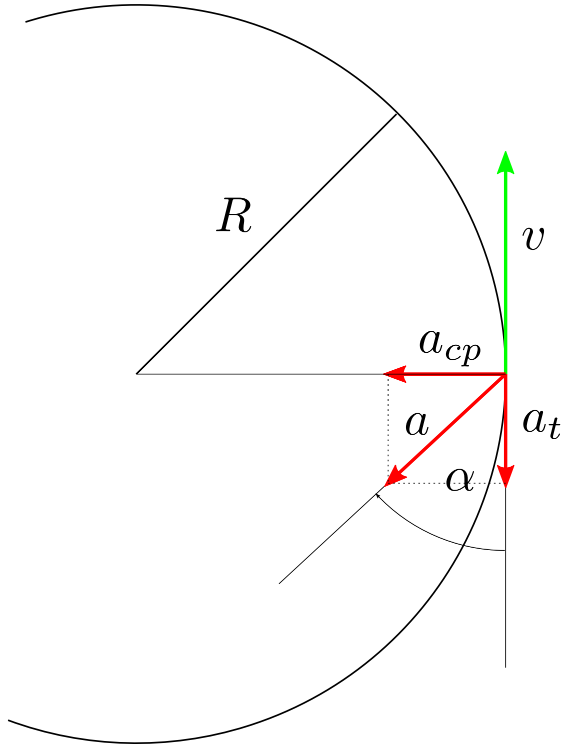
Figyelembe véve hogy a sebesség vízszintes komponense

$$v_x = v_0\cos(\theta) \tag{40}$$

kapjuk hogy

$$v_0 = \sqrt{R_{max}g} \tag{41}$$

$$v_x = \sqrt{R_{max}g}\cos(\pi/4) = \sqrt{\frac{R_{max}g}{2}} \approx 2.2147\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{42}$$



2. ábra. Korpalyan gyorsulo autó a 4C-26 feladathoz.

5pt

4C-26

Egy $R = 300$m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó $a_t = 1,2\text{m/s}^2$állandó gyorsulással fékezni kezd. a) Határozzuk meg a gyorsulás irányát és nagyságát abban a pillanatban amikor a kerületi sebesség $v = 15\text{m/s}$.

Megoldás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \tag{43}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{a_{cp}}{a_t} \tag{44}$$

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + a_t^2} \tag{45}$$

5pt

2C-54

Szakaszosan egyenletesen gyorsuló mozgás minden szakaszában alkalmazhatjuk az egyenletes gyorsulás kinematikáját!

Megoldás

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \tfrac{a}{2}t^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = a$$

2pt

Szakasz I.:

Mivel az origóból indulunk zérus gyorsulással zérus kezdősebességgel ezért a szakasz egész ideje alatt az origóban maradunk:

$x(0) = 0\text{m}, \quad x(2) = 0\text{m}$

$v(0) = 0\text{m/s}, \quad v(2) = 0\text{m/s}$

$a(0) = 0\text{m/s}^2, \quad a(2) = 0\text{m/s}^2$

Szakasz II.:

egyenletes gyorsulás $a = 2\text{m/s}^2$-al $dt = 4s$
$x(6) = x(2) + v(2)dt + \frac{a}{2}(dt)^2 = 0 + 0 + 16 = 16\text{m}$
$v(6) = v(2) + a(dt) = 0 + 2 * 4 = 8\text{m/s}$
Szakasz III.:
egyenletes gyorsulás $a = -1\text{m/s}^2$-al $dt = 2s$
$x(8) = x(6) + v(6)dt + \frac{a}{2}(dt)^2 = 16 + 8 * 2 - \frac{1}{2} * 4 = 30\text{m}$
$v(8) = v(6) + a(dt) = 8 - 1 * 2 = 6\text{m/s}$
Szakasz IV.:
egyenletes gyorsulás $a = 1\text{m/s}^2$-al $dt = 2s$
$x(10) = x(8) + v(8)dt + \frac{a}{2}(dt)^2 = 30 + 6 * 2 + \frac{1}{2} * 4 = 44\text{m}$
$v(10) = v(8) + a(dt) = 6 + 1 * 2 = 8\text{m/s}$
Szakasz V.:
nincs gyorsulás $a = 0\text{m/s}^2$, $dt = 2s$
$x(12) = x(10) + v(10)dt = 44 + 8 * 2 = 60\text{m}$
$v(12) = v(10) = 8\text{m/s}$

3pt

rész II

Dinamika

5B-20

Egy gépkocsi 18m sugarú függőleges síkú kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető azt tapasztalja hogy épp csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a kocsi.

Megoldás

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$a_{cp} = \frac{v_t^2}{R}$$

1pt

erő mérleg:

$$mg + F_t = ma_{cp} \tag{46}$$

mivel a kocsi „épp csak érinti”: $F_t = 0$

A körmozgás kinematikai centripetális gyorsulásának kinematikai összefüggését felhasználva kapjuk hogy

$$mg = ma_{cp} = m\frac{v^2}{R}. \tag{47}$$

3pt

A sebesség ebből

$$v = \sqrt{gR} \approx 13.288\text{m/s}. \tag{48}$$

1pt

5B-32

Egy1.4m hosszú fonálinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége 2.2m/s. akkor a fonal 20°-os szöget alkot afüggőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban

