

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

I. Differenciálhatóság

$$1. f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \leq 1 \\ ax + b & , x > 1 \end{cases}$$

Határozza meg a és b értékét, amelyre f folytonos és differenciálható az értelmezési tartományán.

$$2. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{Határozza meg az } f \text{ függvény deriváltját.}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{Hol folytonos a derivált függvény?}$$

$$4. f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ és } f(0) = 0.$$

Határozza meg a derivált függvényt.

$$5. \text{Legyen } f(x) = \sqrt{2x-3}. \quad f'(2) = ?$$

II. Deriváltak meghatározása a differenciálási szabályok segítségével

Határozza meg az f deriváltját, ahol

$$1. f(x) = \frac{\sin(3x+2)}{\sqrt{1+x^2}} \quad 2. f(x) = e^{\cos x} \cdot (x\sqrt{x} + 1/x^4) \quad 3. f(x) = \ln^2(5x+6)$$

$$4. f(x) = \sqrt{\arcsin \frac{1}{x}} \quad 5. f(x) = 3^{5x+2} \cdot \operatorname{tg}^3(1+x^2) \quad 6. f(x) = \log_3(1+\operatorname{sh}x)$$

$$7. f(x) = x^x \quad 8. f(x) = (1+x)^{\sin x} \quad 9. f(x) = (1+cx)^{2+3x}$$

III. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket

$$1. \sqrt{1+x} < 1+x/2, \quad x > 0 \quad 2. \operatorname{arctg}x < x, \quad x > 0$$
$$3. \ln x < x-1, \quad x > 1 \quad 4. e^x > 1+x+x^2/2, \quad x > 0$$
$$5. x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \geq 0 \quad 6. \operatorname{arctg}x \geq x - \frac{x^3}{3}, \quad x \geq 0$$

IV. Számolja ki az alábbi határértékeket

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x + 3 \sin x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + shx)^{1/x}$

V. Ábrázolja az alábbi függvényeket

1. $f(x) = x^5 - 5x^3$

2. $f(x) = x^2 - 2 \ln x$

3. $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$

4. $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

5. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

6. $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

7. $f(x) = (x-6)e^{-x}$

8. $f(x) = e^{1/x}$

9. $f(x) = xe^{1/x}$

10. $f(x) = x^2 \ln x$

a) Ábrázolja a függvényt.

b) Adja meg az $x^2 \ln x = k$ egyenlet megoldásainak a számát.

c) Adjon meg olyan intervallumokat, amelyeken létezik inverz függvény.

11. $f(x) = xe^{-x}$

a) Ábrázolja a függvényt.

b) Adjon olyan intervallumokat, amelyeken létezik inverz függvény.

c) Határozza meg a függvény maximumát, minimumát – ha léteznek- a $[0,5]$ intervallumon, a $[0,+\infty)$ intervallumon és a $(0,+\infty)$ intervallumon.