ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI β **változat**

2011. nov. 17.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

Mit értünk azon, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$? $\quad (x_0, A \in \mathbb{R})$

A definíció segítségével igazolja, hogy

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{5x+1} = 4 \quad ! \qquad (\delta(\varepsilon) = ?)$$

D $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$:

$\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon)>0 \quad (\varepsilon, \delta \in \mathbb{R})$:
$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x-x_0| < \delta(\varepsilon)$ 2

$f(x) = \sqrt{5x+1}$, $A = 4$, $x_0 = 3$:

$$|f(x)-A| = |\sqrt{5x+1} - 4| = \left|(\sqrt{5x+1}-4)\frac{\sqrt{5x+1}+4}{\sqrt{5x+1}+4}\right| = \quad 2$$

$$= \left|\frac{5x+1-16}{\sqrt{5x+1}+4}\right| = \frac{5\,|x-3|}{\sqrt{5x+1}+4} \le \frac{5\,|x-3|}{0+4} < \varepsilon \quad 2$$

$$\Rightarrow |x-3| < \frac{4}{5}\varepsilon \quad 3 \quad \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \frac{4}{5}\varepsilon \quad 1$$

2. feladat (17 pont)

$$f(x) = \begin{cases} b\cdot \operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{x}{2}\right), & \text{ha } x \le 0 \\[2ex] \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt[5]{x^2}\right)}{3\sqrt[5]{x^2}}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) Adja meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen $x = 0$-ban!

b) $b = 1$ értékénél írja fel $f'(x)$ értékét, ahol létezik!

a) $f(0-0) = f(0) = b\cdot \operatorname{arctg} 1 = b\cdot\frac{\pi}{4}$ 2

$\boxed{6}$

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin \pi\sqrt[5]{x^2}}{3\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} \underbrace{\frac{\sin \pi\sqrt[5]{x^2}}{\pi\sqrt[5]{x^2}}}_{\to 1}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \quad 3$$

A folytonosság feltétele: $b\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \underline{\underline{b = \frac{4}{3}}}$ 1

an1z2β111117/1.

b.) $f'(0) \nexists$, mert $b=1$ esetén f nem folytonos $x=0$-ban. (2)

$\boxed{11}$ Egyébként:

$x<0$: $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}$ (4)

$x>0$: $f'(x)=\dfrac{\cos\left(\pi\sqrt[5]{x^2}\right)\cdot\pi\cdot\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\cdot 3\cdot\sqrt[5]{x^2}-\sin\left(\pi\sqrt[5]{x^2}\right)\cdot 3\cdot\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}}{\left(3\sqrt[5]{x^2}\right)^2}$ (5)

3. feladat (15 pont)

$$f(x)=\frac{(x^2-1)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x^2+x}$$

a) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=?$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=?$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=?$

$$f(x)=(x-1)\,\frac{x+1}{x+1}\,\frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x}$$

a.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to-1}\underbrace{\frac{x+1}{x+1}}_{=1}\underbrace{(x-1)}_{\to -2}\underbrace{\frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x}}_{\to\frac{\mathrm{arctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{-1}}=+2\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

b.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{(x-1)}_{\to -1}\cancel{\frac{x+1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x}=-\frac{\pi}{4}$, mert

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x}\overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}x\right)^2}}^{\to 1}\cdot\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{\pi}{4}$$

c.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+x}\cdot\mathrm{arctg}\Big(\underbrace{\frac{\pi}{4}x}_{\to\infty}\Big)=\frac{\pi}{2}$

$=\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\to 1$ $\to\frac{\pi}{2}$

an1z2/B 111117/2.

4. feladat (18 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-2)^2}, \qquad x < 2$$

a) $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = ?$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

b) Írja fel $f'(x)$-et!

c) Indokolja meg, hogy létezik a függvény inverze!
$f^{-1}(x) = ?$, $\quad D_{f^{-1}} = ?$, $\quad R_{f^{-1}} = ?$

a.) $\boxed{5}$

$$\lim_{x \to 2-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{(x-2)^2}_{\to +0}}}_{\to +\infty} = \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{(x-2)^2}}_{\to 0} = \operatorname{arctg} 0 = 0 \qquad (2)$$

b.) $\boxed{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{(x-2)^4}} \cdot \frac{-2}{(x-2)^3}$$

c.) $\boxed{9}$

$I = (-\infty, 2)$-ön $\quad f'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{(x-2)^4}}}_{>0} \cdot \frac{-2}{\underbrace{(x-2)^3}_{<0}} > 0$

$\Rightarrow f$ szigorúan monoton nő I-n $\Rightarrow \exists f^{-1}$ $I = D_f$-en. (2)

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = \operatorname{tg} y$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{\operatorname{tg} y} \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} y}} < 0$$

$$\Rightarrow x = 2 - \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} y}}$$

$x \leftrightarrow y$: $\quad f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$ $\qquad (4)$

$R_f = (0, \frac{\pi}{2})$: a.) és f szig. mon. nő (1)

