3.) Nemlineáris hálózatok:

- Ha a munkaponti linearizálást elvégeztük (k12 .tétel), akkor innentől a szuperpozíció érvényessé válik.

4.) Teljesítmény számítás:

- P_{hat} - hatásos teljesítmény : a harmonikusokra nézve szuperponálható:

  ↳ a hatásos teljesítmény egyenlő az egyes harmonikusok hatásos teljesítményének összegével

  ↳ $$\boxed{P = U_0 \cdot I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k I_k}{2} \cdot \cos(\varphi_{U_k} - \varphi_{I_k})}$$

  (ez következik $p = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$ - ből)

- ha $u(t) = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_{u_1}) + U_2 \cdot \cos(2\omega_1 t + \varphi_{u_2}) + \ldots$

  $i(t) = I_0 + I_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_{I_1}) + I_2 \cdot \cos(2\omega_1 t + \varphi_{I_2}) + \ldots$

  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

5.) Linearitás következménye:

- Ha egy lineáris hálózat csak egyetlen forrást tartalmaz (u_s vagy i_s) és ha a k-adik kétpólus feszültsége u_k és árama i_k, akkor ennek hatására

  A=konstans esetén $A u_s$ vagy $A i_s$ => $\left.\begin{matrix} A u_k \\ A i_k \end{matrix}\right\}$ lesz ?

- Átviteli mennyiségek : $\frac{u_k}{u_s}$; $\frac{u_k}{i_s}$, $\frac{i_k}{u_s}$ függetlenek az u_s vagy i_s forrásmennyiség értékétől vagy időfüggvényétől !

R7 Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer impulzusválasza az állapotváltozós leírás ismeretében?

I. Folytonos idő:

- Impulzusválasz: a hálózat $\delta(t)$ gerjesztésre adott válasza
- komponensekre bontás módszere: R5 tétel, $u(t)=\delta(t)$ és $x(+0)=x(-0)=\underline{B}$
- Az állapotváltozós leírás Fourier vagy Laplace transzformálásával előállíthatjuk az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli függvényt, majd ezt inverz Fourier illetve inverz ~~Laplace~~ Laplace transzformálva megkapható az impulzusválasz.

→ Ha adott: $\underline{x}' = \underline{\underline{A}}x + \underline{B}u$ és $u = \delta(t)$

$\underline{y} = \underline{C}^T\underline{x} + Du$

- kell: $h(t) = y$
- meghatározzuk a szabad összetevőt
- a gerjesztett összetevő $t=\emptyset$-n kívül mindenhol $\emptyset$ => $y_g(t) = \emptyset$
- kiindulási érték: $x(-0)=\emptyset$
- kezdeti érték meghatározás: $\underline{x}'(t) = \underline{\underline{A}}x + \underline{B}\delta(t) \rightarrow \int_{-0}^{+0} \underline{x}'(t)dt = x(+0) - \underbrace{x(-0)}_{\emptyset}$

$$\int_{-0}^{+0} (Ax + B\delta(t))\, dt = \underline{B}$$

↳ az állapotváltozó kezdeti értéke: $\underline{x}(+0) = \underline{B}$

↳ így a gerjesztetlen rendszer állapotegyenletét felhasználva:

$$\boxed{y(t) = h(t) = \underline{C}^T x(t) + D\delta(t) \quad ; \quad \underline{x}(+0) = \underline{B}}$$

$$h(t) = \underline{D}\delta(t) + \varepsilon(t)\underline{C}^T e^{\lambda t}\underline{\underline{B}}$$

II. Diszkrét idő:

a) Fokozatos behelyettesítés:
- behelyettesítünk rekurzívan $k = 0,1,2\ldots$; $u[k]=\delta[k]$, $x[0]=0$
- $y[k] = C^T x[k] + Du[k]$

$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$

- $h[0] = D$ $\quad \underline{x}[1] = \underline{B}$

$h[1] = \underline{C}^T x[1]$ $\quad \underline{x}[2] = \underline{\underline{A}}\underline{x}[1]$

$h[2] = \underline{C}^T x[2]$ $\quad \underline{x}[3] = \underline{\underline{A}}x[2]$

- jól leprogramozható, de nehéz ~~meg~~ általános megállapításokat tenni
- variáns rendszerre is használható

b, impulzusválasz formulája

- a) -ból meghatározható

- $h[k] = \begin{cases} D & k=0 \\ \underline{C}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \underline{B} \end{cases}$

- $h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\, \underline{C}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \underline{B}$

- $\underline{\underline{A}}$ mátrix hatványai a sajátértékek ismeretében a Lagrange-mátrixokkal meghatározható: $L_i = \prod_{\substack{p=1 \\ p\neq i}}^{N} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_p \underline{\underline{E}}}{\lambda_i - \lambda_p}$ $\quad i = 1,2..N$

$\hookrightarrow A^k = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \cdot \underline{\underline{L_i}}$

-> $x[0] = 0$ kezdeti állapot -> Lagrange

$x[k+1] = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}[k] + \underline{B}\,\delta[k]$ -> $x[1] = \underline{B}$

$p_i = \lambda_i \cdot k_i$

$x[k] = p_1 \underline{m}_1 \lambda_1^{k-1} + p_2 \underline{m}_2 \lambda_2^{k-1} + \ldots + p_N \underline{m}_N \lambda_N^{k-1}$ $\quad k \geq 1$, $x[1] = \underline{B}$

$p_1 \underline{m}_1 + \ldots + p_N \underline{m}_N = \underline{B}$

$x[k] = \varepsilon[k-1]\{p_1 \underline{m}_1 \lambda_1^{k-1} + \ldots + p_N \underline{m}_N \lambda_N^{k-1}\}$

$y[k] = \underline{C}^T \underline{x}[k] + D\delta[k]$

$h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\, \underline{C}^T \{p_1 \underline{m}_1 \lambda_1^{k-1} + \ldots + p_N \underline{m}_N \lambda_N^{k-1}\}$

c) más módszer:

- Az állapotváltozós leírást $\mathcal{Z}\{\}$ vagy $\mathcal{F}\{\}$ transzformálva ~~megkapjuk~~ egy lineáris egyenletrendszert kapunk, melyből y választ meghatározható

- $\frac{y}{u} = h$ segítségével megkapjuk $H(e^{j\vartheta})$-t, és ezt inverz transzformálva az impulzusválaszt ($h[k]$-t)

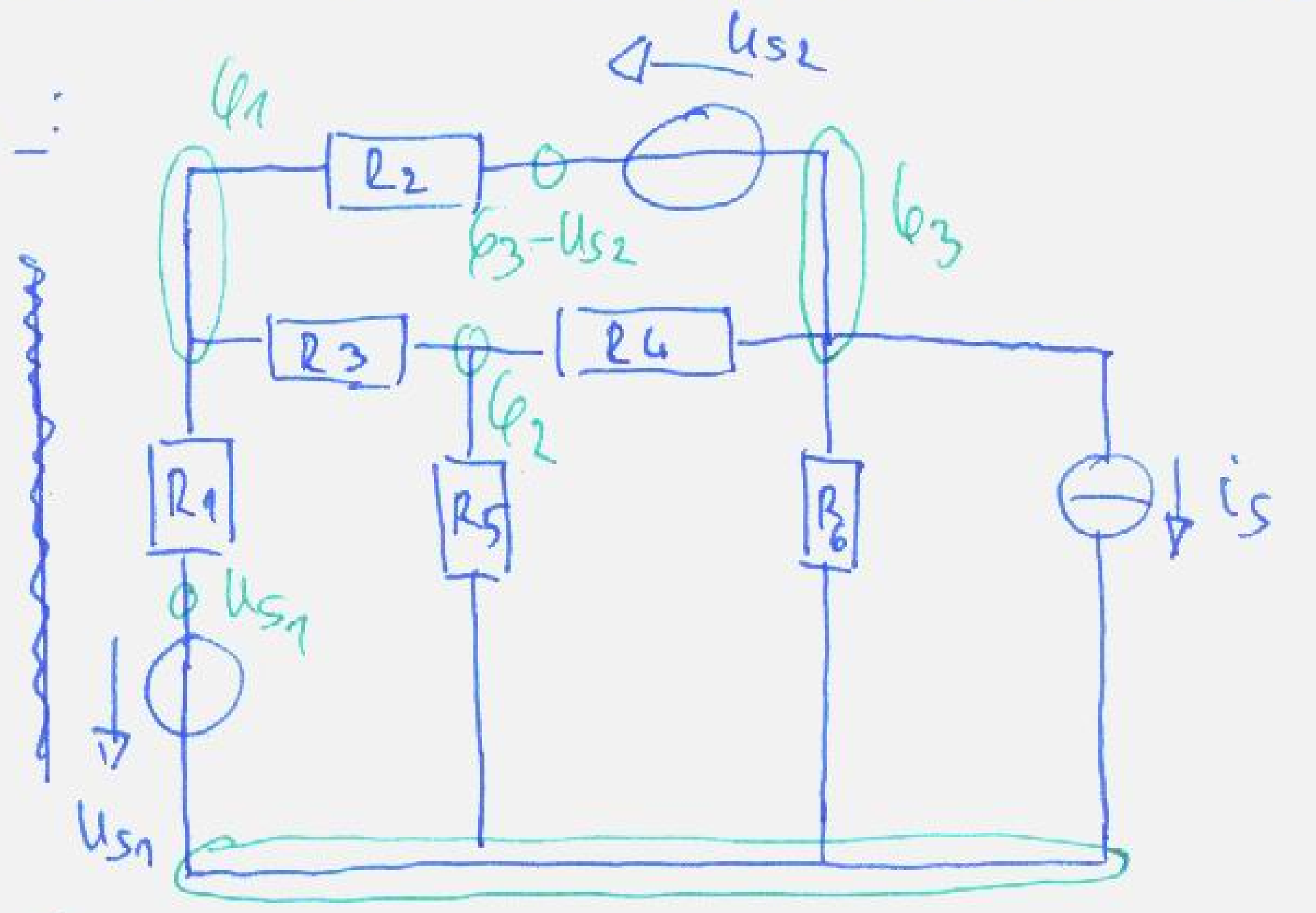
(K3) Ismertesse a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszerét kirchoff tipusú hálózatok számítására! Térjen ki a különböző hálózati komponensekre! Illusztrálja az eljárást egy egyszerű hálózaton!

- A csomóponti potenciálok illetve a hurokáramok módszerének bevezetésével a hálózatra vonatkozó lineáris egyenletrendszer mérete csökkenthető, így az egyenletek redukált rendszerét kapjuk.

1. Csomóponti potenciálok: - Kirchoff áramtörvény következménye

- Egy hálózat minden csomópontjához egy φ_p csomóponti potenciált rendelünk.
- A $p=\emptyset$ sorszámú ún. bázíscsomóponthoz, önkényesen a $\emptyset$ potenciált rendeljük.
- A p-edik és q-adik csomópont közti feszültség $U_{pq} = |\varphi_p - \varphi_q|$
- Ha a kétpólusok feszültségét csomóponti potenciálok különbségeként állítjuk elő, kirchoff feszültségtörvényét kielégítjük (alkalmazzuk kirchoff áramtörvényét a csomóponti potenciálokkal kifejezett ismeretlen áramokra): hurok mentén összegezve az u-kat minden potenciál 2szer szerepel de ellentétes előjellel.
- Ha egy feszültségforrás egyik pontjának potenciálja φ, akkor a másik $\varphi+U_s$ vagy $\varphi-U_s$ a referenciairánytól függően, vagyis a fesz. forrás nem hoz be új ismeretlent.
- A csomóponti potenciálokkal felírt egyenletrendszer megoldásai a csomóponti potenciálok, amikből minden más adat számítható.

Példa:



Egyenletek:

$$\varphi_1\text{-re: } \frac{\varphi_1 - U_{s1}}{R_1} + \frac{\varphi_1 - (\varphi_3 - U_{s2})}{R_2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_3} = 0$$

$$\varphi_2\text{-re: } \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_3} + \frac{\varphi_2}{R_5} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4} = 0$$

$$\varphi_3\text{-ra: } \frac{\varphi_3}{R_6} + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_4} + \frac{(\varphi_3 - U_{s2}) - \varphi_1}{R_2} + i_s = 0$$

Az egyenletrendszer rendezett alakja ($G_k = 1/R_k$)

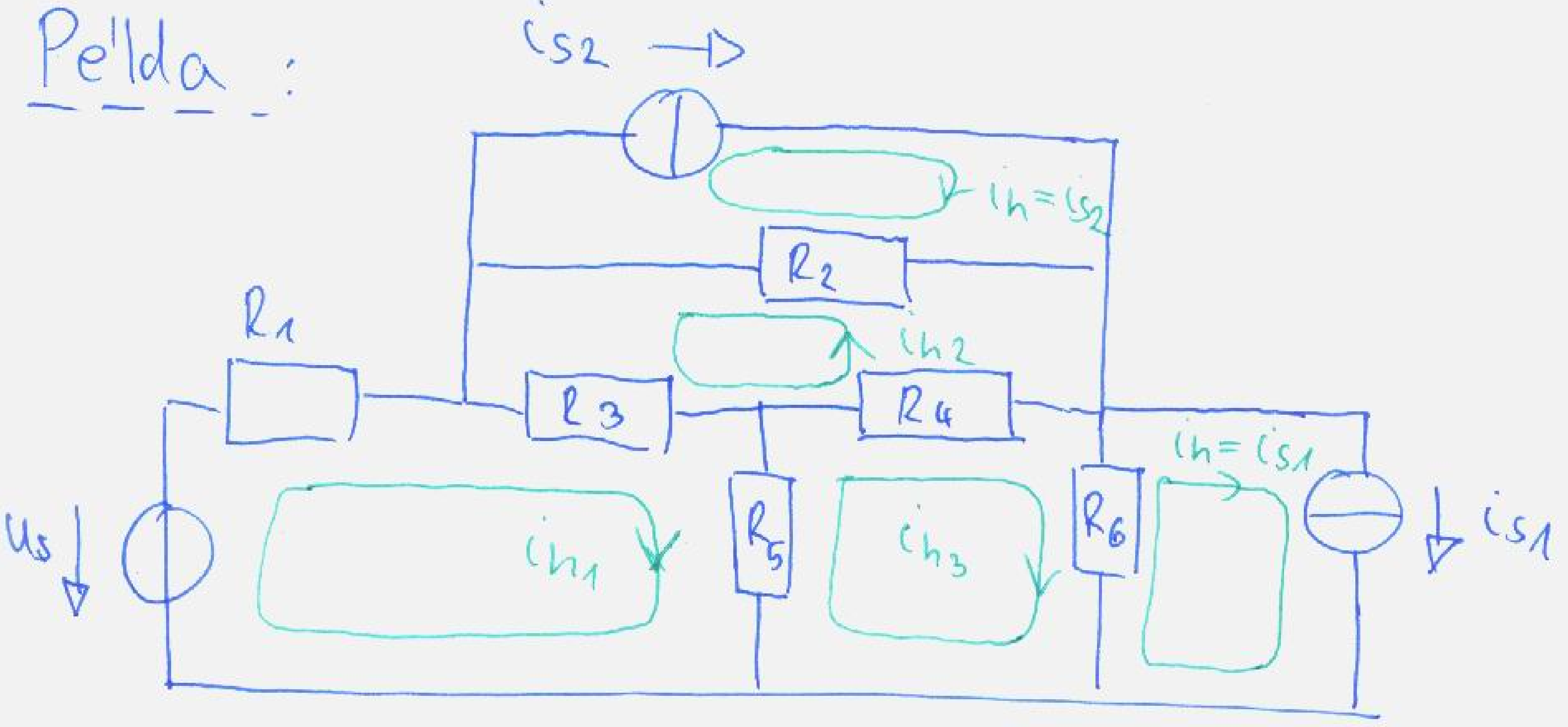
(1) $(G_1+G_2+G_3)\varphi_1 - G_2\varphi_2 - G_2\varphi_3 = G_1 U_{s1} - G_2 U_{s2}$

(2) $-G_3\varphi_1 + (G_3+G_4+G_6)\varphi_3 = G_2 U_{s2} + i_s$

2. Hurokáramok módszere

- Válasszunk a hálózatban egy fundamentális hurokrendszert, amelynek ismeretlen mennyiségei a hurkokban folyó áramok.
- A kétpólusok árama a rajtuk átfolyó hurokáramok szuperpozíciójaként állítható elő.
- Ha minden áramforrás csak egyetlen hurokban szerepel, akkor a hurokáram megegyezik az áramforrás áramával.
- Az ellenállások feszültsége $\boxed{U = R \cdot \sum i_k}$ ahol i_k-k az R-en átfolyó hurokáramok
- Alkalmazzuk kirchoff feszültségtörvényét a hurokáramok által kijelölt független hurokrendszerre úgy, hogy az ismeretlen feszültségeket kifejezzük a hurokáramokkal.
- Független hurokrendszer keresése: elkezdjük felvenni a hurkokat, a következőnek mindig egy olyan hurkot választunk, ami tartalmaz új komponenst.
- Kirchoff áramtörvényét is kielégítik a hurokáramok, mivel a csomópontokban be és onnan ki is folynak.