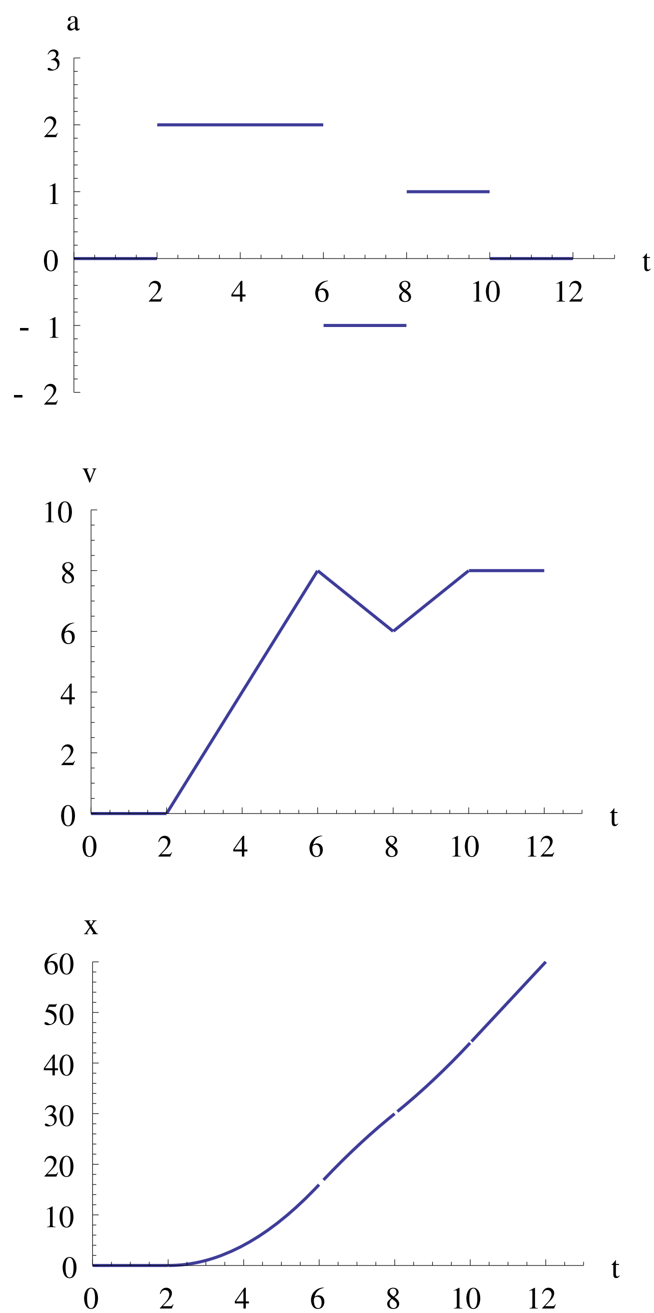
a) az ingatest centripetális gyorsulását!
b) az ingatest tangenciális gyorsulását!
c) a fonalat feszítő erőt. ha az ingatest tömege 600 g!

Megoldás

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$a_{cp} = \frac{v_t^2}{R}$$

1pt



3. ábra. Gyorsulás sebesség és megtett út grafikonok a 2C-54 feladathoz.

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} = 3.457\mathbf{m/s}^2 \tag{49}$$

. Newton törvénye a tangenciális irányban

$$ma_t = mg\sin(\alpha) \rightarrow a_t = 3.35\mathbf{m}/s^2 \tag{50}$$

. Newton törvénye a centripetális irányban

$$ma_{cp} = F_K - mg\cos(\alpha) \tag{51}$$

$$F_K = m\frac{v^2}{L} + mg\cos(\alpha) = 0.6\mathbf{kg}[3.457\mathbf{m/s}^2 + 9.218\mathbf{m/s}^2] = 7.605\mathbf{N} \tag{52}$$

.

4pt

5B-52

Egy 4kg tömegű testet az ÁBRÁNAK megfelelően $F = 20$N erővel húzunk. Mekkora a test gyorsulása ha a lest és a talaj közötti csúszó súrlódási együttható 0.2?

Megoldás

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

1pt

Az erőmérleg a függőleges irányban:

$$F\sin(\alpha) + F_t = mg. \tag{53}$$

Az erőmérleg a vízszintes irányban

$$F\cos(\alpha) - F_s = ma_x. \tag{54}$$

A csúszó surlódási erő és a tartó erő kapcsolata

$$F_s = \mu F_t \tag{55}$$

3pt

Ebből a gyorsulás:

$$a_x = \frac{F}{m}\left[\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)\right] - \mu g = 2.868\mathrm{m}/s^2 \tag{56}$$

1pt

5B-58

Egy gépkocsi 80m sugarú vízszintes körpályán mozog. Az ÁBRA azt a pillanatot mutatja, amikor sebessége éppen 10m/s és a gyorsulása **a**.

a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása?

b) Mekkora a tangenciális gyorsulás?

c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi megállásig, ha érintő menti gyorsulása állandó?

d) Az úttest vízszintes - azaz a kanyarban nem túlemelt a pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ÁBRÁN mutatott pillanatban a gépkocsi ne csússzon meg?

Megoldás

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$a_{cp} = \frac{v_t^2}{R}$$

1pt

A centripetális gyorsulás tehát a szokásos

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R} \tag{57}$$

alakot ölti. A tangenciális gyorsulás és a centripetális gyorsulás geometriai kapcsolata

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{a_{cp}}{a_t}. \tag{58}$$

Ebből

$$a_t = \frac{v_0^2}{R}\mathrm{ctg}(\alpha). \tag{59}$$

A gyorsulás abszolult értékének és a centripetális gyorsulás nagyságának geometriai kapcsolata

$$\sin(\alpha) = \frac{a_{cp}}{a}. \tag{60}$$

Ebből

$$a = \frac{v_0^2}{R\sin(\alpha)}. \tag{61}$$

2pt

A tangenciális irányban megtett útra alkalmazva az egyenletesen lassuló mozgás összefüggését

$$s = v_0 t * - \frac{a_t}{2}\left(t*\right)^2. \tag{62}$$

Itt t^*-ot abból határozzuk meg hogy ennyi idő kell ahhoz hogy az autó megálljon, azaz

$$v_0 = a_t t * . \tag{63}$$

Vissza helyettesítve (62)-be kapjuk hogy

$$s = \frac{v_0^2}{a_t} - \frac{a_t}{2}\left(\frac{v_0}{a_t}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a_t} = \frac{v_0^2}{2\frac{v_0^2}{R}\mathrm{ctg}(\alpha)} = \frac{R}{2}\mathrm{tg}(\alpha). \tag{64}$$

1pt

A tapadó surlódási erő maximális értéke

$$F_s = \mu F_t = \mu mg. \tag{65}$$

Mivel csak ez az erő hat a pálya síkjában a jármű dinamikáját a síkban ez az erő határozza meg! Tehát ennek az erőnek kell fedeznie a teljes gyorsulást! Ebből kapjuk hogy:

$$\mu mg \geq ma = \frac{mv_0^2}{R\sin(\alpha)}. \tag{66}$$

az az:

$$\mu \geq \frac{v_0^2}{Rg\sin(\alpha)} = \tag{67}$$

1pt

6B-10

Egy rugó által kifejlett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, Ahol $k = 200\mathrm{N}/m^3$. Mennyi munkát végzünk, míg 0 m-ról 0.3 m re nyújtjuk?