$D_{f^{-1}} = R_f = (0, \frac{\pi}{2})$, $\quad R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 2)$ $\qquad (2)$

5. feladat (12 pont)

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 \sin(2x^4)}, \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

a) Határozza meg a deriválási szabályok alapján $f'(x)$ értékét $x \neq 0$ esetén!

b) Határozza meg a *derivált definíciója* alapján $f'(0)$ értékét!

an1z2β111117/3.

a.) $\boxed{5}$ $f'(x) = \frac{1}{5}\left(x^2 \sin(2x^4)\right)^{-4/5} \cdot \underbrace{\left(x^2 \cdot \sin(2x^4)\right)'}_{\left(2x \cdot \sin 2x^4 + x^2 \cos(2x^4) \cdot 8x^3\right)}$

b.) $\boxed{7}$ $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h^2 \sin(2h^4)} - 0}{h} =$ (2) (1)

$= \lim_{h\to 0} \sqrt[5]{\frac{h^2 \sin(2h^4)}{h^5}} = \lim_{h\to 0} \sqrt[5]{\underset{0}{h} \cdot \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(2h^4)}{2h^4}}_{\to 1} \cdot 2} = 0$ (4)

6. feladat (14 pont)

$$f(x) = x^2 + \frac{5}{x}$$

a) Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiós pontja?

b) Írja fel az $x_0 = -3$ ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét!

a.) $f'(x) = 2x - \frac{5}{x^2}$ (2)

$f''(x) = 2 + \frac{10}{x^3} = 2\frac{x^3+5}{x^3}$ (2) $\qquad f''(x)=0 \Rightarrow x^3+5=0$

$x = -\sqrt[3]{5}$

	$(-\infty, -\sqrt[3]{5})$	$-\sqrt[3]{5}$	$(-\sqrt[3]{5}, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cup$	infl. pont	$\cap$	szak. hely	$\cup$

} (6)

b.) $y_é = f(-3) + f'(-3)(x+3) = 9 - \frac{5}{3} + \left(-6 - \frac{5}{9}\right)(x+3)$ (2) (2)

an1z2β111117/4.

7. feladat (14 pont)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(3x-1)}{\operatorname{sh}(3x+2)} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(6x^2)}{\sin^2(2x)} = ?$

a.) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x-1}+e^{-(3x-1)}}{e^{3x+2}-e^{-(3x+2)}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^{3x}}{e^{3x}}}_{=1} \frac{e^{-1}+e^{-6x+1}}{e^{2}-e^{-6x-2}} =$$

$$= \frac{e^{-1}+0}{e^{2}-0} = e^{-3}$$

b.) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x^2}{\sin^2 2x} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+(6x^2)^2}\cdot 12x}{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2} =$$

$$= 6\cdot\frac{2x}{\sin 2x} \to 6$$

$$= \frac{1\cdot 6}{2\cdot 1\cdot 2} = \frac{3}{2}$$

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} \left(\dfrac{1}{|x-5|} - \dfrac{1}{x-5}\right) = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 5x} = ?$

a.) $\boxed{5}$

$$\lim_{x\to 5+0} \underbrace{\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-5}\right)}_{\equiv 0} = 0$$

$$\lim_{x\to 5-0} \left(-\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-5}\right) = \lim_{x\to 5-0} \frac{-2}{\underbrace{(x-5)}_{\to -0}} = \infty$$

b.) $\boxed{5}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}_{\downarrow 1} \underbrace{\frac{1}{\cos 4x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{4x}{5x}}_{=\frac{4}{5}} \underbrace{\frac{5x}{\sin 5x}}_{\downarrow 1} = \frac{4}{5}$$

(Vagy: L'H-lal:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 5x} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\frac{1}{\cos^2 4x}}^{\to 1}\cdot 4}{\underbrace{\cos 5x}_{\to 1}\cdot 5} = \frac{4}{5}$$)

an1z2B111117/5.

9. feladat (10 pont)

$$f(x) = \cos(5x) + 3, \qquad g(x) = 1 + x^2$$

$$a) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = ?, \qquad\qquad b) \quad \left(f(x)^{g(x)}\right)' = ?$$

a.) $\boxed{4}$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(-\sin 5x)\cdot 5\cdot(1+x^2) - (\cos 5x+3)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

b.) $\boxed{6}$ $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{\ln(\cos 5x+3)^{1+x^2}}\right)' =$

$= \left(e^{(1+x^2)\ln(\cos 5x+3)}\right)' \; 2 =$

$= e^{(1+x^2)\ln(\cos 5x+3)} \cdot \left((1+x^2)\cdot \ln(\cos 5x+3)\right)' \; 2 =$

$= (\cos 5x+3)^{1+x^2} \cdot \left(2x\cdot \ln(\cos 5x+3) + (1+x^2)\frac{(-\sin 5x)\cdot 5}{\cos 5x+3}\right)$

2

$x \in \mathbb{R}$

an1z2β111117/6.