1) Kétféle futárral érkeznek csomagok a BME-re: a Sprinter $Poisson(\lambda)$ a GLS $Poisson(\mu)$ szerint (óránként). A kiszállítás ideje 12 és 16 óra között van. Annak a valószínűsége, hogy nulla darab Sprinter futár érkezett fél óra alatt 0,223. Mi a valószínűsége, hogy

- a) két egymást követő Sprinter között kevesebb, mint 10 perc telik el? (3p)

$X \sim$ Sprinter db $\quad t = \frac{1}{2}$

$$P(X=0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\frac{\lambda}{2}} = 0,223$$

$$\lambda \approx 3$$

$Y \sim$ Sprinter idő $(EXP(3))$

$$P(Y < \tfrac{1}{6}) = 1 - e^{-3 \cdot \frac{1}{6}}$$

- b) ha már eltelt 10 perc anélkül, hogy érkezett volna Sprinter, még 20 percet kell várnunk, hogy érkezzen egy? (3p)

ÖRÖKIFJÚSÁG

$$\underbrace{P(Y > \tfrac{1}{2}}_{30\,\text{perc}} \mid \underbrace{Y > \tfrac{1}{6}}_{10\,\text{perc}}) = \underbrace{P(X > \tfrac{1}{3})}_{10\,\text{perc}} = e^{-\frac{3}{3}}$$

- c) a harmadik Sprinter 14 óra után érkezik? (3p)

$Z \sim$ Erlang$(n=3, \lambda=3) \quad t = 2$

$$P(Z > 2) = 1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{(3 \cdot 2)^k}{k!} e^{-3 \cdot 2}\right) = \sum_{k=0}^{2} \frac{6^k}{k!} e^{-6}$$

2 óra alatt
0, 1, 2 db Sprinter érkezik

- d) A megfigyeléseink alapján az óránként érkező futárok 30%-a Sprinter, 70%-a GLS. Mi a valószínűsége, hogy fél óra alatt érkezik több mint 2 GLS? (3p)

óránként 3 Sprinter 30%

? GLS 70%

7 db GLS, $\mu = 7$

$W \sim$ Poisson$(7) \quad t = \frac{1}{2}$

$$P(W > 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{(\frac{7}{2})^k}{k!} e^{-\frac{7}{2}}$$

0, 1, 2 db GLS fél óra alatt

2) Tegyük fel, hogy a szóbeli vizsgára érkező diákok feleletének hossza egyenletes eloszlású 0 és 10 perc között. A diákok folyamatosan váltják egymást, tehát amikor az első befejezte, a következő azonnal kezdi és szintén valahol 0 és 10 perc között lesz a feleletének hossza, egyenletes eloszlással.

$X \sim Uni(0,10) \qquad Y \sim Uni(0,10)$

- a) Mi lesz egy felelet hosszának várható értéke és szórása? (4p)

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = 5 \qquad D(X) = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}} = \frac{10}{\sqrt{12}}$$

- b) Mi a második diák vizsgája végének sűrűségfüggvénye? (Azaz, amikor az első befejezte, plusz a második is?) (6p)

Magyarul X+Y konvolúciója a kérdés

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(s-x)\, dx$$

$s = x+y \qquad 0 \leq s \leq 20$

$0 \leq s-x \leq 10$

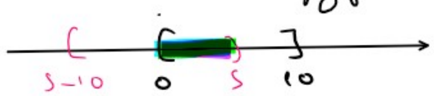
$s-10 \leq x \leq s$

$s \in [s-10, s] \cap [0,10]$

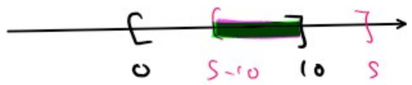
$f_X(x) = \frac{1}{10}$

$f_Y(y) = \frac{1}{10}$

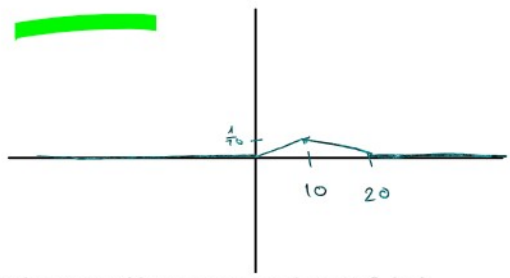
2 eset lesz, mert egyforma hosszak az intervallumok



$$\int_0^s \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\, dx = \frac{s}{100}$$



$$\int_{s-10}^{10} \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\, dx = \frac{10-(s-10)}{100} = \frac{20-s}{100}$$