Megoldás

$$\boxed{W = \int \mathbf{F}d\mathbf{s}}$$

1pt

$$F_R = -kx^3 \tag{68}$$

Mivel én a rugó ellen dolgozok

$$F_{\acute{E}n} = -F_R. \tag{69}$$

2pt

Az előjel a végzett munkában is negatív marad!

$$W_{\acute{E}n} = \int_{x_0}^{x_1} F_{\acute{E}n}(x)\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1} F_R(x)\mathrm{d}x \tag{70}$$

.

1pt

Kiértékelve az integrált egyszerűen kapjuk hogy

$$W_{\acute{E}n} = \int_{x_0}^{x_1} kx^3\mathrm{d}x = \frac{k}{4}\left[x_1^4 - x_0^4\right]. \tag{71}$$

.

1pt

6B-28

Az ÁBRÁN látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2.4m távolságba húz el egy 23kg-os ládát az érdes ($\mu = 0.5$) padlón. A láda végsebessége $v = 0.6\mathrm{m/s}$. A munkatétel átfogalmazott változatának alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember!

Megoldás

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$W = \int \mathbf{F} d\mathbf{s}$$

1pt

A erőmérleg függőleges irányban

$$F\sin(\alpha) + F_t = mg. \tag{72}$$

A surlódási erő és a tartó erő kapcsolata

$$F_s = \mu F_t \tag{73}$$

0.5pt

A munka tétel értelmében a befektetett munka a test kinetikus energiájának növelésére fordítódik. A testre ható erők vízszintes minden idő pillanatban állandóak tehát a végzett munka egyszerűen $W = \left(\sum F\right) s$! Az energia mérleg tehát:

$$(F\cos(\alpha) - F_s)s = \frac{1}{2}mv^2 \tag{74}$$

2.5pt

Ebből

$$(F\cos(\alpha) + \mu F\sin(\alpha) - \mu mg)s = \frac{1}{2}mv^2. \tag{75}$$

Amiből

$$F = \frac{\frac{1}{2}mv^2 + \mu mgs}{(\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha))}. \tag{76}$$

1pt

6C-58

Egy fiú a 3 kg tömegű. 2m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy másik vége éppen leér a földre.

a) Határozzuk meg, hogy hogyan változik a gyerek álal kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb ereszti!

b) Az $W = \int \mathbf{F} d\mathbf{s}$ összefüggés felhasználásával számitsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez míg a teljes láncot a földre erszti!

Megoldás

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$W = \int \mathbf{F} d\mathbf{s}$$

1pt

Mivel egyenletes sebességgel mozog a lánc ezért gyorsulás nincs tehát kezdetben a teljes kötél súlyát tartja a gyerek

$$F(0) = mg. \tag{77}$$

Ha már egy s hosszúságú darab a földön van akkor azt a darabot már nem kell tartani tehát

$$F(s) = mg - mg\frac{s}{L}. \tag{78}$$

3pt

Mivel a gyerek által kifejtett erő ellenkező irányú az elmozduláshoz képest

$$W = -\int_0^L F(s)\mathrm{d}s. \tag{79}$$

Amit kiértékelve kapjuk hogy

$$W = -\int_0^L \left[mg - mg\frac{s}{L}\right]\mathrm{d}s = \left[mgL - mg\frac{L^2}{2L}\right] = \frac{mgL}{2}. \tag{80}$$

1pt

rész III
Energia, munka és lendület

7A-10

Megoldás

Az energia megmaradás törvényét alkalmazva a kezdeti helyzeti energia

$$E_1 = mgh, \tag{81}$$

az alsó pozícióban teljes mértékben kinetikus energiává alakul:

$$E_2 = \frac{1}{2}kh^2 \tag{82}$$

Az energia mérleg tehát

$$mgh = \frac{1}{2}kh^2. \tag{83}$$

4pt

Amiből

$$h = \frac{2mg}{k} \tag{84}$$

1pt

7B-18

Megoldás

Energia a kezdeti pozícióban

$$E_1 = mgR \tag{85}$$

Energia az elválás pillanatában

$$E_2 = mgR\cos(\theta) + \frac{1}{2}mv^2 \tag{86}$$

Az elválás pillanatában a gravitációs erő felületre vett normális komponense fedezi a centripetális gyorsulást, tehát

$$\cos(\theta) = \frac{a_{cp}}{g}. \tag{87}$$

körmozgás kinematikájából:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}. \tag{88}$$

3pt

Az energia mérleg:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma_{cp}R = \frac{1}{2}mRg\cos(\theta) \tag{89}$$

$$mgR = mgR\cos(\theta) + \frac{1}{2}mRg\cos(\theta) \tag{90}$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{3} \tag{91}$$

2pt

7B-21
Megoldás
A helyzeti energiát a pecek magasságához igazítva kezdetben a potenciális energia

$$E_1 = mg\frac{2}{3}l. \tag{92}$$

A végső helyzetben a teljes energia

$$E_2 = mg\frac{1}{3}l + \frac{1}{2}mv^2. \tag{93}$$

Mivel a végső helyzetben a körmozgás sugara $l/3$ a centripetális gyorsulás ezen a ponton.