Példa:



Egyenletek:

$$(1)\quad R_3(i_{h1}+i_{h2}) + R_5(i_{h1}-i_{h3}) - U_s + R_1 i_{h1} = 0$$

$$(2)\quad R_2(i_{h2}+i_{s2}) + R_3(i_{h2}+i_{h1}) + R_4(i_{h2}+i_{h3}) = 0$$

$$(3)\quad R_4(i_{h3}+i_{h2}) + R_6(i_{h3}-i_{s1}) + R_5(i_{h3}-i_{h1}) = 0$$

Az egyenletrendszer rendezett alakja:

$$(1)\quad (R_1+R_2+R_3)\, i_{h1} + R_3 \cdot i_{h2} - R_5 \cdot i_{h3} = U_s$$

$$(2)\quad R_3 \cdot i_{h1} + (R_2+R_3+R_4)\, i_{h2} + R_4 \cdot i_{h3} = R_2 \cdot i_{s2}$$

$$(3)\quad -R_5 \cdot i_{h1} + R_4 \cdot i_{h2} + (R_4+R_5+R_6)\, i_{h3} = R_2 \cdot i_{s2}$$

R4. Ismertesse a lineáris, invariáns (~~Kirchoff~~), kauzális rendszerre az állapotváltozó fogalmát, az állapotváltozós leírás normál alakját diszkrét idejű és folytonos idejű esetben! Hogyan általánosítható ez a leírás pl nemlineáris rendszerre?

Ehhez lásd: H6 és K14 tételeket

1. Diszkrét idejű eset

2. Folytonos eset

3. Nemlineárisra általánosítva

(K4) Ismertesse a Kirchoff típusú hálózat regularitásának fogalmát! Hogyan dönthető el a hálózat regularitása? Mutasson példákat nemreguláris hálózatra!

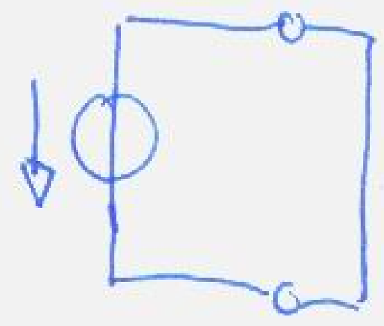
1. Definíció:

- A lineáris rezisztív hálózatot regulárisnak nevezzük, ha egyenletei egyértelműen megoldhatók valamennyi ismeretlen változójára.
- A hálózategyenletek teljes rendszere (Kirchoff)
  - 2b ismeretlen, → 2b db egyenlet (b az ágak (komponensek) száma)
  - { b db egyenlet az összekapcsolási kényszerekből (ezek lineárisan fgtlenek)
    b db egyenlet a karakterisztikákra (ezek lineárisan függetlenek) }
  - de a fenti 2 egyenletrendszer nem feltétlenül független.
- Lineáris hálózat esetén a megoldás egyértelmű
- A nem reguláris hálózatot nem tekintjük egy objektum modelljének.

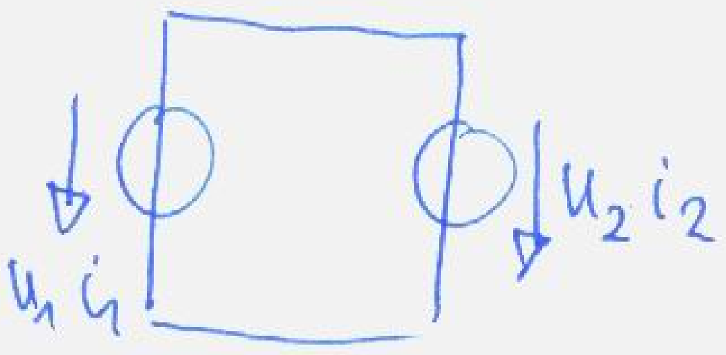
2. Csoportosítás:

a) Strukturálisan nem reguláris: olyan hálózatok, melyek a rezisztenciák és konduktanciák bármely értékei mellett sem regulárisak

pl:



vagy

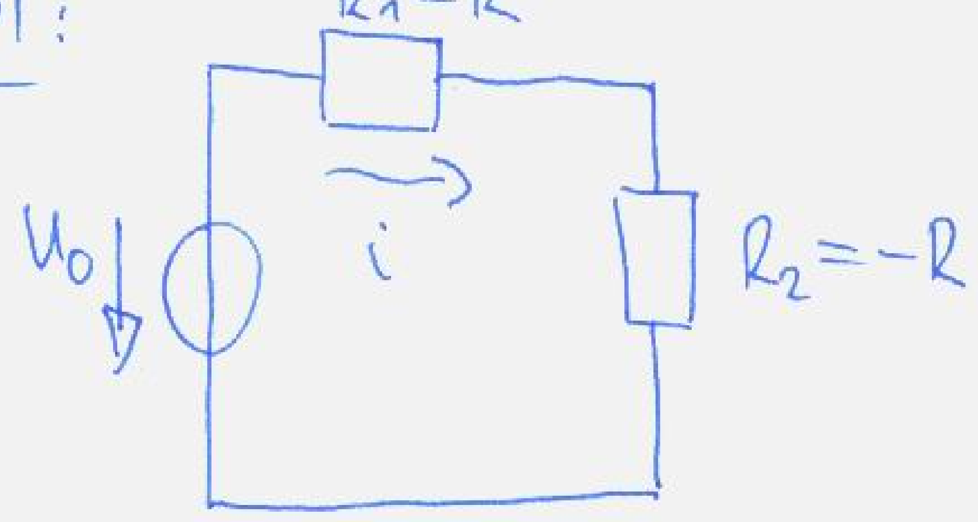


$i_1 + i_2 = 0$

$u_1 - u_2 = \emptyset$ → általában különböző fesz. források

b) parametrikusan nem reguláris: csak a paraméterek bizonyos értékeivel válnak nemregulárissá.

pl:



$iR - iR = u_s$

3.) Regularitás eldöntése:

- Csatolatlan kétpólusokból álló lineáris rezisztív hálózat akkor és csak akkor strukturálisan reguláris, ha található gráfjában egy normálfa, amely tartalmazza valamennyi feszültségforrásnak és rövidzárnak megfelelő ágat és nem tartalmaz egyetlen áramforrásnak vagy szakadásnak megfelelő ágat sem
- Nincs ilyen normálfa, ha a feszültségforrások és rövidzárak hurkot alkotnak.

R6. Értelmezze a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszer impulzusválaszát! Hogyan számítható az adott gerjesztéshez tartozó válasz az impulzusválasz ismeretében? Hogyan ábrázolható az impulzusválasz?

I. Folytonos rendszer:

a) Lásd: H8 és J1

b) fizikai jelentése: lényegében egy igen rövid ideig gerjesztett, azután magára hagyott rendszer válasza

II. Diszkrét rendszer

a) Lásd: H8 és J1

b) Diszkrét konvolúció értelmezése:

- $u[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\delta[k-i]$ alakban fejezhetők ki $u[i]$ értékek szuperpozíciójaként
- Definíció szerint:

	Gerjesztés		Válasz
	$\delta[k]$	$\longrightarrow$	$h[k]$
	$u[i]\delta[k-i]$	$\longrightarrow$	$u[i]h[k-i]$

Lineáris és invariáns tulajdonságok miatt

↳ a teljes válaszuk szuperpozíciója (konvolúciója):

$$y[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]\,u[i] = u[k] * h[k]$$

↳ kauzális rendszer és belépő gerjesztés esetén:

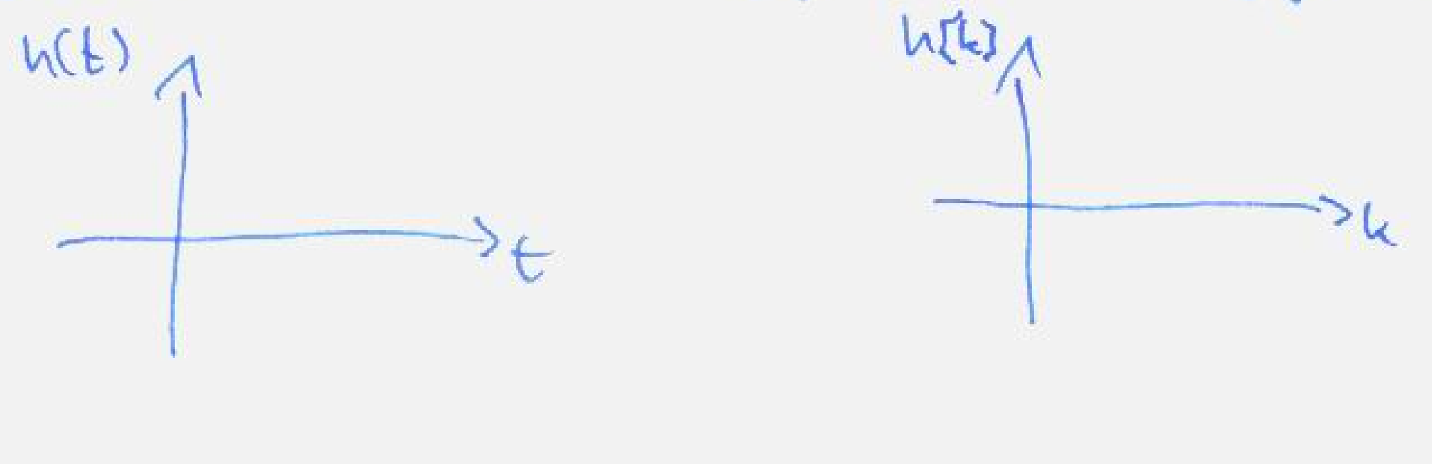
$$y[k]=\sum_{i=0}^{k} h[k-i]\,u[i] \qquad k\in N$$

részletesen:

$$y[0]=h[0]\,u[0]$$
$$y[1]=h[1]\,u[0]+h[0]\cdot u[1]$$
$$y[2]=h[2]\,u[0]+h[1]\,u[1]+h[0]\,u[2]$$

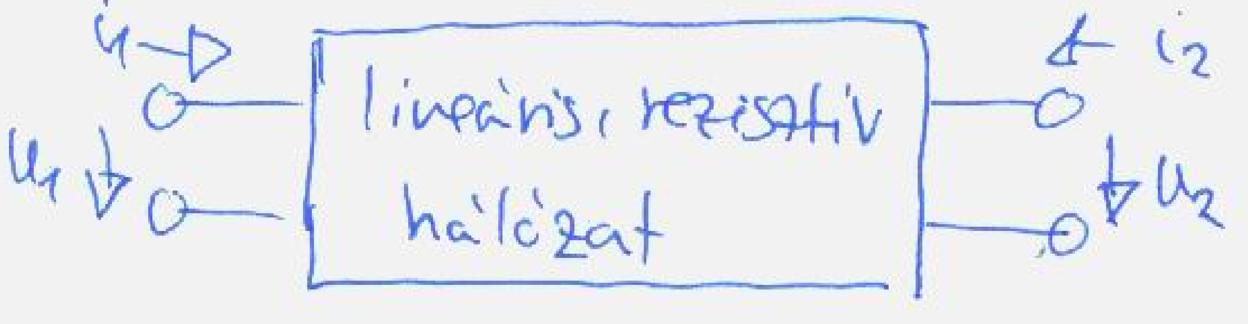
III. Ábrázolás:

- ha megkaptuk $h(t)$ vagy $h[k]$ függvényt $\Rightarrow$ ábrázoljuk



K5 Ismertesse a lineáris rezisztív kétkapuk karakterisztikáját! Valamelyik karakterisztikára adja meg a paraméterek értelmezését! Adjon módszereket a karakterisztika vagy a paraméterek számítására!

- Egy hálózatot gyakran érdemes kétpólusokkal lezárt sokkapukként értelmezni, ez főleg akkor előnyös, ha a lezáró kétpólusok változtathatók, a hálózat többi része pedig rögzített.
- Lineáris kétkapuk: a lezáró kétpólusok és a kétkapu között nincsen csatolás.



- Egy lineáris n-kapu n számú u_k kapufeszültségének és n számú i_k kapuáramának a kapcsolatait n számú kapuegyenlet adja meg. A kapuegyenletek explicit alakja: n számú változó van kifejezve a maradék n változóval.

1. Hibrid típusú karakterisztikák:

a) impedancia karakterisztika: - akkor van értelmezve, ha az áramforrásokkal lezárt kétkapu reguláris hálózathoz vezet.