- c) Mi a valószínűsége, hogy a második diák a vizsga kezdete után több, mint 15 perccel végzett? (2p)

$$P(S>15) = \int_{15}^{20} \frac{20-s}{100}\, ds = \left[\frac{20s}{100} - \frac{s^2}{200}\right]_{15}^{20} = \left(\frac{20}{5} - \frac{400}{200}\right) - \left(\frac{15}{5} - \frac{225}{200}\right) =$$

$$= 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

- d) Ha kiválasztok 5 diákot random, visszatevéssel, akkor mi a valószínűsége, hogy közülük több, mint három több mint 5 percig felelt? (3p)

$$P(X>5) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

három több mint 5 percig felelt? (3p)

$P(X>5) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$W \sim \text{Binom}(n=5, p=\frac{1}{2})$

$P(W>3) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5$

- e) Ha a vizsgára 120 perc áll rendelkezésre, akkor max. hány diákot lehet közelítőleg 90%-os valószínűséggel levizsgáztatni? (5p)

$n \cdot X \sim N\left(n \cdot 5, \sqrt{n} \cdot \frac{10}{\sqrt{12}}\right)$

$P(n \cdot X < 120) = ?$

$Z = \frac{n \cdot X - n \cdot 5}{\sqrt{n} \cdot \frac{10}{\sqrt{12}}}$

$P\left(Z < \frac{120 - 5n}{\frac{\sqrt{n} \cdot 10}{\sqrt{12}}}\right) = 0{,}9 = \Phi(1{,}28)$

$120 - 5n = 1{,}28 \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot 10}{\sqrt{12}}$

$0 = 5n + 3{,}695\sqrt{n} - 120$

$\sqrt{n}_{1,2} = \frac{-3{,}695 \pm 49{,}1}{10} \to 4{,}54 = \sqrt{n}$ $\to \ominus$

$n \leq 20$

3) Legyen $f(x) = a^2 x e^{-ax}$, $x \geq 0$.

- a) Mi $f(x)$ momentumgeneráló függvénye? Add meg segítségével a várható értéket! (Más módon kiszámolt várható értékre fele pont jár!) (4p)

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} a^2 x e^{-ax}\,dx = a^2 \int_0^\infty x\, e^{(t-a)x}\,dx = \frac{a^2}{(a-t)^2}$

ha $t < a$

$E(X) = M'_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{2a^2}{(a-t)^3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{a}$

- b) Adj $\Theta = a$-ra Maximum Likelihood becslést tetszőleges $X_1, X_2, \ldots X_n$ minta esetén! (4p)

$\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^2 x_i e^{-\theta x_i}$

$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \log \ell = \sum_{i=1}^{n} (2 \log \theta + \log x_i - \theta x_i)$

$\partial l \quad 2n \quad \sum x_i = 0$

0

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_1 x_i = 0$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\sum_1 x_i}{2n} = \frac{\overline{X}}{2}$$

$$\underline{\underline{\theta = \frac{2}{\overline{X}}}}$$

4) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 8/5 \cdot (x+y)$ a $0 < x < 1, 0 < y < b$ téglalapon.

- a) Számold ki b-t! (2p)

$$\int_0^1 \int_0^b \frac{8}{5}(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{8}{5}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\right]_0^b dx = \int_0^1 \frac{8}{5}\left(xb + \frac{b^2}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{8}{5}\left(\frac{1^2 b}{2} + \frac{b^2 \cdot 1}{2}\right) = 1$$

$$\frac{b^2}{2} + \frac{b}{2} - \frac{5}{8} = 0$$

$$4b^2 + 4b - 5 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+80}}{8} \begin{cases} \nearrow 0{,}725 \\ \searrow -1{,}725 \ ↯ \end{cases}$$

