An(2) V 06.06.1

1) Feladat (10 pont).

Milyen alakú az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása?
Állítását bizonyítsa be! (Oldja meg az egyenletet!)

$y' + g(x)\,y = 0$ (H) 2 $g \in C^0_I$.

$y' = -g(x)\,y$, $y \equiv 0$ 1 egyensúlyi helyzet.

Ha $y \neq 0$, akkor

$\frac{y'}{y} = -g(x)$ $\int \frac{dy}{y} = \int -g(x)\,dx$ 2

$\ln|y| = -G(x) + c$ 2, ahol $G'(x) = g(x)$ $x \in I$.

(G létezik, mert g folyt.)

$|y| = e^{-G(x)+c}$ 1 $= e^c \cdot e^{-G(x)}$.

$y = \pm e^c e^{-G(x)} = K e^{-G(x)}$, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y \equiv 0$

$\Downarrow$

$y = K e^{-G(x)}$, $K \in \mathbb{R}$ 1

$\Downarrow$

$y = K\varphi(x)$, $K \in \mathbb{R}$ és $\varphi(x) \neq 0$ $x \in I$. 1

AN(2) V 06.06.01.

2) Feladat (12 pont).

Határozza meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{(3k+2)\,3^{k+1}}$$

konvergencia tartományát!

$R = \lim_{k\to\infty} \frac{(3(k+1)+2)\,3^{k+2}}{(3k+2)\,3^{k+1}}$ 3 $= \lim_{k\to\infty} \frac{(3k+5)\cdot 3}{3k+2} =$

$= \lim_{k\to\infty} 3 \cdot \frac{3+\frac{5}{k}}{3+\frac{2}{k}}$ 1 $= 3 = R$ 1

Ha $x = 1$ 1, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(3k+2)3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k+2}$ div. 1,

mert $\frac{1}{3k+2} > \frac{1}{5k} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{k}$ és $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ div. 2

Ha $x = -5$, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{(3k+2)3^{k+1}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+2)\cdot 3}$ 1

konv. 1 mert Leibniz típusú 1

AN(2) V. 06.06.01.

3) Feladat (14 pont).

Írja fel a $f(x) = (1+3x^2)^{1/9}$ és a $g(x) = (1+x^2)^{1/7}$ függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait és határozza meg az f függvény konvergencia sugarát!

$$\lim_{x\to 0} \frac{3f(x) - 7g(x) + 4}{x^4} = ?$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \; (1) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \; (2)$$

$R = 1 \; (1)$

$$\underbrace{(1+3x^2)^{\frac{1}{9}}}_{f(x)} = 1 + \frac{1}{9} x^2 3 + \frac{\frac{1}{9}\left(-\frac{8}{9}\right)}{2!} \cdot x^4 \cdot 3^2 + \dots \; (2)$$

$|3x^2| < 1$

$|x| < \sqrt{\frac{1}{3}} \; (1)$

$$\underbrace{(1+x^2)^{\frac{1}{7}}}_{g(x)} = 1 + \frac{1}{7} x^2 + \frac{\frac{1}{7}\left(\frac{-6}{7}\right)}{2!} x^4 + \dots \; (2)$$

$|x| < 1$

$$3f(x) - 7g(x) + 4 = \left(\frac{\frac{1}{9}\left(-\frac{8}{9}\right)}{2!} 3^2 \cdot 3 - \frac{\frac{1}{7}\left(-\frac{6}{7}\right)}{2!} \cdot 7 \right) x^4 + (\quad) x^6 + \dots \; (2)$$

$\_ h \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3f(x) - 7g(x) + 4}{x^4} = \frac{-\frac{8}{3}}{2!} + \frac{\frac{6}{7}}{2} = -\frac{4}{3} + \frac{3}{7} = \frac{-19}{21} \; (3)$$

AN(2) V 06.06.01

4) Feladat (14 pont).