$$a_{cp} = 3\frac{v^2}{l} \tag{94}$$

Mivel a kötél merőleges ezért a centripetális gyorsulást a kötél erő és a nehézségi erő összege adja

$$ma_{cp} = mg + K. \tag{95}$$

3pt

Az energia mérlegből

$$mg\frac{2}{3}l = mg\frac{1}{3}l + \frac{1}{2}mv^2 \tag{96}$$

a sebesség

$$v^2 = \frac{2gl}{3} \tag{97}$$

1pt

Ezt felhasználva a kötélerő

$$K = ma_{cp} - mg = m\left[3\frac{v^2}{l} - g\right] = m\left[3\frac{2\frac{gl}{3}}{l} - g\right] = mg \tag{98}$$

1pt

8A-4
Megoldás
Kezdeti és vég állapotban az energia és a lendület

$$E_0^{kin} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad I_0 = mv_0, \tag{99}$$

$$E_1^{kin} = mv^2, \quad I_1 = 2mv. \tag{100}$$

Mivel a testek össze ragadva közlekednek tovább csak az energia megmaradás érvényesül

$$I_0 = I_1 \tag{101}$$

3pt

Ebből

$$mv_0 = 2mv \tag{102}$$

$$v = \frac{v_0}{2} \tag{103}$$

1pt

A kinetikus energia relatív megváltozása pedig

$$(K-K_0)/K_0 = \frac{\frac{1}{2}2m(\frac{v_0}{2})^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = 2(\frac{1}{2})^2 - 1 = -1/2 \tag{104}$$

1pt

8A-34
Megoldás
Egy bejövő kis térfogat elem inpulzusa kezdetben:

$$I_1 = \Delta mv = \mu\Delta t \cdot v \tag{105}$$

Miután a turbina lapátjáról vissza verődött:

$$I_2 = -\Delta mv \tag{106}$$

Newton 3. törvényének értelmében a turbina lapátra ható erő tehát:

$$F = \Delta I/\Delta t = \mu\Delta t 2v/\Delta t = 2\mu v \tag{107}$$

5pt

8A-40
Megoldás
adott M μ g_{hold}

$$F = Mg_{hold} = \Delta I/\Delta t = mv/\Delta t = \mu\Delta tv/\Delta t = \mu v \tag{108}$$

$$v = \frac{Mg_{hold}}{\mu} \tag{109}$$

5pt

8C-48
Megoldás
Mivel a kötelet egyenletes sebességgel engedjük le

$$s = vt. \tag{110}$$

A kötél tartásához szükséges erő minden adott pillanatban ellensúlyozza a gravitációs erőt

$$F_t = mgs/l = mgvt/l \tag{111}$$

2pt

Ezen kívül minden pillanatban meg kell állítani a beérkező kis darab köteleket

$$F_l = \Delta I/\Delta t \tag{112}$$

az inpulzus megváltozása

$$\Delta I = \Delta mv = (m\Delta s/l)v \tag{113}$$

tehát

$$F_l = \frac{m}{l}v^2 \tag{114}$$

2pt

Az asztalra gyakorolt teljes erő tehát

$$F = \frac{m}{l}\left[gvt + v^2\right] \tag{115}$$

1pt

9C-32

Megoldás

energia mérleg-I

$$E_1 = E_{pot}^{(1)} = mgR = mgR \tag{116}$$

$$E_2 = E_{kin}^{(1)} = \frac{mv_0^2}{2} \tag{117}$$

$$v_0 = \sqrt{2gR} \tag{118}$$

mivel rugalmas az ütközés ezért az energia és a lendület is megmarad!

energia mérleg-II

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{3mv_2^2}{2} \tag{119}$$

impulzus mérleg-II

$$mv_0 = -mv_1 + 3mv_2 \tag{120}$$

2pt

a tömegekkel egyszerűsítve

$$v_0 = -v_1 + 3v_2 \tag{121}$$

$$v_0^2 = v_1^2 + 3v_2^2 \tag{122}$$

$$v_0 + v_1 = 3v_2 \tag{123}$$

$$v_0^2 - v_1^2 = (v_0 + v_1)(v_0 - v_1) = 3v_2^2 \tag{124}$$

$$(v_0 - v_1)3v_2 = 3v_2^2 \tag{125}$$

v_0 ismeretében ennek 2 megoldása van vagy $v_2 = 0$ vagy

$$v_0 - v_1 = v_2 \tag{126}$$

A fizikai megoldás a második! Kihasználva ezt és hogy

$$v_0 + v_1 = 3v_2 \tag{127}$$

2pt

kapjuk hogy

$$v_2 = v_0/2 = \sqrt{gR/2}. \tag{128}$$

$$v_1 = v_0/2 = \sqrt{gR/2}. \tag{129}$$

Ezen kinetikus energiák fognak potenciális energiává alakulni! Vegyük észre hogy mivel ugyan olyan sebességgel mozognak a testek ezért ugyan olyan magasságba fognak emelkedni!

energia mérleg-III

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{4}mgR \to h_1 = R/4 \tag{130}$$

$$3mgh_2 = \frac{1}{2}3mv_2^2 = \frac{1}{4}3mgR \to h_2 = R/4 \tag{131}$$

1pt

rész IV

Forgó mozgás dinamikája

10C-48

Megoldás

Mivel a test nyugalomban van ezért se gyorsulás se szöggyorsulás nincs

$$R\alpha = a = 0 \tag{132}$$

Erő mérleg függőleges irányba

$$F + S_2 + N_1 - W = 0 \tag{133}$$

Erő mérleg vízszintes irányba

$$S_1 - N_2 = 0 \tag{134}$$

Forgatónyomaték mérleg

$$(F - S_1 - S_2)R = 0 \tag{135}$$

Tabadó surlódás és tartó erő viszonya ha „épp hogy nem mozdul” a test

$$\mu N_1 = S_1 \tag{136}$$

$$\mu N_2 = S_2 \tag{137}$$

3pt

A surlódási erőket vissza írva a mérleg egyenletekbe:

