Előadó: Orosz László

1900. dec. után pl. kvantummechanika...
modern fizika
előtte klasszikus fizika

Követelmény:

- Órákon névsor!
- 2 ZH → 2 × 20 pont (vizsgába beszámít)
  ↳ 10 ponttól van aláírás (ZH-ként)
- Vizsga: 60 pont (írásbeli, szóbelivel lehet javítani)
- Jegy: Σ V + ZH1 + ZH2 ⇒ 100 pont

1. ZH 1-6. hét anyaga
2. ZH többi anyag

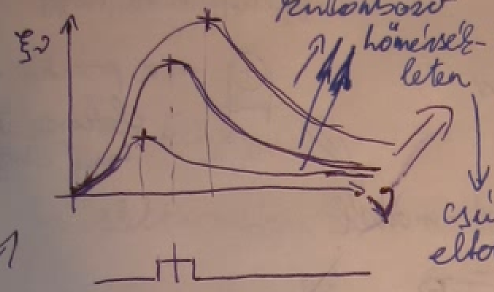
} lesznek fent ellenőrző kérdések a neten

Ability and motivation

1. Előadás

$\boxed{1900}$

Planck:



különböző hőmérsékleten

→ Rezeg benne az atom, és sugároz

$h \equiv$ Planck-állandó

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ Js$

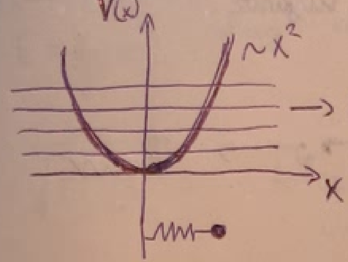
csúcs eltolódik $\Rightarrow$ mása színe az izzó vasnak különböző hőmérsékleten

Hőmérsékletmérés spektrum alapján

↓

sugárzási spektrum

Magyarázat: rezgőatom (mint egy kis antenna sugároz)



$\rightarrow E_n = n \cdot h \cdot \nu$

$\nu \equiv$ frekvencia

$V(x) \equiv$ potenciális energia

$x \equiv$ kitérés

$\Downarrow$

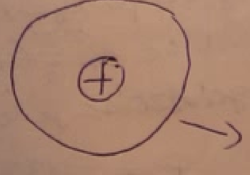
Energia szintek vannak, de köztes állapot nincs

$\Downarrow$

Energia kvantumok vannak

$n \in \mathbb{Z}$

H atom (hidrogén)

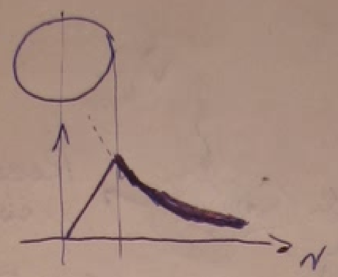


Elektron felfedezése → Thomson (189*)

Feltételezte, hogy az atomban valahol van e^-, amit kiszakított

Rutherford ↘

Rutherford (1907-10)



szórási kísérlet

⇓

Megállapította, hogy

⊕ ⇒ a pozitív töltés ekkora térfogatban összpontosul

10^{-15} m

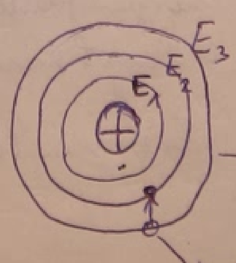
Bolygó-modell

F_c: Coulomb-erő

modell nem jó, mert van gyorsulás, s így az elektronnak be kellene esnie az atommagba, mégsem teszi

H atom csak bizonyos ν-kon sugároz

⟶ Bohr



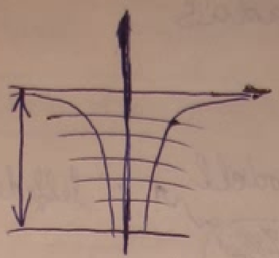
⟶ diszkrét szintek, amelyeken az elektron nem sugároz