- b) Számold ki X várható értékét! (3p)

$$f_1(x) = \int_0^{0,725} \frac{8}{5}(x+y)\,dy = \left[\frac{8}{5}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\right]_0^{0,725} = \frac{8}{5}\left(0{,}725x + 0{,}2628\right) =$$

$$1{,}16x + 0{,}4205$$

$$E(X) = \int_0^1 f_1(x) \cdot x\,dx = \int_0^1 1{,}16x^2 + 0{,}4205x\,dx = \left[\frac{1{,}16x^3}{3} + \frac{0{,}4205x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{0{,}5969}}$$

- c) Számold ki X feltételes várható értékét, ha tudjuk Y-t! (4p)

1 1

$$f_1(y) = \int_0 \frac{8}{5}(x+y)\,dx = \left[\frac{8}{5}\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\right]_0 = \frac{4}{5} + \frac{8y}{5}$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{\frac{8}{5}(x+y)}{\frac{4}{5} + \frac{8}{5}y} = \underline{\frac{x+y}{\frac{1}{2}+y}}$$

$$E(X|Y) = \int_0^1 f_{1|2}(x|y)\cdot x\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+xy}{\frac{1}{2}+y}\,dx = \left[\frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2}}{\frac{1}{2}+y}\right]_0^1 = \underline{\frac{\frac{1}{3} + \frac{y}{2}}{\frac{1}{2}+y}}$$

- d) Mennyi $P(Y > X)$?(2p)

$$P(Y>X) = \frac{8}{5}\int_0^{0,725}\int_0^y (x+y)\,dx\,dy = \frac{8}{5}\int_0^{0,725}\left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^y dy =$$

$$\frac{8}{5}\left[\frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{3}\right]_0^{0,725} = \underline{0,304}$$

- e) Független-e X és Y? (Indokolj!) (1p)

$$\frac{8}{5}(x+y) \neq \left(\frac{4}{5} + \frac{8y}{5}\right)\cdot\left(1,16x + 0,4205\right)$$

Szóval NEM.

5) Texasban a hőmérsékletet Fahrenheit fokokban mérik. Megállapították, hogy az ottani hőmérséklet eloszlása nyaranta $N(\mu; \sigma^2 = 16)$. A következő hőmérsékleteket mérték: $(82, 80, 91, 90, 85, 87, 86, 83, 84)$.

- a) Adj a fenti minta alapján 90%-os szinthez konfidenciaintervallumot az átlaghőmérsékletre! (3p)

$\overline{X} = 85,33$ $\quad\sigma = 4\quad$ $n = 9$

$$\mu \in \left[\overline{X} - z_5\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{9}},\ \overline{X} + z_5\frac{\sigma}{\sqrt{9}}\right]$$

$$2\Phi(z_5) - 1 = 0,9$$

$$z_5 = \Phi^{-1}(0,95) = 1,65$$

$$\underline{[83,14 ; 87,53]}$$

- b) Ha tudjuk, hogy a várható érték $86F°$, mi lesz az eloszlás, ha áttérünk Celsius skálára? ($\frac{5}{9}(X - 32)[F°] = Y[C°]$) (2p)

$$Y = \frac{5}{9}(X - 32) \qquad E(X) = 86$$

$$E(Y) = E\left(\frac{5}{9}X\right) - \frac{32 \cdot 5}{9} = \underline{\underline{30}}$$

$$D^2(Y) = D^2\left(\frac{5}{9}X\right) = \frac{25}{81} D^2(X) = 4{,}938$$

$$\underline{Y \sim N(30; \sigma^2 = 4{,}938)}$$

- c) Ha tudjuk, hogy a hőmérséklet több, mint $90F°$, akkor mi a valószínűsége, hogy 85 és $95F°$ között lesz? (A várható érték még mindig $86F°$.) (3p)

$$P(85 \leq X \leq 95 \mid X > 90) = \frac{P(90 < X \leq 95)}{P(X > 90)} =$$

$$= \frac{\Phi\left(\frac{95-86}{4}\right) - \Phi\left(\frac{90-86}{4}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{90-86}{4}\right)} = \frac{0{,}987 - 0{,}841}{0{,}1587} = \underline{0{,}9231}$$