$$F + \mu N_2 + N_1 - W = 0 \tag{138}$$

$$\mu N_1 - N_2 = 0 \tag{139}$$

$$(F - \mu N_1 - \mu N_2) = 0 \tag{140}$$

N_2-t kifejezve

$$F + \mu^2 N_1 + N_1 - W = 0 \tag{141}$$

$$F - \mu N_1 - \mu^2 N_1 = 0 \tag{142}$$

(141)-ből kivonva (142)-t

$$\mu N_1 + 2\mu^2 N_1 + N_1 - W = 0 \tag{143}$$

$$N_1 = \frac{W}{2\mu^2 + \mu + 1} \tag{144}$$

Vissza helyettesítve (142)-ba

$$F = \frac{\mu + \mu^2}{2\mu^2 + \mu + 1} W = 0.375\ W \tag{145}$$

2pt

11C-14
Megoldás
„csúszas mentesen gördül” tehát az érintkezési pont a talajhoz képest mindig nyugalomban van! Ez akkor lehet ha

$$|v_t| = |v_{TKP}| \tag{146}$$

A kerék elsőpontjában a $\vec{v}_{TKP}$ és $\vec{v}_t$ vektorosan adódik össze tehát a sebesség abszolult értéke:

$$|v| = \sqrt{2} v_{TKP} \tag{147}$$

5pt

12B-19
Megoldás
„csúszás nélkül” a kötél együtt mozog a csigával

$$a = R\alpha \tag{148}$$

A testek dinamikai egyenletei

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \tag{149}$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \tag{150}$$

A csiga dinamika egyenlete

$$R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{1}{2} M R^2 \alpha \tag{151}$$

2pt

a)

$$T_1 = m_1 g + m_1 a \tag{152}$$
$$T_2 = m_2 g - m_2 a \tag{153}$$
$$(T_2 - T_1) = \frac{1}{2} M a \tag{154}$$

Be helyettesítve a kötél erők fenni kifejezését:

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{1}{2} M a \tag{155}$$

a gyorsulás tehát:

$$(m_2 - m_1)\, g = \left(\frac{1}{2} M + m_1 + m_2\right) a \tag{156}$$
$$a = \frac{m_2 - m_1}{M/2 + m_1 + m_2} g \tag{157}$$

Vissza írva a kötél erők kiifejezésébe

$$T_1 = m_1 g + m_1 \frac{m_2 - m_1}{M/2 + m_1 + m_2} g \tag{158}$$
$$T_2 = m_2 g - m_2 \frac{m_2 - m_1}{M/2 + m_1 + m_2} g \tag{159}$$

2pt

Egyenletesen gyorsuló mozgás !

$$s_1 = \frac{a}{2} t_1^2 \tag{160}$$
$$v_1 = a t_1 \tag{161}$$
$$v_1 = a\sqrt{2 s_1 / a} = \sqrt{2 s_1 a} = \sqrt{2 s_1 \frac{m_2 - m_1}{M/2 + m_1 + m_2} g} \approx 4.33 \tfrac{m}{s} \tag{162}$$

1pt

12B-28
Megoldás

$$\boxed{\sum_i I_i \omega_i = \text{const.}}$$

Alkalmazhatjuk a perdület megmaradás törvényét!

$$\frac{1}{2} 3 m R^2 \omega_0 = \frac{1}{2} 3 m R^2 \omega + \frac{1}{2} m R^2 \omega \tag{163}$$

2pt

$$3\omega_0 = 4\omega \tag{164}$$
$$\omega = \frac{3}{4} \omega_0 \tag{165}$$

0.5pt

Az energia mérleg a keletkezett hő figyelembe vételével:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} 3 m R^2\right) \omega_0^2 = Q + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} 3 m R^2\right) \omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right) \omega^2 \tag{166}$$

2pt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}3mR^2\right)\omega_0^2 = Q + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}3mR^2\right)\left(\frac{3}{4}\omega_0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{3}{4}\omega_0\right)^2 \tag{167}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}3mR^2\right)\omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}3mR^2\right)\left(\frac{3}{4}\omega_0\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{3}{4}\omega_0\right)^2 = Q \tag{168}$$

$$\left[\left(\frac{3}{16}mR^2\right)\omega_0^2\right] = Q \tag{169}$$

0.5pt

12B-48
Megoldás

Perdület nem marad meg energia megmarad. Az erő mindíg merőleges az elmozdulásra tehát nem tud munkát végezni. Az erőnek van olyan komponense amely véges forgatónyomatékot okoz mivel az erő nem a pecek középpnotjába mutat!

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow v_1 = v_2 \tag{170}$$

5pt

12B-50-52
Megoldás

mivel az erő mindíg a középpontba mutat a perdület megmarad! (fontos hogy súrlódás mentes a felület.. tehát nincs más erő csak a kötél erő..)

általában a sebesség nem lesz merőleges az erőre tehát az energia nem marad meg!

kezdetben a perdület:

$$mr_0^2\omega_0 = mr_0v_0 = \text{const.} \tag{171}$$

$$v = \frac{r_0}{r}v_0 \tag{172}$$

Akarmilyen ugyesen is rancibáljuk a golyót a lyukon keresztül a lendület mindig megmarad! (**12B-52**...)