$$f(x,y) = \frac{e^{xy}}{y^2+1}, \qquad x_0 = 0,\; y_0 = -1$$

Hol differenciálható az f függvény?
Írja fel az f függvény $P(0,-1)$-beli gradiensét!
Mennyi az f függvény P-beli, $v = (1,-3)$ irányú iránymenti deriváltja?

$$f'_x = \frac{y\, e^{xy}}{y^2+1} \; (2) \qquad f'_y = \frac{x e^{xy}(y^2+1) - 2y e^{xy}}{(y^2+1)^2} \; (2)$$

$f'_x,\ f'_y$ folyt. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ mindenütt tot. diffh. (2)

$$\operatorname{grad}^T f\big|_P = (f'_x,\ f'_y)_P \; (1) = \left(\frac{-1}{2},\ \frac{2}{2^2}\right) = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \; (2)$$

$$\frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{10}} (1, -3) \; (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}\Big|_P = \operatorname{grad}^T f\big|_P \cdot \frac{v}{|v|} \; (2) \; \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (-1-3) = \frac{-2}{\sqrt{10}} \; (2) = -\sqrt{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

An(2)V. 06.06.01

5) Feladat (10 pont).

Mikor mondjuk, hogy az f kétváltozós függvény totálisan differenciálható az értelmezési tartomány belső $P(x_0, y_0)$ pontjában?
Mit nevezünk $df((P),(h,k))$ differenciálnak?
Hogyan használjuk fel a hibaszámításnál?
Vezesse le a szorzat relatív hibáját!

Def. $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = A h + B k + \underline{\varepsilon}^T(h,k)\cdot \underline{h}$

ahol $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \underline{\varepsilon}(h,k) = \underline{0}$ (2)

A, B fgtl. h, k -tól. (1)

$df((P),(h,k)) = f'_x(P)\,h + f'_y(P)\,k$. (2)

$\Delta f \approx df$ $\qquad |H| \doteq |f'_x(P)|\,\Delta x + |f'_y(P)|\,\Delta y$

$|h| \le \Delta x$, $|k| \le \Delta y$. (2)

$f(x,y) = xy \qquad f'_x = y \qquad f'_y = x$

$H = |y|\,\Delta x + |x|\,\Delta y$ (2)

rel. hiba: $\dfrac{H}{|f|} = \dfrac{|y|\,\Delta x + |x|\,\Delta y}{|xy|} = \dfrac{\Delta x}{|x|} + \dfrac{\Delta y}{|y|}$ (1)

Vagyis szorzat relatív hibája a tényezők relatív hibáinak összege.

An(2)V 06.06.01.

*6) Feladat (18 pont).

Ismertesse a gömbi koordinátákat és határozza meg a Jacobi determinánsát!
Gömbi koordinátákra való áttéréssel számolja ki a

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z, \qquad x^2+y^2+z^2 \le 2$$

egyenlőtlenséggel adott térrész térfogatát!.

$x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi$, $\quad \rho \ge 0$

$y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi$, $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$z = \rho \cos\vartheta$, (2) $\quad \vartheta \in [0, \pi]$ (2)

$$\begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\sin\varphi & \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix}$$ (3)

$$J = \rho^2 \sin\vartheta \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} = (\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} \rho^2 \sin\vartheta =$$

$= \rho^2 \sin\vartheta$ (2)

$V = \iiint_V 1\, dV$ (1) $= \iiint_{V^*} \rho^2 \sin\vartheta \, dV^*$ (1) $= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin\vartheta \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$ (3)

$= \underbrace{2\pi \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}}_{(3)} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{2}^3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (1) $= \frac{\pi}{3}\left(2^{\frac{5}{2}} - 4\right) =$