⟶ ha egyik pályáról a másikra kerül az elektron, akkor sugárzási jelenség van

1, E_1, E_2, E_3 $\Longrightarrow$ $E_n = -\frac{13{,}6\ eV}{n^2}$

2, $h\cdot\nu_{nm} = E_n - E_m$

3, $L_n = n\cdot\hbar$; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$



Az energia szintek sűrűsödnek az n^2-es kifejezés miatt

Foton ↔ Einstein

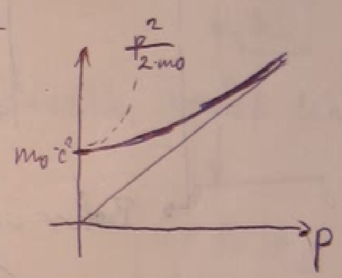
↳ elektromágneses hullám energiája ν frekvencián

$$E_f = h \cdot \nu$$

↳ Csak ennek egészszámú többszörösét veheti fel, vagy sugározhatja ki az atom

$$E = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + c^2 \cdot p^2}$$

tömeg impulzus



$$E = m \cdot c^2$$

↓

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Foton esetén az energia és az impulzus kapcsolata: $(m_0 = \emptyset)$

$$\begin{cases} E = c \cdot p \\ E = h \cdot \nu \end{cases}$$

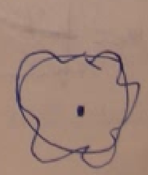
$$c \cdot p = h \cdot \nu$$

de Broglie $\Longrightarrow$ $\boxed{p = h \cdot \frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}}$

Elektromágneses hullám
- hullám tulajdonság: ν, λ (hullám tulajdonság)
- Foton tulajdonság: E, p (részecske tulajdonság)

⇓

A leíró modell kettős



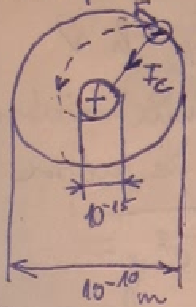
2009.
02.10.

2. Előadás

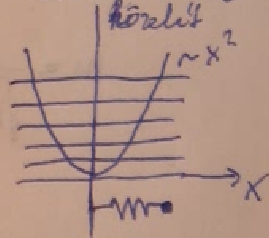
Előző nap áttekintése

H atom → Thomson-modell ↗ e^- felfedezése

Rutherford (1911)



Bohr-modell (1913) → Planck elméletéhez közelít

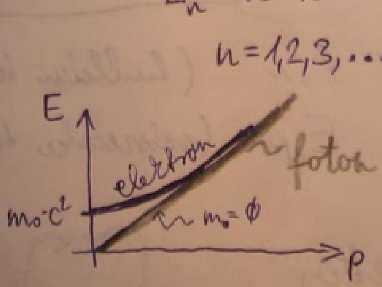


① $E_1, E_2, E_3, \dots$

② $h \cdot \nu_{nm} = E_n - E_m$

③ $L_n = n \cdot \hbar$ → perdület

$n = 1, 2, 3, \dots$



$$E = \sqrt{m_0 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}$$

$m_0 = 0 \Rightarrow E = c \cdot p \rightarrow E = h \cdot \nu$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow E = m \cdot c^2$$

$\Downarrow$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Elektromágneses kölcsönhatás

elektromágneses hullám

TERJEDÉS

interferencia

$\boxed{\lambda, \nu}$

foton

Mérés

ütközés
Compton effektus

$\boxed{E, p}$

$$E = h \cdot \nu \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\boxed{E = \hbar \cdot \omega \qquad p = \hbar \cdot k}$$

3D

Síkhullám egyenlete $\sin(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)$

$$\boxed{E = \hbar \cdot \omega \qquad \vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}}$$

~~kettős természet~~ csak a modellünk kettős

- ha terjed hullámmodellt használunk
- ha mérünk akkor foton modellt alkalmazunk

de Broglie

Ha foton így viselkedik, az elektron is így viselkedik

Részecskékre jellemző, hogy kettős modellel tudjuk leírni.

$$E = \hbar \cdot \omega \qquad \vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$$

Davisson-Germer kísérletei

elektronok interferencia képe hasonló lett, mint a röntgensugárzásé

SCHRÖDINGER hullámegyenlet

(1926)