2pt

A mozgási energia megváltozása ha r_0 ról $r_0/2$ -re húzzuk a testet:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(\frac{r_0}{r}v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mv_0^2 \tag{173}$$

1pt

Feltéve hogy

$$F = m\frac{v^2}{r} = m\frac{(\frac{r_0}{r}v_0)^2}{r} = m\frac{r_0^2v_0^2}{r^3} \tag{174}$$

$$W = \int_{r_0/2}^{r_0}\left[m\frac{r_0^2v_0^2}{r^3}\right]\mathrm{d}r = \frac{mr_0^2v_0^2}{-2}\left[\frac{1}{r^2}\right]_{r_0/2}^{r_0} = \frac{mr_0^2v_0^2}{-2}\left[\frac{1}{r_0^2} - \frac{4}{r_0^2}\right]_{r_0/2}^{r_0} = \frac{3}{2}mv_0^2 \tag{175}$$

2pt

13B-7
Megoldás

„csúszás nélkül gördül”

$$a = R\alpha \tag{176}$$

a leejtőre merőlegesen nincs gyorsulás:

$$Mg\cos\theta - F_t = 0 \tag{177}$$

A leejtővel párhuzamosan a gyorsulást a súrlódás és a nehézségi erő leejtővel párhuzamos komponense szabja meg:

$$Mg\sin\theta - F_s = Ma \tag{178}$$

Csak a súrlódásnak van forgatónyomatéka:

$$F_sR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \tag{179}$$

mivel nem csúszik meg ezért a surlódási erő a kritikus érték alatt van

$$F_s \leq \mu F_t \tag{180}$$

3pt

$$F_s = \frac{1}{2}Ma \tag{181}$$

Ezt vissza helyettesítve (178)-be kapjuk hogy:

$$Mg\sin\theta/3 = F_s. \tag{182}$$

$$Mg\cos\theta = F_t \tag{183}$$

Tehát (180)-be vissza írve F_s és F_t kifejezéseit kapjuk hogy

$$Mg\sin\theta/3 \leq \mu Mg\cos\theta \tag{184}$$

$$\mathrm{tg}\theta/3 \leq \mu \tag{185}$$

2pt

13B-20
Megoldás
A forgó tárcsa által gyakorolt forgatónyomaték

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{186}$$

A precesszió és a forgató nyomaték kapcsolata

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} = \vec{\omega}_p \times I\vec{\omega} \tag{187}$$

$$|\vec{M}| = \omega_p \frac{1}{2}R^2 m\omega \tag{188}$$

$$mgd/2 = \omega_p \frac{1}{2}R^2 m\omega \tag{189}$$

4pt

$$\frac{gd}{R^2\omega} = \omega_p \tag{190}$$

$$\nu = 2\pi\omega_p \approx 0.2\frac{fordulat}{min} \tag{191}$$

1pt

13B-31
Megoldás
Vizsgáljuk az érintkezési pontra vonatkoztatott forgatónyomatékot! Erre a pontra se a surlódási se a tartó erőnek sem pedig a nehézségi erőnek nincs forgatónyomatéka! Egyedül a szalag által gyakorolt erőnek lehet forgatónyomatéka!Ez a forgatónyomaték eltűnik ha az erő iránya a támadási pontján keresztül az érintkezési pontba mutat! Tehát

$$\sin\theta = \frac{r}{R} \tag{192}$$

rész V
Inercia erők és Relativitás elmélet

14C-30
Megoldás

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{F}_{cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \end{gathered}}$$

M

3pt

a Corriolis erő merőleges a sebességre ezért $\vec{\omega}$-csavarodási irányával ellenkező módon kell körbe járni a ringlispilt! Tehát a forgó koordinátarendszer szemszögéből körmozgást kell végezni! A Corrilois erő és a centrifugális erő abszolult értékének megeggyezéséből kapjuk hogy

$$m\omega^2 r = 2m\omega v, \tag{193}$$

1pt

ebből

$$v = \frac{\omega r}{2}. \tag{194}$$

1pt

14C-39
Megoldás

A ringlispil koordináta rendszerében a dinamikai egyenlet:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}, \tag{195}$$

ahol

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \tag{196}$$

A kétszeres kereszt szorzat a fennti definiíciókkal

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{197}$$

2pt

Tehát a mozgás gyenletek szétesnek függőleges és radiális komponensekre!

$$a_z = -g \tag{198}$$

ebből a függőleges elmozdulás:

$$z = h - \frac{1}{2} g t^2 \tag{199}$$

amiből a földetérésig eltelt idő

$$t = \sqrt{2h/g}. \tag{200}$$

A radiális mozgás leírásakor élhetünk azzal a közelítéssel hogy a Coriolis erőt elhayagoljuk ha a sebesség a mozgás során, amint kezdetben is, kicsi (kezdetben nulla..)! Ebből kapjuk hogy (ha kezdetben nem volt y koorinátás komponens.. ezt egy megfelelő forgstással mindíg megtehetjük..)

$$a_x = \omega^2 x \tag{201}$$

Feltéve továbbá hogy a kérdéses radiális elmozdulás kicsi, a fenti finamikai egyenletben élhetünk az $x \approx r_0$ közelítéssel.

$$a_x = \omega^2 r_0. \tag{202}$$

Ebből a megtett út megkapható az egyenletesen gyorsuló test kinematikájából azaz kapjuk hogy:

$$\Delta s \approx a_x t^2/2 = \omega^2 r_0 t^2/2 \tag{203}$$

behelyetesítve (200)-t kapjuk hogy

$$\Delta s \approx \frac{\omega^2 r_0 h}{g} \tag{204}$$

2pt

Ez a bizonyítandó kifejezés.

Ez akkor áll fenn ha

$$|\vec{F}_{cor}| \ll |\vec{F}_{cf}| \tag{205}$$

azaz

$$2m\omega v \ll m\omega^2 r_0 \tag{206}$$

behelyettesítve ide a földetérés pillanatában a gravitációs gyorsulás hatására keletkezett sebességet $v \approx gt$

$$2m\omega g\sqrt{2h/g} \ll m\omega^2 r_0 \tag{207}$$

$$\frac{8gh}{\omega^2 r_0^2} \ll 1 \tag{208}$$

1pt

41B-7
Megoldás
A labor rendszerben megtett út és sebesség meghatározza a labor rendszerben mért időt.

$$v_L = \frac{s_L}{t_L} \to t_L = \frac{s_L}{v_L} \tag{209}$$

A részecske saját ideje a relativisztikus idődilatációs összefüggésből

$$t_R = t_L\sqrt{1 - v_L^2/c^2} = \frac{s_L}{v_L}\sqrt{1 - v_L^2/c^2} \approx 75\text{ns} \tag{210}$$