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= R_{11}\cdot i_1 + R_{12}\cdot i_2 \\ u_2 &= R_{21}\cdot i_1 + R_{22}\cdot i_2 \end{aligned}}$$

R_{pq}: impedancia paraméterek

számítási módjuk: $R_{pq} = \left(\frac{u_p}{i_q}\right)^{(q)}_{sz}$ – forrás helye

- az áramok függetlenek egymástól, tehát minden kapura kapcsolható áramforrás.
- R_{11} (és R_{22}): primer (és szekunder) oldali üresjárási bemeneti rezisztencia
- R_{12} (és R_{21}): ~~átv~~ előreviteli (és hátraviteli) üresjárási átviteli reziszt.

b) admittancia karakterisztika:

$$\boxed{\begin{aligned} i_1 &= G_{11}\cdot u_1 + G_{12}\cdot u_2 \\ i_2 &= G_{21}\cdot u_1 + G_{22}\cdot u_2 \end{aligned}}$$

$G_{pq} = \left(\frac{i_p}{u_q}\right)^{(q)}_{rz}$ a feszültségek függetlenek

c) hibrid karakterisztika:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= H_{11}\cdot i_1 + H_{12}\cdot u_2 \\ i_2 &= H_{12}\cdot i_1 + H_{22}\cdot u_2 \end{aligned}}$$

$H_{11} = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)^{(1)}_{rz}$ $H_{12} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{(2)}_{sz}$

$H_{21} = \left(\frac{i_2}{i_1}\right)^{1}_{sz}$ $H_{22} = \left(\frac{i_2}{u_2}\right)^{(2)}_{sz}$

d) inverz hibrid karakterisztika: ugyanolyan, mint a hibrid karakterisztika, csak a kapuk szerepe fel van cserélve.

$$\boxed{\begin{aligned} i_1 &= K_{11} \cdot u_1 + K_{12} \cdot i_2 \\ u_2 &= K_{21} \cdot u_1 + K_{22} \cdot i_2 \end{aligned}}$$

2. Lánc típusú karakterisztikák:

a) lánc karakterisztika:

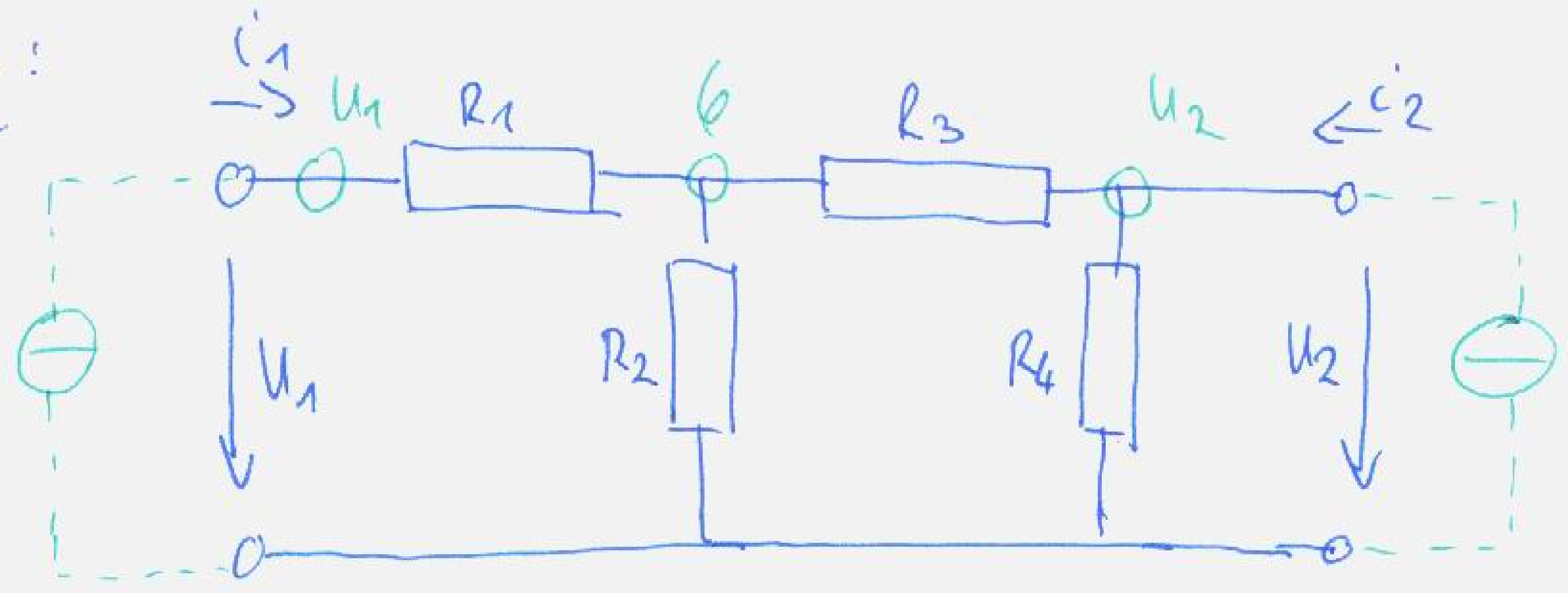
$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= A_{11} \cdot u_2 + A_{12} \cdot i_2 \\ i_1 &= A_{11} \cdot u_2 + A_{22} \cdot i_2 \end{aligned}}$$

paraméterek számítása: $A_{11} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)_{sz}^{(1)}$ $A_{12} = \left(\frac{u_1}{i_2}\right)_{rz}^{(1)}$

b) inverz lánc karakterisztika:

$$\boxed{\begin{aligned} u_2 &= B_{11} \cdot u_1 + B_{12} \cdot i_1 \\ i_2 &= B_{21} \cdot u_1 + B_{22} \cdot i_1 \end{aligned}}$$

3. Példa:



ismert: i_1, i_2
kell: u_1, u_2
} impedancia karakterisztikával!

R3 Ismertesse a diszkrét idejű rendszeregyenlet megoldására szolgáló módszereket az idő-, a frekvencia és a komplex frekvencia tartományban! Illusztrálja a módszereket egy egytárolós példával!

1. Az időtartományban:

a) fokozatos behelyettesítéssel (lépésről lépésre) – egytárolós – skalárszorzatként adott gerjesztés ismeretében

- a rendszer egyenlet: $y[k]=b_0u[k]+b_1u[k-1]+\ldots+b_mu[k-m]-a_1y[k-1]-\ldots-a_ny[k-n]$
- a rendszeregyenletbe helyettesítsük be $k=0,1,2\ldots$ értékeket, a válasz $\emptyset$ időpontbeli értékei ismertek.
- kezdeti feltételek adottak: $y[-1], y[-2]\ldots y[n]$, bekapcsolási folyamatnál $\emptyset$-ák.
- a fokozatos behelyettesítés során a rendszer egyenlet:

$k=\emptyset$ $\quad y[\emptyset]=b_0u[0]+b_1u[-1]+\ldots+b_mu[-m]-a_1y[-1]-\ldots-a_ny[-n]$

$k=1$ $\quad y[1]=b_0u[1]+b_1u[\emptyset]+\ldots+b_mu[1-m]-a_1y[0]-\ldots-a_ny[1-n]$

$k=2$ $\quad y[2]=b_0u[2]+b_1u[1]+\ldots+b_mu[2-m]-a_1y[1]-\ldots-a_ny[2-n]$

$\vdots$

- Az eljárás rekurzív, az ismertnek feltételezett $u[i]$ és $y[-1]\ldots y[-n]$ értékeken kívül szerepelnek még a korábban számított $y[0], y[1],\ldots y[i]$ értékek is.
- Az eljárás előnye, hogy bármilyen számsorozattal adott gerjesztésre meghatározható a válasz
- Hátránya, hogy az eredményül kapott számsorból nehéz általános következtetéseket levonni (pl GV stabilitás, tart-e a $\emptyset$-hoz, stb)
- Alkalmas variáns rendszerek számítására

b) Az impulzusválasz számítása:

- először meghatározzuk az $y[k]+a_1y[k-1]+\ldots+a_ny[k-n]=\delta[k]$ egyszerűsített ($y[k]=h_0[k]$) rendszeregyenlet megoldását.
- ebből az impulzusválasz: $h[k]=b_0h_0[k]+b_1h_0[k-1]+\ldots+b_mh_0[k-m]$
- Keressük a megoldást $h_0[k]=\varepsilon[k]\cdot M\cdot\lambda^k$ alakban.
- Ezt az alakot visszahelyettesítve, majd $M\cdot\lambda^{k-n}$-el leosztva a karakterisztikus egyenletet kapjuk: $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda^n+a_n=\emptyset$
- A λ_i^k függvények a rendszeregyenlet sajátfüggvényei.
- A segédimpulzusválasz alakja ekkor: $h_0[k]=M_1\lambda_1^k+M_2\lambda_2^k+\ldots+M_n\lambda_n^k$.
- Az ismeretlen együtthatók a $h_0[k]=\emptyset$ illetve $h_0[\emptyset]=1$ feltételekből meghatározhatók.

...

- Így már visszatérhetünk a $h[k]=\sum_{j=0}^{m} b_j h_0[k-j]$ alakra
- Az eltolt exponenciális függvényeket a $k=m$, sőt a $q=\max(0, m-n+1)$ ütemtől kezdve össze lehet vonni.
- Az impulzusválaszt a következő alakra célszerű rendezni:

$$h[k]=C_0\delta[k]+C_1\delta[k-1]+\dots+C_{q-1}\delta[k-(q-1)]+\varepsilon[k-q]\cdot f[k-q]$$

ahol egyszeres sajátértékek esetén: $f[k-q]=N_1\lambda_1^{k-q}+\dots+N_n\lambda_n^{k-q}$

c) Komponensekre bontás

- $y[k]=y_s[k]+y_g[k]$ ahol $y_s[k]$ a sajátválasz, $y_g[k]$ a gerjesztett válasz.

→ Sajátválasz meghatározása:

- $u[k]=0$ homogén rendszeregyenlet
- A megoldást $\boxed{y_s[k]=A\cdot\lambda^k}$ alakban keressük: $A\lambda^k+a_1A\lambda^{k-1}+\dots+a_nA\lambda^{k-n}=0$
- Az egyenletet $A\cdot\lambda^{k-n}$-el osztva a karakterisztikus egyenletet kapjuk:
  $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$.
- A karakterisztikus egyenlet gyökei a sajátértékek.
- A sajátválasz általános alakja egyszeres sajátértékek esetén: $y_s[k]=\sum_{i=1}^{n}A_i\lambda^k$
- Ha valamelyik sajátérték többszörös, akkor nem csak λ^k, hanem $k\cdot\lambda^k, k^2\lambda^k \dots k^{q-1}\lambda_k$ is megoldás
- Ha λ q-szoros sajátérték, akkor $y_s[k]=\sum_{i=1}^{s-1}A_i y_i^k+\sum_{r=0}^{q-1}A_{sr}k^r\lambda^k$

→ Gerjesztett válasz meghatározása:

- Próbafüggvényekkel, akkor alkalmazható, ha a rendszeregyenlet jobboldala egyetlen függvénnyel (tényleg konstans, tényleg a^k vagy tényleg $\cos(\vartheta k)$) megoldható.

pl: $y[k]-0{,}5y[k-1]-0{,}4y[k-2]=2u[k-1]-0{,}6u[k-2]-0{,}3u[k-3]$
$u[k]=\varepsilon[k]$

-

Jobboldal	Próbafüggvény
konstans	konstans
a^k	$A\cdot a^k$
$\cos(\vartheta k)$	$A\cdot\cos(\vartheta k)+B\sin(\vartheta k)$

- A próbafüggvényt visszahelyettesítjük a rendszeregyenletbe
- Az eltolások miatt a próbafüggvény által szolgáltatott $y_g[k]$ elvileg csak $k\geq m$ esetén fogadható el. Mivel azonban a szabad összetevő n számú állandót tartalmaz, ezért $y_g[k]$ kifejezése n számú korábbi ütemre, vagyis a $k\geq m-n$ ütemekre is kiterjeszthető.

d) A válasz meghatározása:

- Az ismeretlen A_i együtthatók a kezdeti feltételekből számíthatók.

2. Frekvenciatartományban:

- A rendszeregyenletből felírható az átviteli karakterisztika, a gerjesztés Fourier transzformáltját az átviteli karakterisztikával megszorozva, majd a szorzatot inverz Fourier transzformálva kapjuk a választ.

3. Komplex frekvenciatartományban:

- Ugyanígy járunk el, csak z transzformációval.

4. Példa (~~fokozatos behelyettesítéssel~~)

- $y[k] - y[k-1] + 0{,}24\,y[k-2] = u[k] + 0{,}5\,u[k-1] - 0{,}2\,u[k-3]$; $(n=2,\ m=3,\ r=1)$
- állandó értékhez tartó, belépő gerjesztés: $u[k] = \varepsilon[k]\{12 - 2\cdot 0{,}5^k\}$
- a rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete és sajátértékei: $\lambda^2 - \lambda + 0{,}24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0{,}6$, $\lambda_2 = 0{,}4$
- Mivel $r = m - n = 1$, ezért a gerjesztett választ a következő alakban keressük:

$$y_g[k] = A + B\,0{,}5^{k-1} \quad ; k \geq 1$$

- Helyettesítsük a próbafüggvényt a rendszeregyenletbe! Ennek jobb oldala $k \geq 3$ esetén:

$$\{12 - 2\cdot 0{,}5^k\} + 0{,}5\{12 - 2\cdot 0{,}5^{k-1}\} - 0{,}2\{12 - 2\cdot 0{,}5^{k-3}\} = 15{,}6 - 0{,}4\cdot 0{,}5^{k-1}$$

- Az együtthatókra vonatkozó egyenlet és megoldása:

$$A(1 - 1 + 0{,}24) + B\cdot 0{,}5^{k-1}(1 - 2 + 0{,}24\cdot 4) = 15{,}6 - 0{,}4\cdot 0{,}5^{k-1} \Rightarrow A = 65,\ B = 10$$

- A válasz általános alakja a sajátértékek figyelembe vételével:

$$y[k] = M_1\cdot 0{,}6^{k-1} + M_2\cdot 0{,}4^{k-1} + 65 + 10\cdot 0{,}5^{k-1} \quad ; k \geq 1$$

- A kezdeti értékeket fokozatos behelyettesítéssel számítjuk:

$k=0$: $y[0] = u[0] = 10$

$k=1$: $y[1] = u[1] + 0{,}5\,u[0] + y[0] = 26$

$k=2$: $y[2] = u[2] + 0{,}5\,u[1] + y[1] - 0{,}24\,y[0] = 40{,}6$

$k=3$: $y[3] = u[3] + 0{,}5\,u[2] - 0{,}2\,u[0] + y[2] - 0{,}24\,y[1] = 49{,}96$

- A kezdeti feltételeket a $k = m - n = 1$ és $k = m - n + 1 = 2$ helyen érvényesítjük:

$$\left.\begin{aligned} k=1 &: M_1 + M_2 = 26 - (65+10) \\ k=2 &: 0{,}6M_1 + 0{,}4M_2 = 40{,}6 - (65+5) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} M_1 &= -49 \\ M_2 &= \emptyset \end{aligned}$$

- Mivel $M_2=0$, ezért az egyik sajátfüggvény az adott gerjesztés esetén nem lép fel a válaszban. Ez speciális eset, mert általánosan a válaszban minden sajátfüggvény szerepel. A keresett válasz végső alakja:

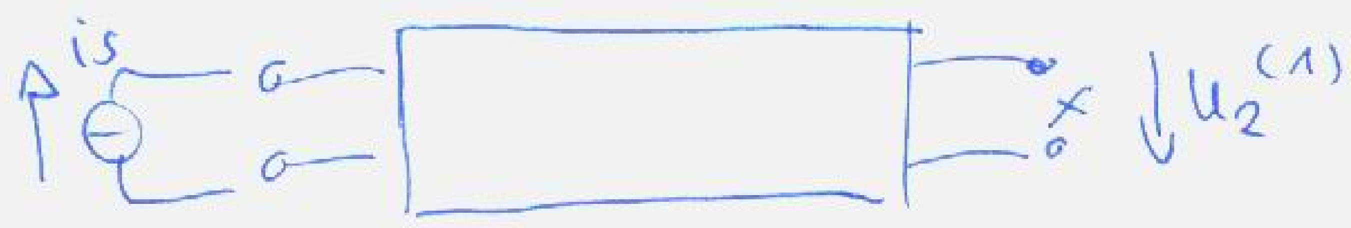
$$y[k] = 10\delta[k] + \varepsilon[k-1]\{65 + 10\cdot 0{,}5^{k-1} - 49\cdot 0{,}6^{k-1}\}$$

K6) Ismertesse a lineáris rezisztív kétkapuk reciprocitásának, szimmetriájának és passzivitásának fogalmát! Hogyan ellenőrizhetők ezek a tulajdonságok a kétkapu karakterisztikájának ismeretében? Mikor adható ezekre egyszerű elégséges feltétel?