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{\vec{E}}$$
$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{\vec{B}}$$

Elektromágneses hullámegyenletek

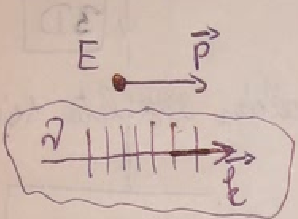
$rot \equiv \nabla \times$

$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \dot{\vec{E}}$

a Schrödinger által megalkotott hullámegyenletek is ennek analógiájára lettek megalkotva, a részecske hullámegyenletét adják meg

Schrödinger



$$\left.\begin{aligned} E &= \hbar \cdot \omega \\ \vec{p} &= \hbar \cdot \vec{k} \end{aligned}\right\}$$

$$\Psi(\vec{r},t) < \left.\begin{aligned} &\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ &\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \end{aligned}\right\} \boxed{e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}} \rightarrow \Psi_0 =$$

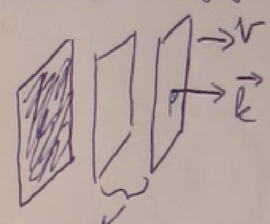
A Maxwell egyenleteknél adott volt a hullámegyenlet és annak volt a megoldása a síkhullám ~~[illegible]~~, itt adott a megoldás és az $E = \hbar\cdot\omega, \vec{p} = \hbar\cdot\vec{k}$ feltétel, ehhez adják meg a hullámegyenleteket

$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z$

$\vec{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$

$\vec{r} \equiv (x, y, z)$

Síkhullám analógiája



$\Psi(\vec{r},t) = áll.$

↓ speciális eset

$\Psi = A \cdot \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) =$

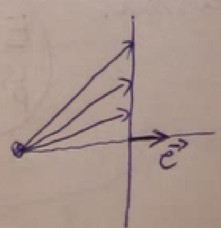
$= áll.$

$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = áll. + 2\pi \cdot n$

$\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{r} = áll. + \frac{2\pi}{k} \cdot n + \frac{\omega}{k} \cdot t$

λ

$\vec{e} \cdot \vec{r} = áll$



$$\Psi_0 = A_0 \cdot e^{j(k_x x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - \omega t)}$$

$E = \hbar \cdot \omega$

$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$

$E \longrightarrow \vec{p}$

(szabad)

$$E = \frac{p^2}{2 \cdot m} + V_0$$

(áll)

$$\hbar \cdot \omega = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m} + V_0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = -j\omega \Psi_0 \longrightarrow \omega = -\frac{1}{j}\frac{\dot{\Psi}_0}{\Psi_0} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} = -k_x^2 \cdot \Psi_0 \rightarrow k_x^2 = -\frac{1}{\Psi_0} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2}$$

$k_y^2 = \ldots$

$k_z^2 = \ldots$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 =$$

$$= -\frac{1}{\Psi_0}\Bigg[\underbrace{\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2}}_{\Delta \Psi_0}\Bigg] = -\frac{\Delta \Psi_0}{\Psi_0} \quad (3)$$

$\Delta \Psi_0$ Laplace operátor

$$-\frac{\hbar}{2 \cdot m} \cdot \Delta \Psi_0 + V_0 \cdot \Psi_0 = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}_0 \Leftarrow$$ (1), (2) és (3) egyenletből behelyettesítéssel kapjuk

általánosítás

$V_0 \rightarrow V(\vec{r}, t)$

$\Psi_0 \rightarrow \Psi(\vec{r}, t)$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\Delta\Psi + V(\vec{r},t)\cdot\Psi = -\frac{\hbar}{j}\,\dot{\Psi}}$$