5pt

41A-15
Megoldás
A relativisztikus sebesség összeadás szerint

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{0.9 + 0.9}{1 + 0.9^2}c \approx 0.994475c \tag{211}$$

5pt

41A-22
Megoldás
Az energia megmaradás törvényét a relativisztikus részecskék nyugalmi energiájának figyelembevételével kell felírni!

$$M_{He^3}c^2 + E_{min} = M_{H^2}c^2 + M_p c^2 \tag{212}$$

$$E_{min} = (M_{H^2} + M_p - M_{He^3})c^2 \approx 5.472\text{MeV} \tag{213}$$

5pt

41B-33
Megoldás
Legyenek x_1, t_1 illetve x_2, t_2 az űrhajó elejének illetve végének hely koordinátái és a hozzájuk tartozó helyen lévő órák állása a Föld koordináta rendszerében. Legyen továbbá x_1', t_1' illetve x_2', t_2' az űrhajó koordináta rendszerében ugyen ezen helyek és idők!

A Föld koordináta rendszeréből az űrhajó rendszerébe a Lorentz transzformáció adja meg a megfelelő váltást:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \tag{214}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{215}$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{216}$$

A Földi koordinátákat az űrhajó rendszeréből inverz Lorentz transzformációval kapjuk:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \tag{217}$$

$$x = \gamma(x' + vt') \tag{218}$$

3pt

Tehát a Földi rendszerben az első és a hátsó órák állásának különbsége:

$$t_1 - t_2 = \gamma\left(t_1' - t_2' + \frac{v}{c^2}(x_1' - x_2')\right) \tag{219}$$

Mivel az űrhajó rendszerében az órák szinkronban mozognak $t_1' - t_2' = 0$ továbbá az űrhajó rendszerében az űrhajó hossza $L = x_1' - x_2'$ kapjuk hogy

$$t_1 - t_2 = \gamma\left(\frac{v}{c^2}L\right) \approx 2.0\mu\text{s} \tag{220}$$

Tehát a Földi rendszerben az űrhajó orrában lévő óra siet a hátsóhoz képest.

2pt

rész VI

Rezgő mozgás, gravitációs erő

15B-28

Megoldás

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\tfrac{k}{m} - \left(\tfrac{b}{2m}\right)^2}$$

1pt

Adott $k, \quad m, \quad A_0, \quad A_1 = A(t_1) \quad , t_1$

b meghatározása:

$$A_1 = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t_1} \tag{221}$$

Osztva A_0-al és véve az egyenlet mindkét oldalának természetes logaritmusát:

$$\ln\frac{A_1}{A_0} = -\frac{b}{2m}t_1 \tag{222}$$

amiből b már kifejezhető

$$b = \frac{2m}{t_1}\ln\frac{A_0}{A_1} \approx 0.148\tfrac{kg}{s}. \tag{223}$$

3pt

A csillapított rezgőmozgás sajátfrekvenciája b, k és a tömeg m ismeretében már kifejezhető:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \approx 9.99\tfrac{1}{s} \tag{224}$$

1pt

15C-45

Megoldás

Fizikai inga lengés ideje

$$T = 2\pi\sqrt{\tfrac{I_2}{mgr}}$$

Steiner tétel

$$I_2 = I_1 + mr^2$$

1pt

A tömörhenger tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontra vonatkoztatva:

$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2 \tag{225}$$

Ha a középponttól r távolságra rögzítjük a forgás tengelyt és a testet mint fizikai ingát vizsgáljuk, a rendszer periódus ideje:

$$T(r) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2 + mr^2}{mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + r^2}{gr}} \tag{226}$$

T_0 a henger pereméhez rögzítés esetén mért periódus idő:

$$T_0 = T(R) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + R^2}{gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}. \tag{227}$$

3pt

Némi algebrával:

$$T(r)/T_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\frac{1}{2}R^2 + r^2}{rR}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\frac{1}{2} + (r/R)^2}{(r/R)}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\frac{1}{2} + x^2}{x}} \tag{228}$$

ahol bevezettük az $x = r/R$ változót. Ennek a kifejezésnek minimuma van ha az x szerinti derivált eltűnik. Ahhoz hogy a minimum helyét meghatározzuk elég a gyök jel alatti kifejezést deriválni!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\frac{1}{2} + x^2}{x}\right) = 0 \tag{229}$$

azaz

$$\frac{2x^2 - x^2 - 1/2}{x^2} = 0 \tag{230}$$

ez a kifelyezés akkor zérus ha a számláló zérus azaz ha

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad x = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{231}$$

ami a keresett

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} \tag{232}$$

kifejezés.

1pt

15C-46
Megoldás

Kényszer rezgést végző csillapított oszcillátor amplitúdója

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega b}{2m}\right)^2}}$$

1pt

Adott m, A_1 ha a kényszer frekvencia f_1 illetve A_2 ha a kényszer frekvencia f_2, a rezgés csillapítatlan tehát $b = 0$. Keressük F_0 -t és ω_0-t továbbá A_3-at ha f_3 a kényszer frekvencia.

$$\omega = 2\pi f \tag{233}$$

segítségével frekvenciák helyett körfrekvenciákra térünk át. A_1 és ω_1 illetve A_2 és ω_2 között tehát fenn áll hogy

$$A_1 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2}} \tag{234}$$

$$A_2 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2}} \tag{235}$$

Fontos mejegyezni hogy jelen esetben nem szabad a négyzetgyököt és a négyzetre emelést diszkutálás nélkül egyszerűsíteni! A fennti kifejezések hányadosa két alakot ölthet attól függően hogy ω_1 és ω_2 közre fogja ω_0-t vagy nem.