1. Reciprocitás:

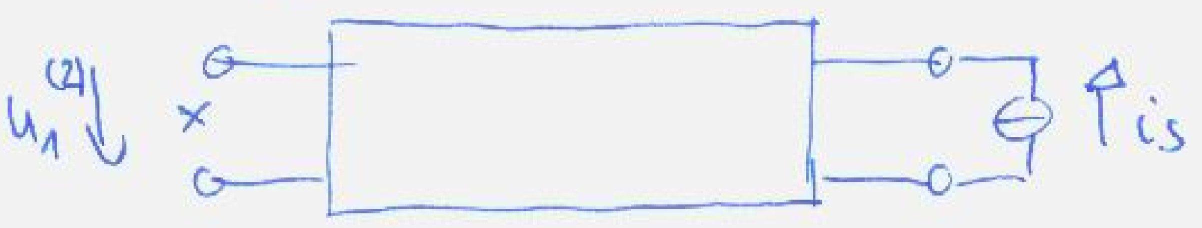
a) Definíció:

1. mérés:



ha $\boxed{u_2^{(1)} = u_1^{(2)}}$ akkor a kétkapu reciprok

2. mérés:



b) Kritériumok a karakterisztikák alapján:

- imp. k: $\left.\begin{array}{l} u_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ u_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (1) mérés $u_2^{(1)} = R_{21} \cdot i_s$; (2) mérés $u_1^{(2)} = R_{12} \cdot i_s$

mivel $u_2^{(1)} = u_1^{(2)} \Longleftrightarrow \boxed{R_{12} = R_{21}}$

- Hasonlóan a többi karakterisztikára is meghatározhatók a kritériumok

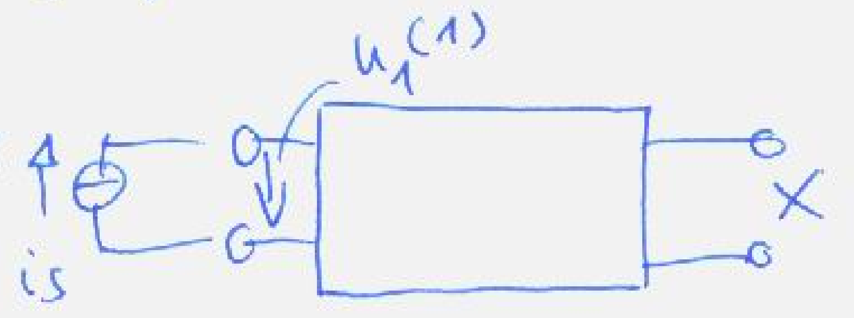
$G_{12} = G_{21}$; $H_{12} = -H_{21}$; $-K_{12} = K_{21}$; $\pm \Delta_A = 1$; $1 = \pm \Delta_B$

- Ha egy hálózat csak ellenállásokat és ideális transzformátorokat tartalmaz, akkor biztosan reciprok. Nem reciprok komponenseket tartalmazó kétkapu csak kivételesen lehet reciprok!

2. Szimmetria

a) Definíció: - Ennek a reciprocitás előfeltétele!

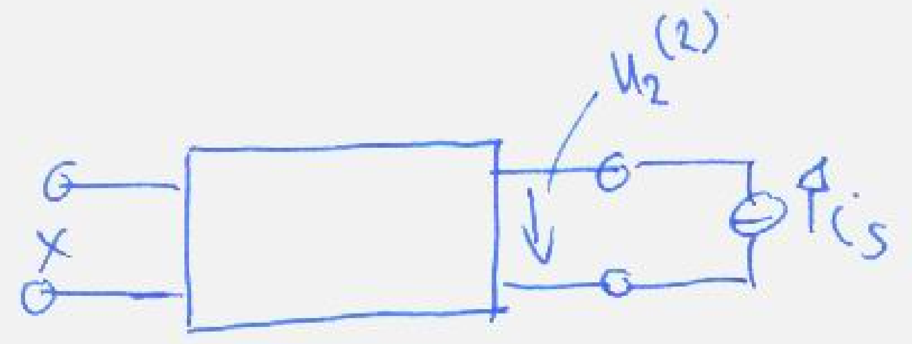
- Ezentúl: 1. mérés



$u_1^{(1)} = R_{11} \cdot i_s \; (i_2 = 0)$

$u_2^{(2)} = R_{22} \cdot i_s \; (i_1 = 0)$

2. mérés



- Szimmetrikus, ha reciprok és $u_1^{(1)} = u_2^{(2)}$

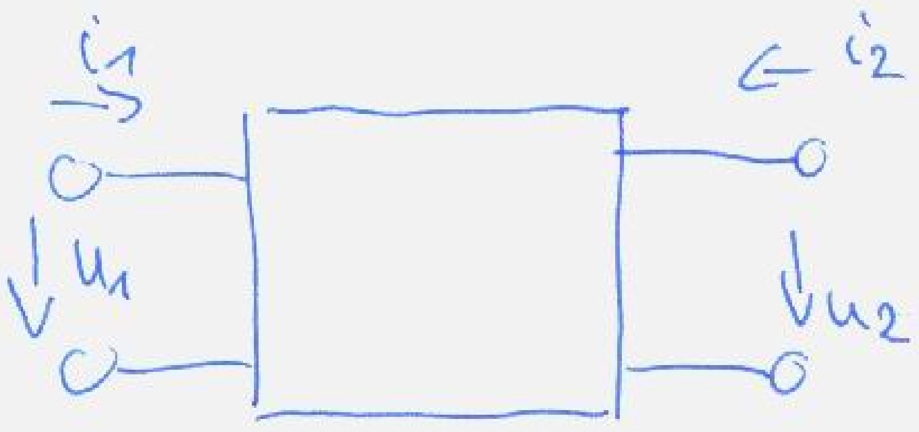
b) Kritériumok: - $R_{11} = R_{22}$ (+ reciprok feltétel)

- $G_{11} = G_{22}$
- $\det H = 1$
- $\det K = 1$
- $A_{11} = \pm A_{22}$

3. Passzivitás:

a) Általános feltétel (Definíció): A passzivitás feltétele, hogy a komponensek munkafüggvénye nem negatív legyen: $W(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau \geq 0$ minden t-re

b) Lineáris rezisztív kétkapura:



$\boxed{p(t) \geq 0}$

$\downarrow$

$\boxed{u_1 i_1 + u_2 i_2 \geq 0}$ (többet nem vesz fel, mint amennyit lead

$(R_{11} i_1 + R_{12} i_2) i_1 + (R_{21} i_1 + R_{22} i_2) i_2 \geq 0$

$R_{11} i_1^2 + (R_{12} + R_{21}) i_1 i_2 + R_{22} i_2^2 \geq 0$

c) Kritérium (mind a négy hibrid karakterisztikára igaz)

$$\boxed{F_{11} \geq 0 \; ; \; F_{22} \geq 0 \; ; \; F_{11} F_{22} \geq \left(\frac{F_{12} + F_{21}}{2}\right)^2}$$

d) Nonenergikus kétkapu:

$$\boxed{F_{11} = 0 \quad F_{22} = 0 \quad F_{12} + F_{21} = 0}$$

(ált.: $p(t) = 0$ minden időpillanatban)

Pl: ideális transzformátor, girátor → nonenergikus
vezérelt forrás, id. erősítő → aktív komponensek

(22) Ismertesse a diszkrét idejű rendszer rendszeregyenleteinek fogalmát, általános alakját, és a megoldásához szükséges adatokat! Milyen típusú rendszerekre érvényes a megadott alak?

1. A rendszeregyenlet definíciója:

a) A rendszeregyenlet implicit kapcsolatot teremt a gerjesztés és a válasz között. A diszkrét idejű rendszeregyenletben nem csak maga a gerjesztés és a válasz, hanem azok eltolt értékei is szerepelnek.

b) Általános alak: $y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{i=1}^{m} b_i u[k-i]$

- A rendszer invarianciája miatt a_i és b_i együtthatók állandóak.
- A rendszer kauzalitása miatt a gerjesztésének nem szerepelnek ösztetett értékei.
- Az $m, n \in N$ számokra nincs megkötés.
- n: a rendszeregyenlet rendszáma (általában megegyezik az állapotváltozós leírás N rendszámával)

c) Rendszer típusok:

a válaszban ($y[k]$) a $b_i[k-i]$ tagok összege a gerjesztés valamilyen mozgó átlagának tekinthető (MA), az $a_i y[k-i]$ tagok pedig a visszahatást vagy autoregressziót (AR) fejezik ki.

⇒ a rendszer általában:

1) ARMA: a fenti kettő kompozíciója, ez a rekurzív alak
- Auto Regressive Moving Average

2) nem rekurzív alak:
- stabil, mert nincsenek pólusai
- ha a hálózat nem tartalmaz visszacsatolást, akkor $y[k] = \sum_{i=0}^{m} b_i u[k-i]$
- ekkor a számítás csak a gerjesztés behelyettesítését igényli

~~5~~.2.) Megoldásához szükséges adatok

- Ha a rendszeregyenlet meg van adva:
  - ARMA típusúnál : $y[k-i]$ kezdeti értékek kellenek $(i=1,2\dots)$
  - ha nem rekurzív : elegendő a gerjesztés időfüggvényének ismerete.

3.) A rendszeregyenlet megoldása:

a) lépésről lépésre

b) komponensekre bontással $\quad y[k] = y_s[k] + y_g[k]$ } lásd R3 tétel!

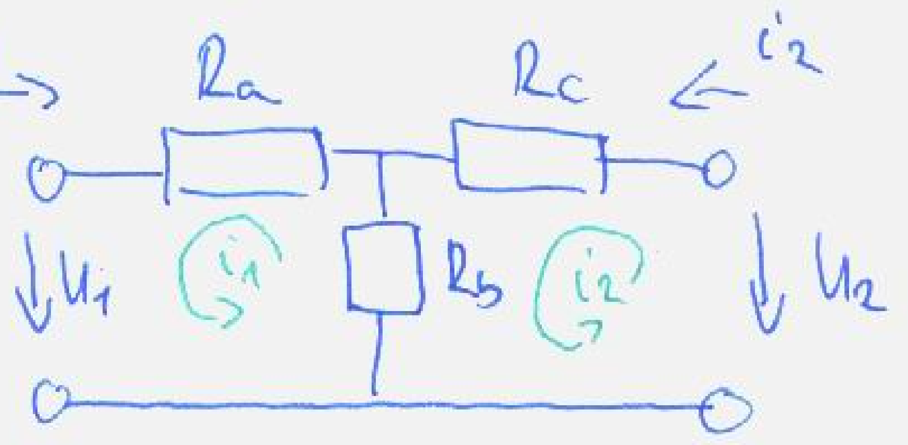
c) $\mathcal{F}\{\ \}$, $\mathcal{Z}\{\ \}$ transzformációval

K7 Ismertesse a reciprok és nemreciprok lineáris rezisztív kétkapuk helyettesítő kapcsolásait! Válasszon egy karakterisztikát és adjon meg legalább egy, ezt realizáló helyettesítő kapcsolást!

1.) Reciprok kétkapuk ($R_{12} = R_{21}$)

- Lineáris rezisztív reciprok kétkapuknak két helyettesítő kapcsolása létezik: T helyettesítő kapcsolás és Π helyettesítő kapcsolás

- A T helyettesítő kapcsolás akkor létezik, ha értelmezett a kétkapu imp. karakterisztikája, ekkor:



$$\boxed{\begin{aligned} R_a &= R_{11} - R_{21} \\ R_c &= R_{22} - R_{21} \\ R_b &= R_{21} \\ R_{21} &= R_{12} \end{aligned}}$$

$-u_1 + R_a \cdot i_1 + R_b(i_1 + i_2) = 0$

$-u_2 + R_c i_2 + R_b(i_1 + i_2) = 0$

$u_1 = (R_a + R_b) i_1 + R_b i_2$

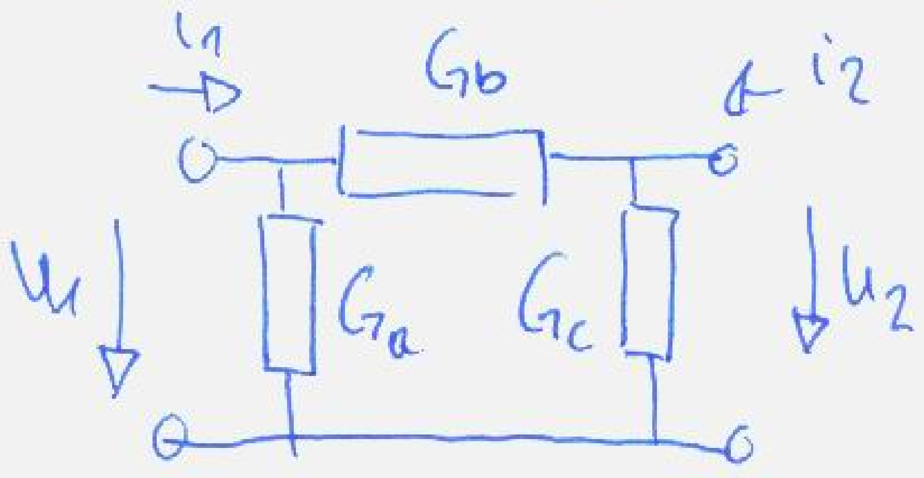
$u_2 = R_b i_1 + (R_b + R_c) i_2$

$R_a + R_b = R_{11}$

$R_b = R_{12}$

$R_b + R_c = R_{22}$

- A Π helyettesítő kapcsolás akkor létezik, ha értelmezett a kétkapu admittancia karakterisztikája, ekkor:



$G_a = G_{11} + G_{21}$

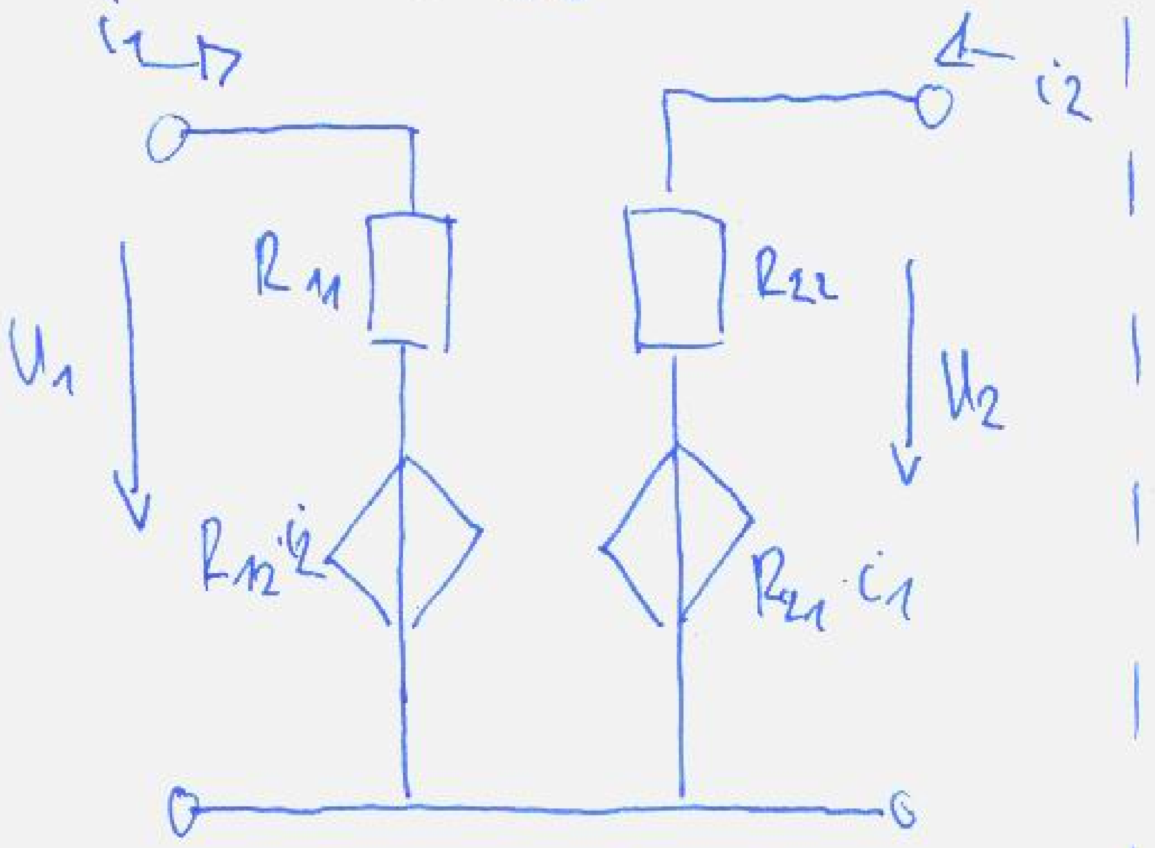
$G_c = G_{22} + G_{21}$

$G_b = -G_{21}$

- Ha a kétkapu szimmetrikus, akkor a helyettesítő kapcsolás felépítése is szimm.