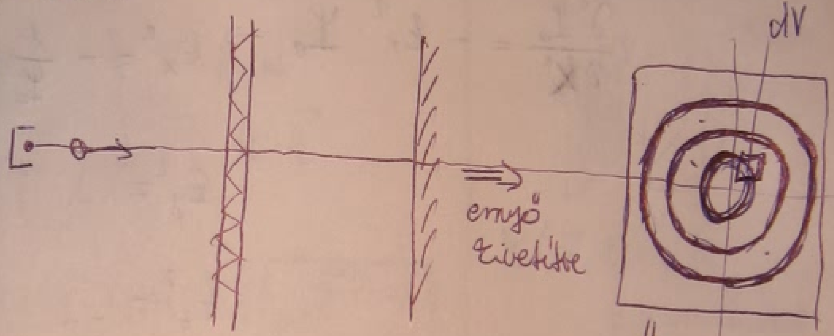
$$-\frac{e^2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{13{,}6\,eV}{n^2}} \quad n = 1,2,3,\dots$$

spektroszkóp

$\boxed{1926}$

Max Bohr



Ahol sok van ~~...~~
ott Ψ magas
ahol nem ott Ψ alacsony

Ψ valószínűségi előfordulás, sűrűségfüggvény

elektromágneses hullám esetén

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$$

$$\bar{E}^2 = |\bar{E}_1 + \bar{E}_2|^2 \rightarrow \Psi$$

$$|\Psi|^2\cdot dV$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2\, dV = 1$$

valószínűségi sűrűségfüggvényként értelmezzük

I
II
III
IV → $|\Psi|^2 dV$ (speciális esete) ⇒ ezt általánosítani kell még
V → Schrödinger egyenlet ⟹ $\boxed{\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}}$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\Delta\Psi + V(\vec{r},t)\cdot\Psi = -\frac{\hbar}{j}\cdot\dot{\Psi}}$$

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}$$

$\hat{H} \equiv$ egy operátor.

Időfüggő Schrödinger egyenlet

$\boxed{\text{Szeparálás}}$ →

$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})\cdot\Theta(t)$ (egyértelműség)

$V(\vec{r})$

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}$$

$$\Theta\cdot\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\Psi\cdot\dot{\Theta}$$

$\frac{1}{\Psi\cdot\Theta}$

csak $\vec{r}$-től függ ← $\frac{\hat{H}\Psi}{\Psi} = -\frac{\hbar}{j}\cdot\frac{\dot{\Theta}}{\Theta}$ → t-től függ

$$\boxed{-\frac{\hbar}{j}\cdot\dot{\Theta} = E\cdot\Theta} \rightarrow \Theta = \text{áll.}\cdot e^{-j\frac{E}{\hbar}\cdot t}$$

$$\boxed{\hat{H}\Psi = E\Psi}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})\cdot e^{-j\frac{E}{\hbar}\cdot t} \\ \hat{H}\underline{\Psi} = E\cdot\underline{\Psi}\end{gathered}}$$

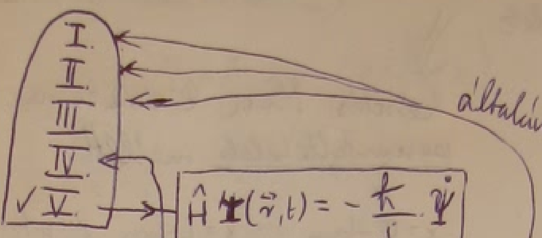
$\longrightarrow$ Időfüggetlen Schrödinger egyenlet

$\hat{H} \sim \frac{1}{r}$

$E = -\frac{13{,}6\ eV}{n^2}$

3. Előadás

2009. 02. 16.



$$\hat{H}\Psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{j}\cdot\dot{\Psi}$$

$V(\vec{r},t)$

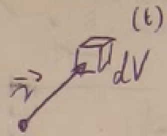
Schrödinger

$$\hat{H}\Psi = E\cdot\Psi$$

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})\cdot e^{-j\frac{E}{\hbar}\cdot t}$$

$$|\Psi|^2 dV$$

Max Bohr



$$\underbrace{\hat{H}}\Psi = E\cdot\Psi$$? ?