$= \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)$

***7) Feladat (12 pont).**

Számolja ki a

$$\oint_{|z|=3} \bar{z}\, dz = ?$$

integrált, ahol a görbét pozitív irányban egyszer járjuk körbe.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\, dt \quad (2)$$

$$z(t) = 3e^{it} \; (2) = 3(\cos t + i \sin t)$$

$$\dot{z}(t) = 3e^{it} \; (1) \; i = 3(\sin t + i\cos t) = 3i((-\sin t)i + \cos t)$$

$$= 3i(\cos(-t) + i\sin(-t))$$

$$\bar{z}(t) = 3e^{-ti} \; (1) = 3(\cos t - i\sin t) = 3(\cos(-t) + i\sin(-t))$$

$$I = \int_0^{2\pi} 3e^{-ti}\, 3e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} 9\, dt = 18\pi$$

(2) (2) (2)

An(2) V 06.06.01.

***8) Feladat (10 pont).**

Határozza meg a

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{iz}-1}{z^4}\, dz = ?$$

integrált, ahol a görbét pozitív irányban egyszer járjuk körbe.

Sing. 0, beleesik a $|z-i|<3$ tartományba, (1)

$e^{iz}-1 = f(z)$ reguláris (1) $\Rightarrow$

Cauchy formulák (1) alkalmazhatók.

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{iz}-1}{z^4}\, dz = f^{(3)}(z_0)\cdot(3!)^{-1} \cdot 2\pi i \; (2) =$$

$$= 2\pi i\,(i^3)(3!)^{-1} e^{iz} \; (3) \Big|_{z_0=0} \; (1) = \frac{\pi}{3} \; (1)$$

$$e^{iz}-1 = iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots \quad \forall z \quad (2)$$

$$\frac{e^{iz}-1}{z^4} = \frac{i}{z^3} + \frac{i^2}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{i^3}{3!}\frac{1}{z} + \frac{i^4}{4!} + \cdots \quad (1)$$

$$\oint \frac{e^{iz}-1}{z^4}\, dz = \underbrace{\oint \frac{i}{z^3}\, dz}_{=0} + \underbrace{\oint \frac{i^2}{2!}\frac{1}{z^2}}_{=0 \text{ nevezetes példa } (2)} + \underbrace{\oint \frac{i^3}{3!}\cdot\frac{1}{z}\, dz}_{=\frac{i^3}{3!}2\pi i \text{ nevezetes példa } (2)} +$$

$$\underbrace{+ \oint \underbrace{\frac{i^4}{4!}}_{\text{reg.}}\, dz + \ldots}_{0 \text{ Cauchy alaptétel } (2)}$$

$I = \frac{\pi}{3}$ (1)

Am(2)V 06.06.01.

PÓT:

***9) Feladat (10 pont).**
Az $u(x, y) = \sin 2x \cosh 2y + 3x - 5y$ függvény egy reguláris komplex függvény valós része. Határozza meg ezt (ezeket) a reguláris függvényeket!

$$u'_x = v'_y \qquad u'_x = 2\cos 2x \,\mathrm{ch}\, 2y + 3 \; (1) = v'_y.$$

$$u'_y = -v'_x$$

$$v = \int 2\cos 2x \,\mathrm{ch}\, 2y + 3 \, dy \; (1) = \cos 2x \,\mathrm{sh}\, 2y + 3y \; (1) + C(x) \; (1)$$

$$u'_y = 2\sin 2x \,\mathrm{sh}\, 2y - 5 \; (1) = -v'_x$$

$$v'_x = -2\sin 2x \,\mathrm{sh}\, 2y - 5 = -2\sin 2x \,\mathrm{sh}\, 2y + C'(x) \; (2)$$

$$C'(x) = -5 \qquad C = -5x + k. \; (2)$$

$$v = \cos 2x \,\mathrm{sh}\, 2y + 3y - 5x + k.$$

$$f(z) = \sin 2x \,\mathrm{ch}\, 2y + 3x - 5y + i(\cos 2x \,\mathrm{sh}\, 2y + 3y - 5x + k)$$

$k \in \mathbb{R}$.

(1)