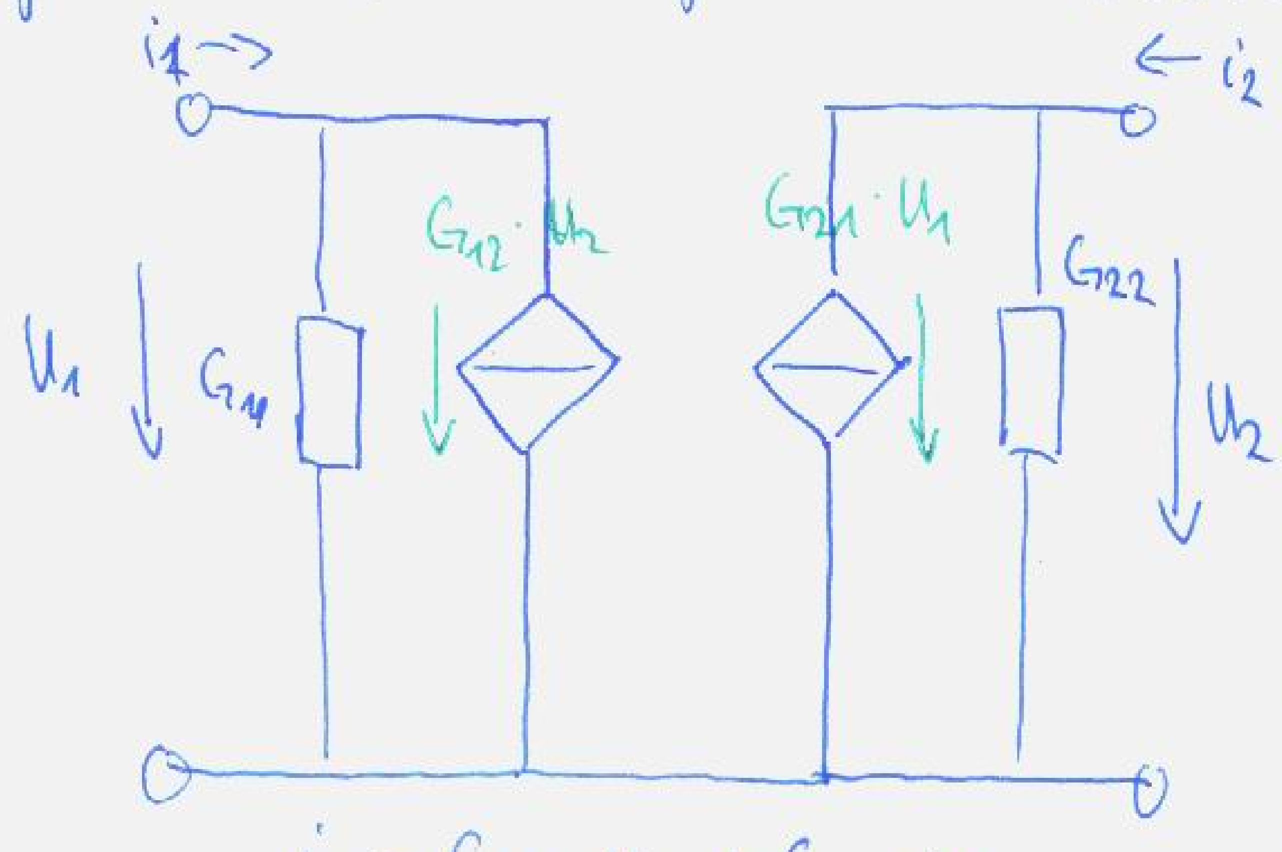
2. Nemreciprok kétkapuk:

- Létezik természetes helyettesítő kapcsolásuk, amely két ellenállást és két vezérelt forrást tartalmaz. A helyettesítő kapcsolás paraméterei megegyeznek valamelyik hibrid típusú karakterisztika paramétereivel.



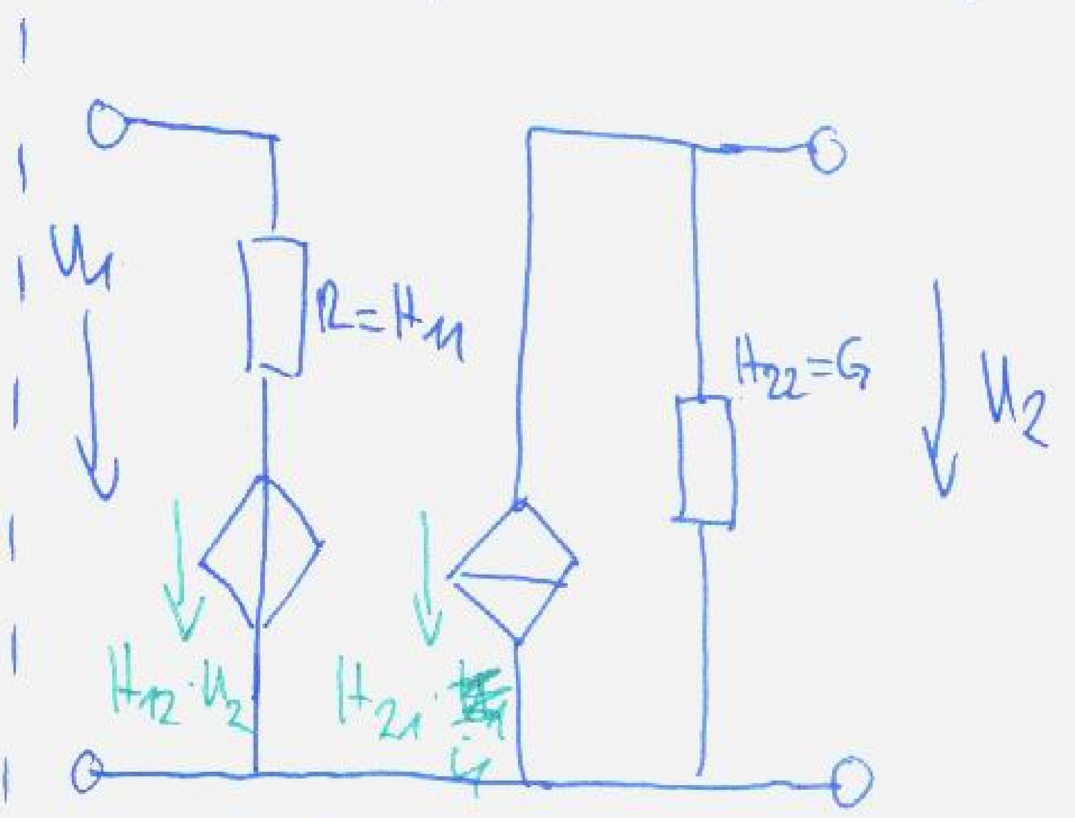
$u_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2$

$u_2 = R_{21} \cdot i_1 + R_{22} i_2$



$i_1 = G_{11} \cdot u_1 + G_{12} \cdot u_2$

$i_2 = G_{12} u_1 + G_{22} \cdot u_2$

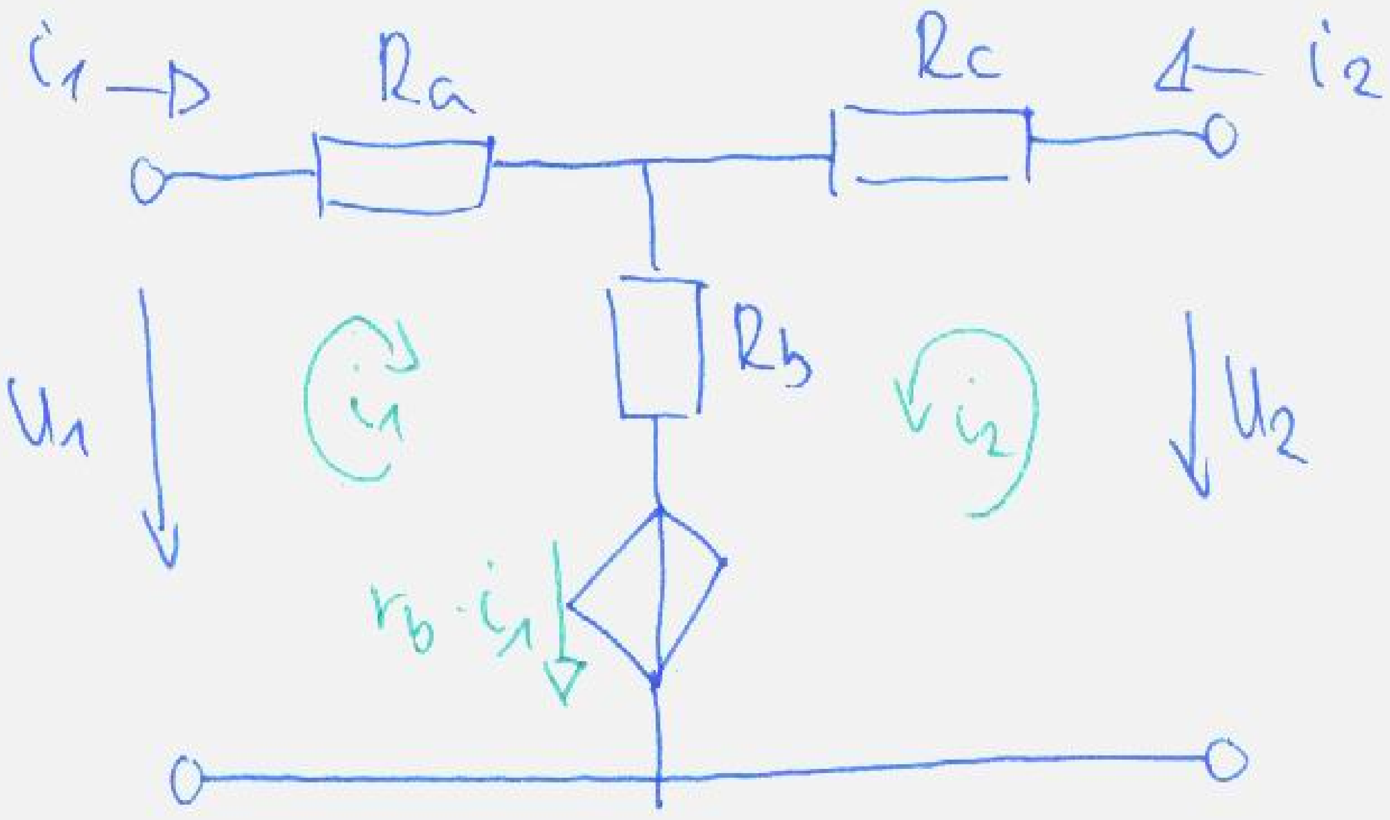


$u_1 = H_{11} \cdot i_1 + H_{12} \cdot u_2$

$i_2 = H_{21} \cdot i_1 + H_{22} \cdot u_2$

Hibrid T és hibrid Π helyettesítő kapcsolás:

- Ha létezik az impedancia illetve az admittancia karakterisztika, akkor a kétkapu helyettesíthető egy 3 ellenállásból és egy ~~vezérlet~~ vezérelt forrásból álló hibrid T vagy hibrid Π taggal.