2pt

Ha közre fogják akkor

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)} \tag{236}$$

Ekkor ω_0 kifejezhető mint

$$A_1\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) + A_2\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right) = 0 \tag{237}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2}{A_1 + A_2}} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 401.793\tfrac{1}{s} \tag{238}$$

ekkor F_0meghatározható például(234)-ből

$$F_0 = A_1 m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2} \approx 0.0064\mathrm{N} \tag{239}$$

illetve $A_3 \approx 2.39$mm.

1pt

Ellenkező esetben azaz ha nem fogja közreω_1 és ω_2 a rendszer rezonanci frekvenciájátω_0-t

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)} \tag{240}$$

$$A_1\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) - A_2\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right) = 0 \tag{241}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A_1\omega_1^2 - A_2\omega_2^2}{A_1 - A_2}} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 393.661\tfrac{1}{s} \tag{242}$$

az előzőekhez hasonlóan $F_0 \approx 0.226$N, és $A_3 \approx 42.86$mm

1pt

16B-16

Megoldás A gravitációs erő a Föld (M tömeg) középpontjától R távolságra keringő m tömegű műholdra

$$F_g = \gamma\frac{Mm}{R^2}$$

a) ahhoz hogy szinkron pályán nem az egyenlítő síkjában keringjen műhold állandóan ellensúlyozni kellene a gravitációs erőnek a pályára merőleges komponensét ezért nem lenne gazdaságos.

b) kiindúlva a gravitációs erő

$$F_g = \gamma\frac{Mm}{R^2} \tag{243}$$

és a körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erő

$$ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} \tag{244}$$

összefüggéseiből, továbbá felhasználva hogy egy teljes kör $s = 2\pi R$ megtételéhez szükséges idő $T = 1$nap azaz

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{245}$$

3pt

kapjuk hogy

$$m\frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \gamma\frac{Mm}{R^2} \tag{246}$$

$$R = \sqrt[3]{\gamma M\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \approx 42000\text{km} \tag{247}$$

0.5pt

c) egszerű geometriai megfontolásból és a Föld sugarát $R_\oplus$

$$\cos(\alpha) = \frac{R_\oplus}{R} \rightarrow \alpha \approx 81^\circ \tag{248}$$

0.5pt

16B-34

Megoldás A gravitációs potenciális energia a Föld (M tömeg) középpontjától R távolságra keringő m tömegű műholdra

$$E_g = -\gamma\frac{Mm}{R}$$

a) Kezdetben a test rendelkezik kinetikus energiával illetve gravitációs potenciális energiával a csúcs ponton már csak pontenciális energia van. Az energia mérleg

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma\frac{Mm}{R_\oplus} = -\gamma\frac{Mm}{3R_\oplus} \tag{249}$$

1pt

$$v_0 = \sqrt{\gamma \frac{4M}{3R_\oplus}} \tag{250}$$

1pt

b) Figyelembe véve a Föld forgását a kezdeti kinetikus energia $\frac{1}{2}mv_T^2$-al több ahol $v_T = \frac{2\pi R_\oplus}{T}$ a Föld egy felületi pontjának sebessége az egyenlítőn. A $3R_\oplus$ magasságú pontban még mindig lesz kinetikus energia az előző szituációval ellentétben. a végpont tangenciális sebességét az inpulzus momentum megmaradásából kapkjuk:

$$R_\oplus v_T = 3R_\oplus v_T' \to v_T' = v_T/3 \tag{251}$$

Az energia mérleg tehát

$$\frac{1}{2}m\left(v_0^2 + v_T^2\right) - \gamma\frac{Mm}{R_\oplus} = \frac{1}{2}m\left(v_T^2/9\right) - \gamma\frac{Mm}{3R_\oplus} \tag{252}$$

$$v_0 = \sqrt{\gamma\frac{4M}{3R_\oplus} - 8\left(v_T^2/9\right)}. \tag{253}$$

Azaz kapjuk hogy kisebb kezdeti sebesség elég ha a Föld forgását is figyelembe vesszük.

2pt

16C-58
Megoldás

Feltéve hogy a feladatban szereplő ember a föld sugarához képest kicsit tud ugrani a szerzett potenciális energia

$$E_{pot} = m_e g h \tag{254}$$

ahol m_e az ember tömege. A gravitációs gyorsulás a Föld felszínén pedig ($M_\oplus$ a Föld tömege, $R_\oplus$ pedig a sugara)

$$g = \gamma\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} \tag{255}$$

2pt

Ahhoz hogy a kisbolygót elhagyhassuk a szükséges potenciális energia

$$E_{szökés} = \gamma\frac{m_e m_b}{r} \tag{256}$$

1pt

ahol r a kisbolygó sugara $m_b = M_\oplus \frac{r^3}{R_\oplus^3}$ pedig a tömege (mivel a kisbolygó sűrűsége azonos a Föld sűrűségével). A két energia kifejezést egymással egyenlővé téve kapjuk

$$m_e\left(\gamma\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}\right)h = \gamma\frac{m_e}{r}M_\oplus\frac{r^3}{R_\oplus^3} \tag{257}$$

azaz

$$r = \sqrt{R_\oplus h} \tag{258}$$

2pt

18B-8
Megoldás

Adott A,f,v,ρ

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \tag{259}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v}f \approx 16.029\frac{1}{m} \tag{260}$$

$$\omega = 2\pi f = 3141.6\frac{1}{s} \tag{261}$$

$$A = 10^{-4}\text{m} \tag{262}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \to F = \rho v^2 = 157.51\text{N} \tag{263}$$

18B-18
Megoldás
Ha az amplitúdó másfélszeresére nő, azaz

$$A_1 = \frac{3}{2} A_0 \tag{264}$$

Akkor az intenzitás vátozása

$$I_1 = \frac{9}{4} I_0, \tag{265}$$

Ami decibel skálán

$$\beta = 10\text{dB} \times \lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \approx 3.5. \tag{266}$$

5pt

18A-38
Megoldás
a Mach kúp nyílásszöge

$$\sin\theta = \frac{v_{Hang}}{v_{repülő}} = \frac{1}{1.2} \to \theta \approx 56.4427° \tag{267}$$

5pt

rész VII

Termodinamika