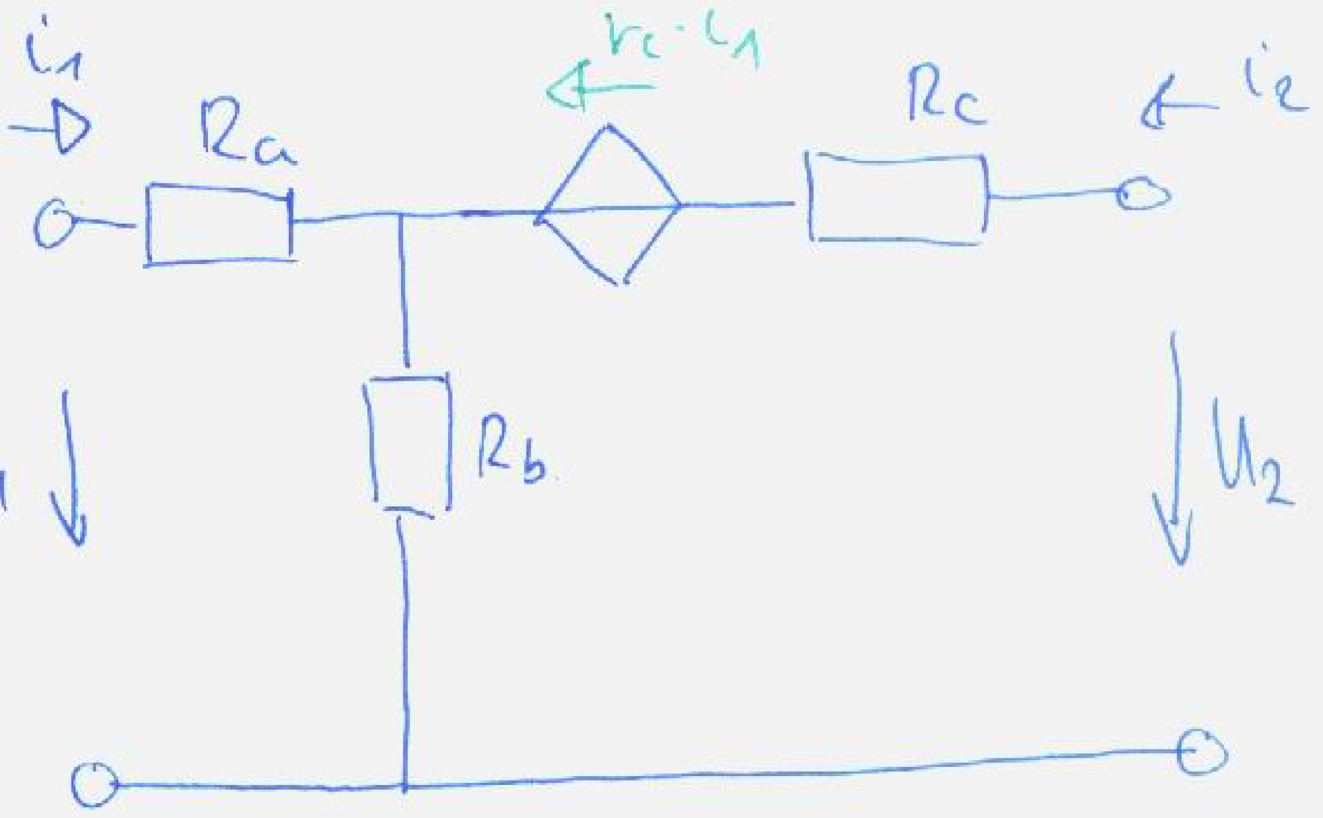


$R_a = R_{11} - R_{21}$

$R_b = R_{12}$

$R_c = R_{22} - R_{12}$

$r_b = R_{21} - R_{12}$

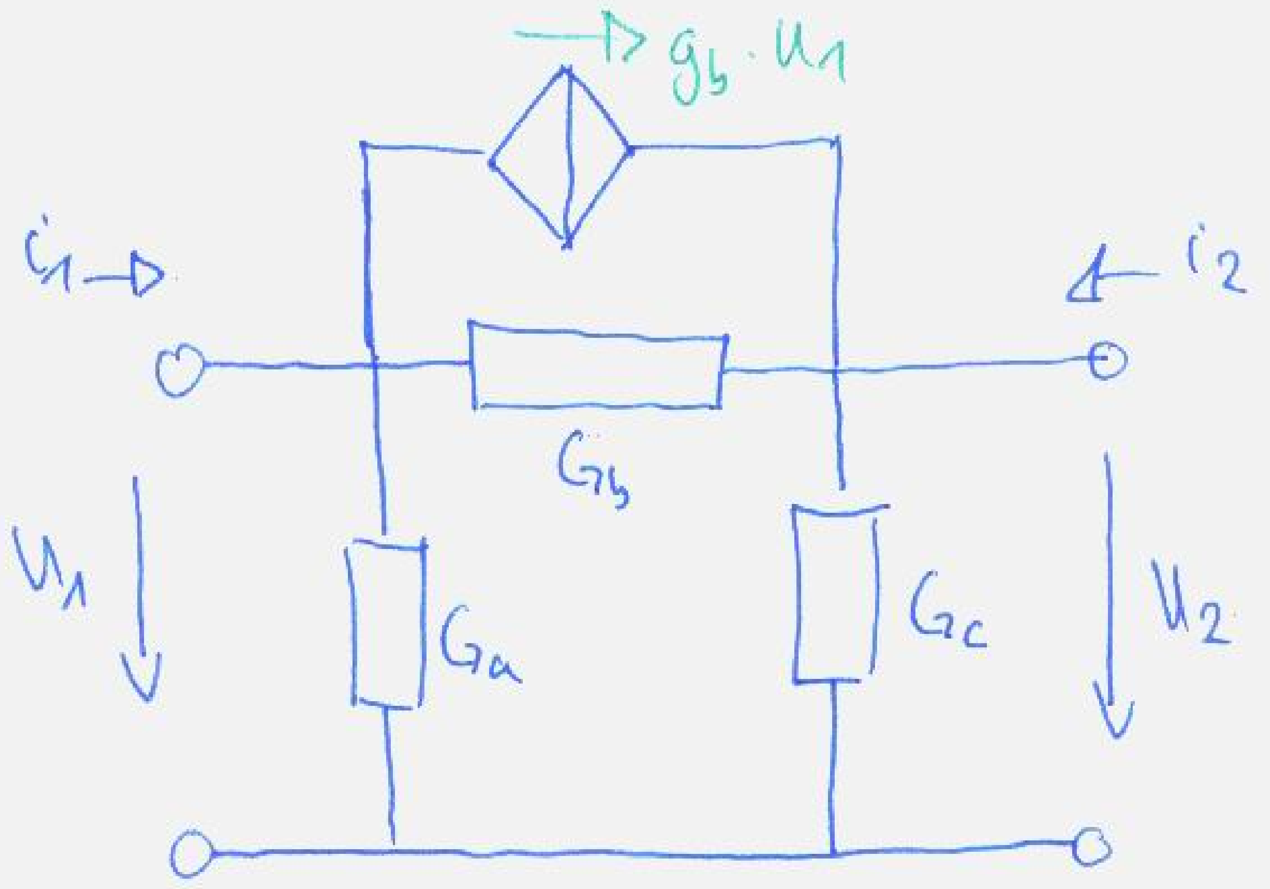


$R_a = R_{11} - R_{12}$

$R_b = R_{12}$

$R_c = R_{22} - R_{12}$

$r_c = R_{21} - R_{12}$



$G_a = G_{11} + G_{21}$

$G_b = -G_{12}$

$G_c = G_{22} + G_{12}$

$g_b = G_{12} - G_{21}$

$G_a = G_{11} + G_{12}$

$G_b = -G_{12}$

$G_c = G_{22} + G_{12}$

$g_c = G_{21} - G_{12}$

R1 Ismertesse a rendszer fogalmát! Adjon áttekintést a rendszerek osztályozási szempontjairól (a változók száma, jellege, kapcsolatuk típusa, stb)! Mit jelent a lineáris, az invariáns, illetve a stabilis jelző?

- A rendszer egy létező vagy megvalósítandó objektum olyan modellje, amely kielégítő pontossággal leírja a keresett változók függését az adott változóktól.
- Vagy másképpen: a rendszer azokat a transzformációkat írja le, amelyek átviszik az adottnak tekintett $u_k = u_k(t)$, $k = 1,2 \ldots N_u$ gerjesztéseket a keresett $y_k = y_k(t)$ $k = 1,2 \ldots N_y$ válaszokba.
- Villamos rendszer esetén a gerjesztések és válaszok többnyire elektromos feszültségek vagy áramok (de a rendszer ennél általánosabb fogalom: u és y ?...)

1. Rendszerek osztályozása:

→ lineáris: csak lineáris elemeket és forrásokat tartalmaz, érvényes benne a szuperpozíció elve az egyes gerjesztésekre a válaszok függetlenül számíthatóak: $\mathcal{U}(k_1 i_1(t) + k_2 i_2(t)) = k_1 \mathcal{U}\{i_1(t)\} + k_2 \mathcal{U}\{i_2(t)\}$

→ invariáns: a gerjesztés–válasz kapcsolat az időbeli eltolás nem befolyásolja:
$$\mathcal{U} = \{i(t)\} = u(t) \Rightarrow \mathcal{U}\{i(t-T)\} = u(t-T)$$

→ kauzális: bármely t_k időpontban az $y(t_k)$ válasz csak a gerjesztés $-\infty < t < t_k$ intervallumbeli $u(t)$ értékétől függ.

→ memóriamentes: a válasz minden időpontban csak a gerjesztés ugyanazon időpontban felvett értékétől függ, különben a rendszer dinamikus

→ gerjesztés válasz stabilitás: bármilyen korlátos gerjesztésre a válasz is korlátos (lineáris, invariáns) GV stab. határhelyzete → véges gerjesztés (nem stabilis) primitív lineáris komponensek + forrásokból összekapcsolt hálózat által reprezentált rendszer többnyire GV stabilis

2. SISO, MIMO

a) SISO: 1 gerjesztés, 1 válasz

$u = u(t) \rightarrow y = y(t)$

→ kapcsolat: $y = Y\{u\}$ → gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja

- de gyakran csak implicit alakban tudjuk az $y-u$ kapcsolatot

↳ ebből megoldásként kapjuk az explicit alakot

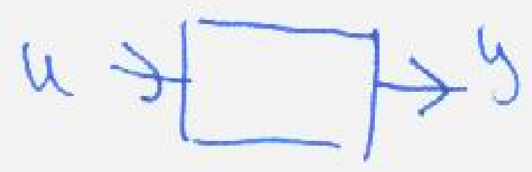
b) MIMO

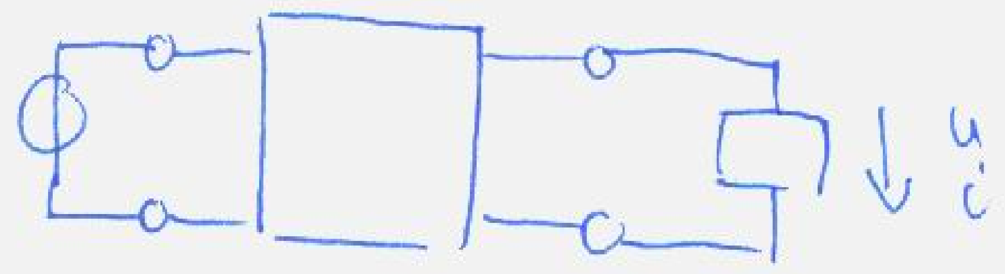
- annyi operátor, amennyi a válaszok száma

$$y_k(t) = Y_k\{u_1, u_2 \dots u_N\} \quad k = 1, 2 \dots N_N$$

- a válaszok egymástól függetlenül számolhatók
- ha lineáris, akkor az egyes gerjesztések hatása függetlenül vizsgálható

Rendszert reprezentáló hálózat





(K10) Ismertesse a lineáris, invariáns Kirchoff típusú hálózatok periodikus állapotának számítását a Fourier soros felbontás felhasználásával! Ismertesse a pillanatnyi és hatásos teljesítmény fogalmát és számításuk módszereit!

---

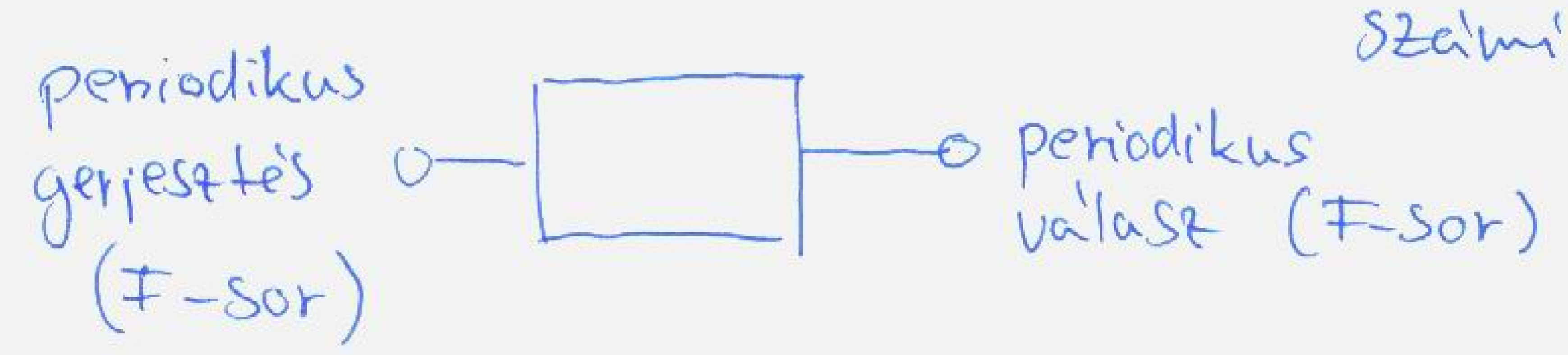
1. Fourier sorfejtés - periodikus jel:

- Ehhez lásd a (36.) tételt! → tekintsük adottnak a Fourier soros felbontását (közelítését) a jelnek.

2. Periodikus állapot számolása:

Periodikus válasz akkor tekinthető állandósult válasznak, ha a hálózat stabilis.

- Általános séma: (feladat) ⇒ a periodikus válasz számításának visszavezetése a különböző szinuszos gerjesztésekhez tartozó válaszok számításaira, majd ezek összegzésére.



- Ha a válasznak az effektív értéke a kérdés, akkor is csak a válasz Fourier során keresztül kaphatjuk meg.

- Számítás menete:

① adva van: $u(t) = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \rho_1) + U_2 \cdot \cos(2\omega_1 t + \rho_2) + \dots$
gerjesztés F-sorba fejtett alakja

② $H(j\omega)$ meghatározása: komplex számítás móddal,
$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$ összefüggéssel, ω paraméterrel.

③ A válasz megadása:
minden $k\omega_1$-re $(k \in \mathbb{Z})$ meg kell adni az átviteli tényezőket,
$|H(j\omega)|$-t és $\varphi(H(j\omega))$-t

↳ a válasz: $y(t) = U_0 \cdot H(\emptyset) + U_1 \cdot H(\omega_1) \cos(\omega_1 t + \rho_1 + \varphi(\omega_1)) +$
$+ U_2 \, H(2\omega_1) \cos(2\omega_1 t + \rho_2 + \varphi(2\omega_1)) + \dots$

- következtetés: a rendszer a különböző frekvenciákat különböző módon viszi át.

3. A pillanatnyi és a hatásos teljesítmény számítási módszerei:

a) Pillanatnyi teljesítmény: $p(t) = ?$

- Adva van egy kétpólus feszültségének és áramának F sorba fejtett alakja T periódusidővel és $\omega = \frac{2\pi}{T}$ alap- körfrekvenciánál.

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot \cos(k\omega t + \rho_k)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cdot \cos(k\omega t + \rho_k - \varphi_k)$$

- $p(t) = u(t) \cdot i(t)$: a 2 sor szorzata:

$$p(t) = U_0 I_0 + U_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \rho_k - \varphi_k) + I_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot \cos(k\omega t + \rho_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_k \cos(k\omega t + \rho_k) I_n \cos(n\omega t + \rho_n - \varphi_n)$$

- semmi különleges szabályt nem mutat
- periodikus T-vel

b) Hatásos teljesítmény: P (munkavégzésre jellemző, átlagos teljesítmény)

- $$P = \frac{1}{T} \int_0^t p(t)\, dt$$

- Ha $p(t)$-t integráljuk, akkor csak az állandó tagok adnak nullától különböző értéket ($k = n$)
- Felhasználva $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ összefüggést:

$$\boxed{P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} U_k I_k \cos\varphi_k}$$

- Vagyis a hatásos teljesítmény az azonos frekvenciájú összetevők hatásos teljesítmények az összege

(29.) Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája az állapotváltozós leírás ismeretében? Illusztrálja egyszerű példán!

I. Folytonos időben:

- Az állapotváltozós leírás normálalakja: $\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u$

$$y = \underline{C}^T\underline{x} + Du$$

- Az átviteli karakterisztika: $H(j\omega) = \dfrac{\text{a válasz spektruma}}{\text{a gerjesztés spektruma}}$

- Az átviteli karakterisztika meghatározásához Fourier transzformálni kell az állapotváltozós leírást.

$$\mathcal{F}\{\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u\} = j\omega\underline{X}(j\omega) = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(j\omega) + \underline{B}U(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\{y = \underline{C}^T\underline{x} + Du\} \Rightarrow Y(j\omega) = \underline{C}^T\cdot\underline{X}(j\omega) + DU(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \underline{C}^T[j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\cdot\underline{B} + D$$

II. Diszkrét idejű eset:

- Az állapotváltozós leírás normál alakja: $\underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}u[k]$

$$y[k] = \underline{C}^T\underline{x}[k] + Du[k]$$

- Az állapotváltozós leírás Fourier transzformáltja:

$$\left.\begin{aligned} e^{j\vartheta}\cdot\underline{X}(e^{j\vartheta}) &= \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(e^{j\vartheta}) + \underline{B}U(e^{j\vartheta}) \\ Y(e^{j\vartheta}) &= \underline{C}^T\cdot\underline{X}(e^{j\vartheta}) + DU(e^{j\vartheta}) \end{aligned}\right\} \quad H(e^{j\vartheta}) = \underline{C}^T\cdot[e^{j\vartheta}\cdot\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\cdot\underline{B} + D$$

Példa: – állapotváltozós leírás: (harmadrendű rendszer)

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ x_3[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}24 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u[k]$$

$$y[k] = [-0{,}2 \quad -0{,}24 \quad 1{,}5]\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix} + u[k]$$

– a fenti képlet alapján:

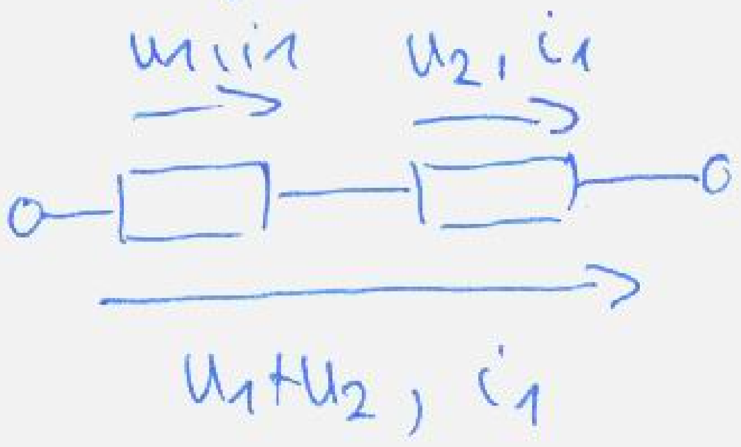
$$H(e^{j\vartheta}) = [-0{,}2 \quad -0{,}24 \quad 1{,}5]\begin{bmatrix} e^{j\vartheta} & -1 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta} & -1 \\ 0 & 0{,}24 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

K1 Ismertesse a Kirchoff típusú hálózatok számításának elemi módszereit (soros és párhuzamos kapcsolás eredője, csillag-delta átalakítás, helyettesítő generátorok módszere)! Mikor célszerű e módszerek valamelyikének a használata?

Kirchoff típusú hálózat: komponensek összekapcsolásából áll, minden komponenshez egy vagy több változót rendelünk. A változók közötti kapcsolatot a komponensek illetve azok összekapcsolása határozza meg. Kirchoff típusú hálózatnál a komponensek kétpólusok, a változók az áram és a feszültség.

1. Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása:

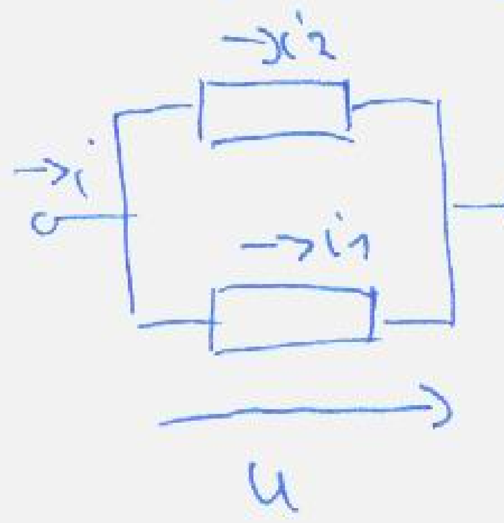
a) két kétpólus sorosan van kapcsolva, ha a kialakuló kétpólus árama megegyezik az egyes kétpólusok áramaival és a feszültsége megegyezik az egyes kétpólusok feszültségének összegével. Az eredő ellenállás: $\boxed{R_e = R_1 + R_2}$



Az egyes elemek feszültsége: (feszültségosztó képlet) egyszerűen felírható n db ellenállásra is.

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} U \qquad U_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} U$$

b) két kétpólus párhuzamosan van kapcsolva, ha a kialakuló kétpólus feszültsége megegyezik az egyes kétpólusok közös feszültségével és árama az egyes kétpólusok áramainak összegével.

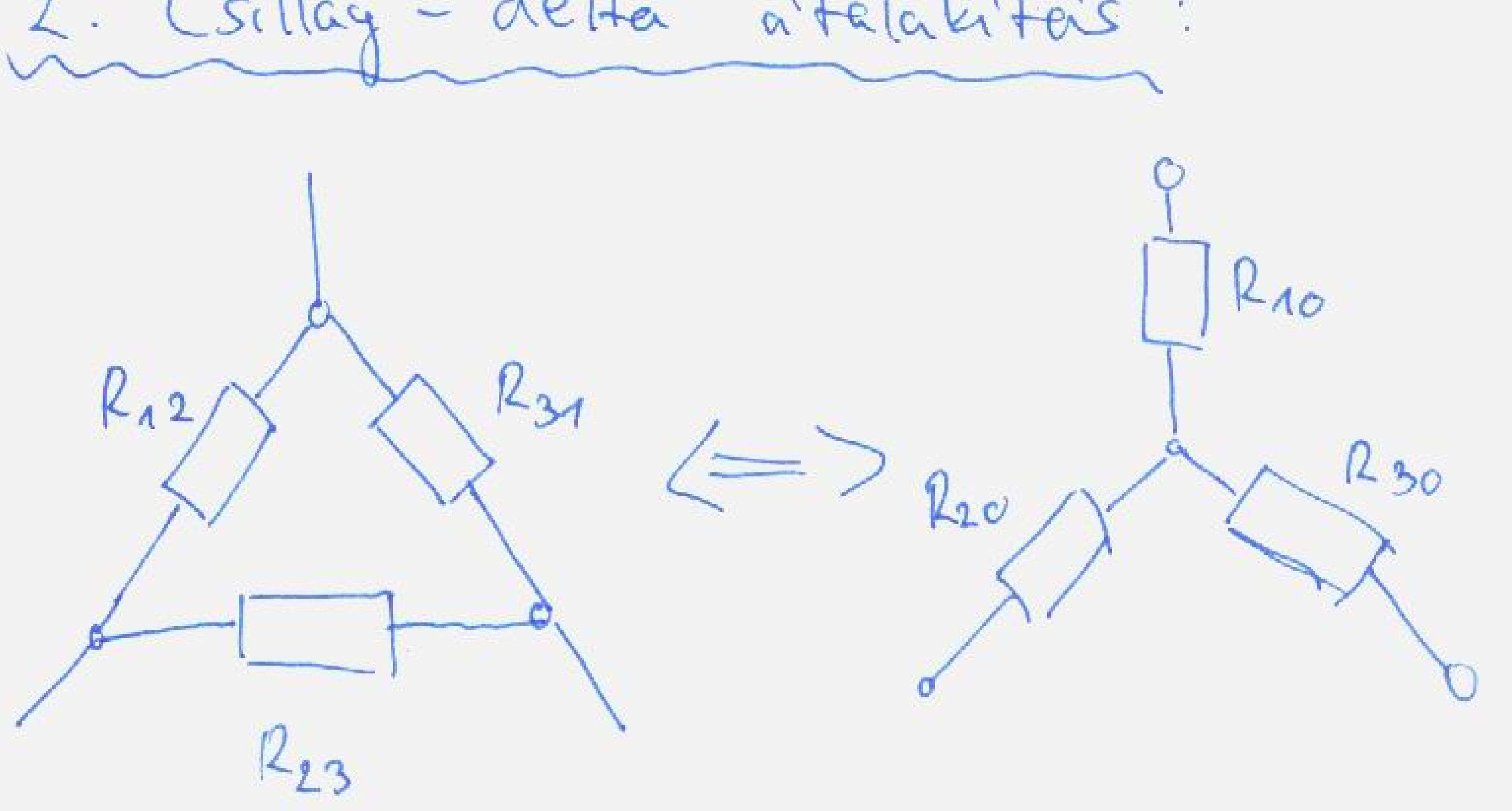


Az eredő ellenállás: $\boxed{\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \; ; \; R_e = R_1 \times R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}$

Az egyes ellenállások árama: $i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} i$, $i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i$

- ha csak egyetlen forrás van a rezisztív hálózatban, akkor a fenti módszerek alkalmazásával bármelyik áram és feszültség meghatározható a hálózatban.

2. Csillag - delta átalakítás:



$\Delta \to \lambda$: $R_{10} = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R\Delta}$

$$R_{20} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R\Delta}$$

$$R_{30} = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R\Delta}$$

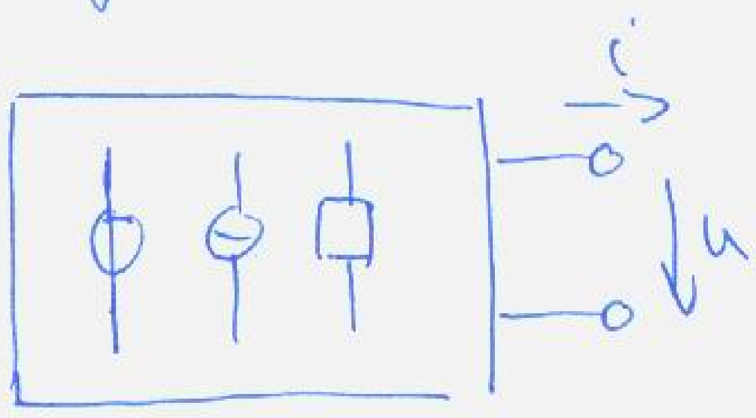
$$R\Delta = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$

$Y \to \Delta$: $R_{12} = \dfrac{R_{10} R_{20}}{R_Y}$; $R_{23} = \dfrac{R_{20} R_{30}}{R_Y}$; $R_{31} = \dfrac{R_{30} \cdot R_{10}}{R_Y}$; $\dfrac{1}{R_Y} = \dfrac{1}{R_{10}} + \dfrac{1}{R_{20}} + \dfrac{1}{R_{30}}$

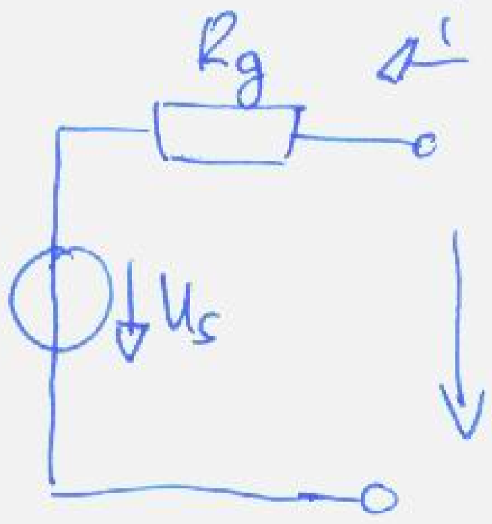
A két kapcsolás ekvivalensen egymásba alakítható, a hálózat többi része nem veszi észre az átalakítást.

3. Helyettesítő generátorok tétele:

- Egy hálózat gyakran felírható két kétpólus összekapcsolásával: az egyik kétpólus egy forrás és egy lineáris ellenállás összekapcsolása, a másik kétpólus tetszőleges (akár nemlineáris)

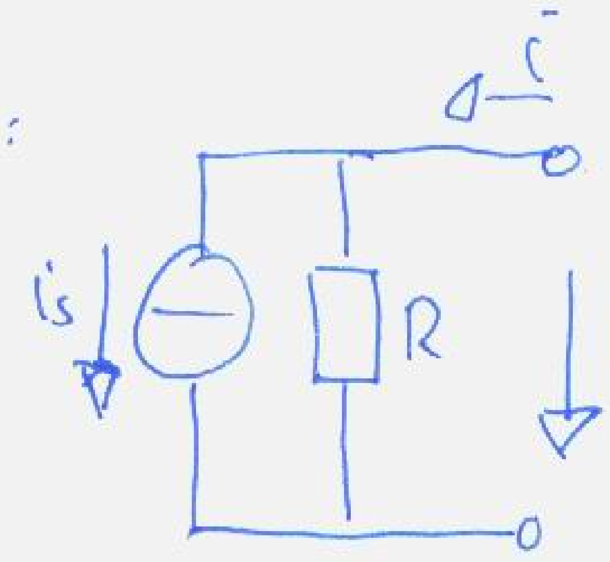


Thévenin helyettesítő kép:



$u = R_g i + U_s$

Norton helyettesítő kép:



$i = i_s + \dfrac{u}{R}$

- Gyakorlati jelentősége abból áll, hogy a hálózat többi részétől függetlenül a helyettesítés elvégezhető. A hálózatból a helyettesítő generátorok paraméterei meghatározhatóak, a szakadással lezárt kétpólus feszültségéből és a rövidzárral lezárt kétpólus áramából. A két generátor ekvivalensen egymásba alakítható.

$U_s = U_{szak}$

$i_s = i_{rz}$

$R_s = \dfrac{-u_{sz}}{i_{rz}}$

4. Teljesítményillesztés:

- $R_f = R_g \Rightarrow \boxed{P_{max} = \dfrac{U_s^2}{4R_g}}$

R5. Ismertesse a lineáris, invariáns, kauzális rendszer állapot változás leírásának megoldására szolgáló módszereket diszkrét és folytonos idejű esetekre!

I. Folytonos időben

1.) Összetevőkre bontással

- Egyszerű hálózatok és elemi függvényekkel leírható gerjesztés esetén használható kényelmesen.
- Az állapotegyenlet normálalakja : $\boxed{\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,u}$ ez egy lineáris állandó együtthatójú elsőrendű differenciálegyenlet rendszer.
- A válasz $y(t) = \underline{C}^T \underline{x}(t) + Du$
- Az állapotvektor $0 < t$ időpontokra előállítható $x(t) = x_f(t) + x_g(t)$ alakban, ahol $x_f(t)$ a szabadválasz és $x_g(t)$ a gerjesztett válasz.

~~szabadv~~

a) A szabad összetevő meghatározása

→ homogén differenciálegyenlet rendszer, a gerjesztetlen hálózat válasza:

$$\boxed{\underline{x}_f' = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}_f}$$

→ Elsőrendű hálózat esetén.

- A választ $x_f(t) = M \cdot e^{\lambda t}$ alakban keressük, ahol $M \neq 0$ tetszőleges konstans, λ pedig az ismeretlen.
- Az $M \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = A \cdot M e^{\lambda t}$ egyenletből következik, hogy $\lambda = A$. Szokásos még a
- $-\frac{1}{\lambda} = \tau$ időállandó használata is. $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ a sajátfüggvény.

→ Másodrendű hálózat esetén:

- A homogén differenciálegyenlet rendszer: $x_{1f}' = A_{11} \cdot x_{1f} + A_{12} \cdot x_{2f}$

$$x_{2f}' = A_{21} \cdot x_{1f} + A_{22} \cdot x_{2f}$$

- A megoldást $x_{1f} = M_1 \cdot e^{\lambda t}$ és $x_{2f} = M_2 \cdot e^{\lambda t}$ alakban keressük.
- Visszahelyettesítve az egyenletrendszerbe:

$$\lambda M_1 e^{\lambda t} = A_{11} M_1 e^{\lambda t} + A_{12} M_2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda M_2 e^{\lambda t} = A_{21} M_1 e^{\lambda t} + A_{22} M_2 e^{\lambda t}$$

- $e^{\lambda t}$-vel leosztva és az egyenleteket átrendezve: $(\lambda - A_{11})M_1 - A_{12}M_2 = 0$

$-A_{21} \cdot M_1 + (\lambda - A_{22})M_2 = 0$

- Mátrixos alakban: $\begin{bmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda - A_{22} \end{bmatrix}$

- Csak akkor létezik $M_1 = M_2 = 0$ -tól különböző megoldás, ha a fenti mátrix determinánsa $\emptyset$:

$$\begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda - A_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) = 0$$

~~azaz a karakterisztikus egyenlet.~~ karakterisztikus egyenlet

- A karakterisztikus egyenlet gyökei a hálózat sajátértékei: λ_1, λ_2
- saját függvények: $e^{\lambda_1 t}$ és $e^{\lambda_2 t}$
- Igazolható, hogy a két saját függvény szuperpozíciója a homogén differenciálegyenlet rendszer általános megoldása:

$$\left.\begin{aligned} x_{1f}(t) &= M_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + M_{12} \cdot e^{\lambda_2 t} \\ x_{2f}(t) &= M_{21} \cdot e^{\lambda_1 t} + M_{22} \cdot e^{\lambda_2 t} \end{aligned}\right\} \quad M_{21} = \frac{\lambda_1 - A_{11}}{A_{12}} \cdot M_{11} \quad M_{22} = \frac{\lambda_2 - A_{11}}{A_{12}} M_{12}$$

→ Tetszőleges rendszámú hálózatok

- Ugyanúgy kell eljárni, mint másodrendű esetben

$$\underline{x}_f'(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}_f(t) \rightarrow x_f(t) = m \cdot e^{\lambda t} \rightarrow \underline{m}\lambda e^{\lambda t} = \underline{\underline{A}} m \cdot e^{\lambda t} \qquad m \rightarrow \text{saját vektor}$$

↳ a megoldást $\underline{\underline{A}}\underline{m} = \lambda \underline{m}$ alakban keressük

- Visszahelyettesítve és átrendezve: $(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\underline{m} = 0$
- Akkor és csak akkor létezik megoldás, ha $\det(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = 0$. A karakterisztikus egyenlet gyökei a hálózat sajátértékei.
- Az általános megoldás: $\underline{x_f}(t) = \sum_{i=1}^{N} k_i \underline{m_i} \cdot e^{\lambda_i t}$

b) A gerjesztett összetevő meghatározása:

- A gerjesztett összetevő az inhomogén differenciálegyenlet rendszer egy partikuláris megoldása.
- A gerjesztett összetevőt a gerjesztéshez hasonló alakban keressük, ez a próbafüggvény módszer.
- A próbafüggvény ismeretlen együtthatóit az állapotegyenletbe helyettesítéssel kapjuk.

Gerjesztés	Próbafüggvény
konstans (C)	A
$C \cdot e^{pt}$	$A \cdot e^{pt}$
$C \cdot \cos(\Omega t) + D \cdot \sin(\Omega t)$	$A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t)$

- A kezdeti értékeket úgy kell figyelembe venni, hogy $\underline{x}_g(+0) + \underline{x}_f(+0) = \underline{x}(+0)$ teljesüljön.
- Véges időkre korlátos gerjesztés esetén az állapotváltozók ($\underline{x}$) folytonosak:

$$\underline{x}(+0) = \underline{x}(-0)$$

II. Diszkrét időben

- Az állapotváltozós leírás normálalakja: $\underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}\,u[k]$

$$y[k] = \underline{C}^T\underline{x} + Du$$

1.) Megoldás lépésről lépésre módszerrel:

- A megoldáshoz ismerni kell az $x_1[0], x_2[0] \dots x_n[0]$ értékeket
- Ezután $k = 1, 2 \dots n$ ütemértékeket behelyettesítve az állapotváltozók értékei kiszámíthatók:

$$\underline{x}[1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[0] + \underline{B}\,u[0] \qquad y[0] = \underline{C}^T\underline{x}[0] + Du[0]$$

$$\underline{x}[2] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[1] + \underline{B}\,u[1] \qquad y[1] = \underline{C}^T\underline{x}[1] + Du[1]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

- Ezzel a módszerrel tetszőleges $y[k]$ kiszámítható.

2.) Megoldás összetevőkre bontással: $y[k] = y_s[k] + y_g[k]$

a) Szabadválasz meghatározása:

- Homogén differenciálegyenlet-rendszer: $\underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k]$
- A megoldást $\underline{x}_s = \underline{M} \cdot \lambda^k$ alakban keressük.
- Visszahelyettesítve az egyenletrendszerbe: $\lambda^{k+1} \cdot \underline{M} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{M} \cdot \lambda^k \Rightarrow (\lambda \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{M} \cdot \lambda^k = \emptyset$
  - $\hookrightarrow$ ahol λ_i-k az $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei
- $\det(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = \emptyset$
- a szabadválasz általános alakja: $\underline{x}_s = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i \cdot \lambda_i^k$ $\begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} = C_1 \cdot \underline{S}_1 \cdot \lambda_1^k + C_2 \cdot \underline{S}_2 \cdot \lambda_2^k$

b) A gerjesztett válasz meghatározása

- Próbafüggvények:

Gerjesztés	Próbafüggvény
C = konstans	C
a^k	$C \cdot a^k$
$\cos(\omega k)$	$A \cdot \cos(\omega k) + B \cdot \sin(\omega k)$

- A próbafüggvények együtthatói az egyenletrendszerbe visszahelyettesítéssel határozhatók meg.

- Az $\underline{M}$ együtthatók a kezdeti feltételek érvényesítésével határozhatók meg.

Egyéb módszerek

- Fourier transzformációval az állapotváltozós leírásból, így lineáris egyenleteket kapunk
- Laplace transzformációval:
  - Normál alak: folytonos

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= \underline{\underline{A}}\,x + \underline{B}\,u \\ y &= \underline{c}^T \underline{x} + D u \end{aligned}\right\}\ \text{1 gerjesztés, 1 válasz}$$

  - Létezik $H(s)$, mert az állapotváltozós leírás feltétele a rendszer kauzalitása.
  - $\mathcal{L}\{\ \}$ belépő gerjesztés → belépő válasz esetén

$$s\,X(s) = A \cdot \underline{X}(s) + \underline{B} \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \underline{c}^T \underline{X}(s) + D\,U(s)$$

$$(s \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\,\underline{X}(s) = \underline{B}\,U(s) \Rightarrow \underline{X}(s) = (s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{B}\,U(s)$$

$$\boxed{Y(s) = \underline{c}^T \left((s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{B}\,U(s) \right) + D\,U(s)} \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

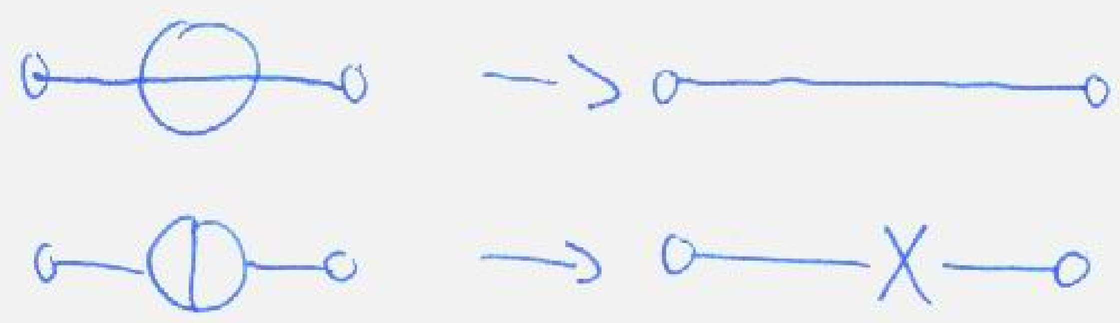
K2 Ismertesse a szuperpozíció elvének alkalmazását lineáris, Kirchoff típusú hálózatra! Milyen feltételek mellett érvényes ez az elv nemlineáris hálózatra vagy a teljesítmény számítására?

1. A szuperpozíció elve:

- A lineáris rezisztív hálózatokra vonatkozó egyenletek lineáris voltának következménye a szuperpozíció elvének érvényessége.
- Definíció: Ha egy lineáris hálózat több forrást tartalmaz, akkor a hálózat bármelyik árama vagy feszültsége úgy számolható, hogy meghatározzuk az egyes források által létrehozott áramot, vagy feszültséget és ezeket előjelesen összeadjuk vagyis szuperponáljuk:

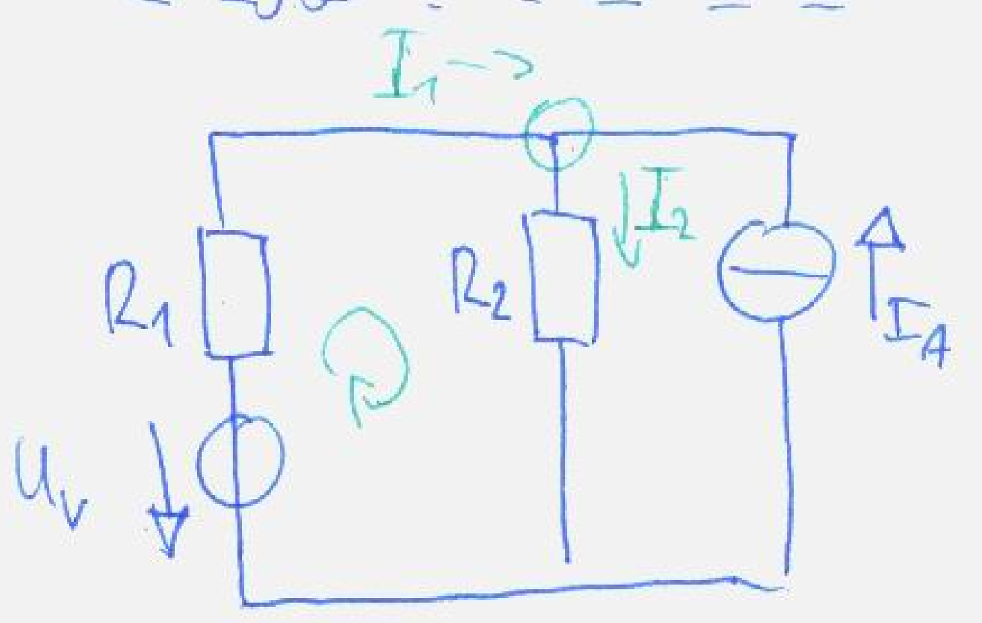
$$i_k = \sum_{i=1}^{s} i_s^{(k)}, \quad u_k = \sum_{j=1}^{s} u_j^{(k)}$$ ahol s a források száma

- Az egyes források hatását külön-külön vizsgáljuk, addig a többit dezaktiváljuk:



- Cél: a számolást visszavezetni 1 forrást tartalmazó hálózatok számolására
- Gyakorlatban főleg 2 forrásra érdemes, e fölött csak elvi jelentősége van.

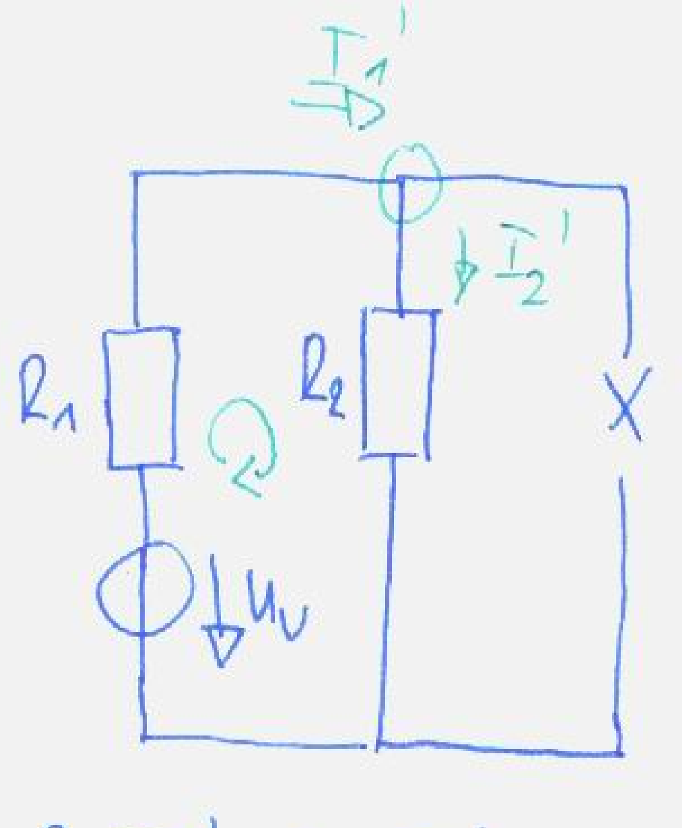
2. Egyszerű példa:



Kirchoff-egyenlet:

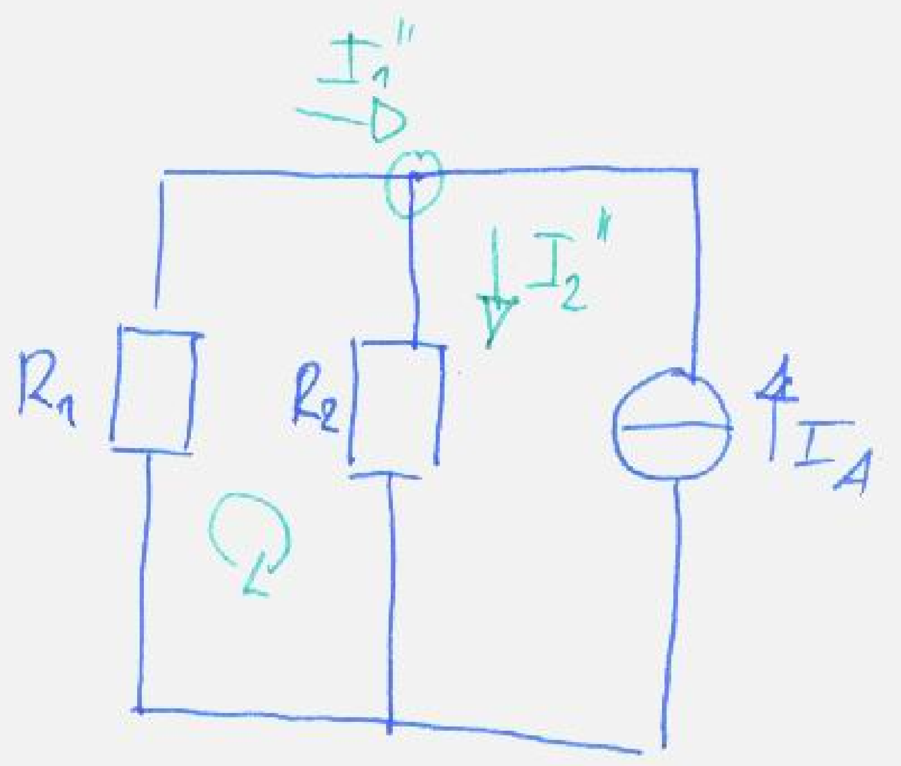
$R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_v$

$-I_1 + I_2 = I_A$



$R_1 I_1' + R_2 I_2' = U_v$

$-I_1' + I_2' = \emptyset$



$R_1 I_1'' + R_2 I_2'' = 0$

$-I_1'' + I_2'' = I_A$

Összeadva: $R_1 I_1' + R_1 I_1'' + R_2 I_1' + R_2 I_2'' = U_v \Rightarrow R_1(\overbrace{I_1' + I_1''}^{I_1}) + R_2(\overbrace{I_2' + I_2''}^{I_2}) = U$

$-(I_1' + I_1'') + I_2' + I_2'' = I_A$

$\boxed{I_1 = I_1' + I_2'' \; ; \; I_2 = I_2' + I_2''}$

③ lépés: linearizált hálózat számítása:

- forrásmennyiségek helyettesítése: $\tilde{u}_{s,k}(t)$ és $\tilde{i}_{s,k}(t)$ változó összetevőjükkel
- nemlineáris komponensek hely.: linearizált megfelelőjükkel
- lineáris komponensek változatlanul szerepelnek a hálózatban

- Cél: az így előállt linearizált hálózatban az eredetileg nemlineáris komponensek feszültségének és áramainak ($\tilde{u}_k$, $\tilde{i}_k$) változó összetevőjének a meghatározása. Valamint a válasz változó összetevőjének meghatározása.

- Módszer erre: előzőekben tanult bármely módszer

④. lépés: válaszok számítása

- a válaszok linearizált közelítései:

$$u_k(t) = \bar{u}_k + \tilde{u}_k(t)$$

$$i_k(t) = \bar{i}_k + \tilde{i}_k(t)$$

⑤. lépés: A közelítés elfogadhatóságának eldöntése:

- nemlineáris komponensek feszültségének és áramainak legnagyobb és legkisebb értékének vizsgálatával eldöntjük, hogy az így kapott eredmény elfogadható-e.

③ Munkapont stabilitása:

- Munkaponti linearizálás legfontosabb alkalmazása: munkaponti stabilitás eldöntése.

a) speciális eset: - ha csak 1 dinamikus komponens van: innen nézve R_{be} számítása

$$\left.\begin{aligned} &\hookrightarrow \tau = C_{di} \cdot R_{be} \\ &\tau = \frac{L_{di}}{R_{be}} \end{aligned}\right\} \text{ ha } \tau > 0 \rightarrow \text{stabilis } (R_{be} > \emptyset)$$

b) általánosan: - a rendszer valamely $\underline{x}$ állapotvektor által jellemzett pontját egyensúlyi pontnak nevezzük, ha az állapotvektor idő szerinti deriváltja $\emptyset$.

- az egyensúlyi pont akkor és csak akkor stabilis, ha az egyensúlyi pontban linearizált rendszer aszimptotikusan stabilis!

$\hookrightarrow \underline{A}$ rendszermátrix minden λ_i sajátértékének valós része negatív

- linearizált hálózat minden sajátértéke negatív vagy negatív valós részű. $\tau = -\frac{1}{\lambda}$