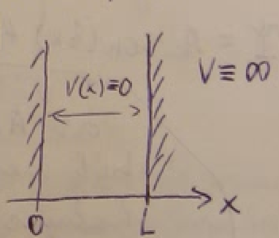
⟶ Megoldást keresünk

$$\equiv\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boxed{\Delta\Psi} + V(\vec{r})\cdot\Psi\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi$$

Hasonló példa B.Sc.-n

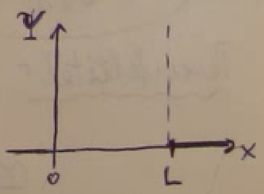
$\boxed{1D}$



$$\hat{H}\Psi = E\cdot\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\cdot\Psi = E\cdot\Psi$$

$V \to \infty \Rightarrow \Psi \equiv 0$



$0 \le x \le L$ $\quad V(x) \equiv 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' = E\cdot\Psi$$

$$\Psi'' = -\boxed{\frac{2\cdot m\cdot E}{\hbar^2}}\,\Psi \quad \to \equiv k^2$$

$$\begin{cases}\Psi = A\cdot\sin(k\cdot x) + B\cdot\cos(k\cdot x) \\ + \text{Peremfeltételek}\end{cases} \rightarrow k^2 = \frac{2\cdot m\cdot E}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\hbar^2\cdot k^2}{2\cdot m}}$$

$$\Psi'' = -k^2\cdot\Psi$$

⇓

Kérdés: Mi a k értéke az adott peremfeltételek mellett

⇓

$x = \emptyset$-ban és $x = L$-ben folytonosnak kell lennie Ψ függvénynek

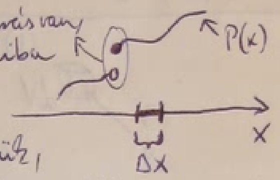
$$|\Psi|^2 \equiv P(x)$$

ugrás van

de ez hiba

⇓

mert véges a Δx, feltesszük,



⇒ Pl.: négyszögjel

ha végtelen kicsi felbontás ⇒ akkor kisimulna, folytonos lenne

$P(x) \rightarrow$ folytonos
- véges
- egyértékű ⇒ egy adott pillanatban nem lehet 2 különböző értéke

⇓

Ez legyen igaz $\boxed{\Psi(x)}$-re is

D. ↳ reguláris függvény
- egyértékű
- véges
- folytonos

} függvény

$$\Psi = A\cdot\sin(kx) + B\cdot\cancel{\cos}(k\cdot x) \rightarrow \text{matematikai megoldás}$$

⇓

az A, B és k meghatározásával a peremfeltételekből meghatározzuk a reguláris megoldások halmazát, amely a matematikai megoldások egy részhalmaza

Peremfeltétel: $\Psi(\emptyset) = \emptyset \rightarrow \boxed{B = \emptyset}$ (mert $\cos\emptyset = 1$)

$$\Psi(L) = 0 = A\cdot\sin(\underbrace{k\cdot L}_{n\cdot\pi}) + 0$$

$$\boxed{k = \frac{\pi}{L}\cdot n}$$

Fizikai megoldás
(reguláris megoldások halmaza)

$$\Psi = A \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right)$$

$$\hat{H}\Psi = E \cdot \Psi$$

$$\hat{H}(c \cdot \Psi) = E \cdot (c \cdot \Psi)$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1}_{\text{Bohr értelmezés}}$$

$\Downarrow$ meghatározza c értékét

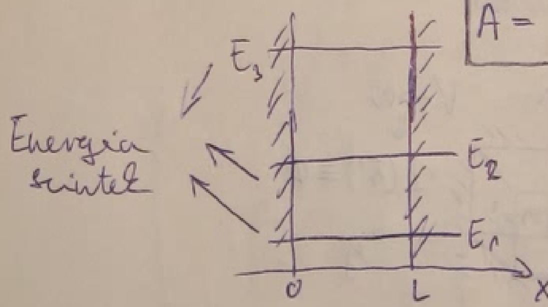
$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m \cdot L^2} \cdot n^2}$$

$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$\int_0^L A^2 \cdot \sin^2\left(n \frac{\pi}{L} \cdot x\right) \cdot dx = 1$$

$$\Downarrow$$

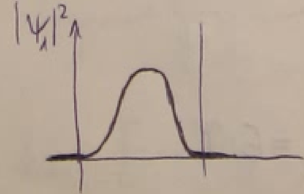
$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}}$$



$$\Rightarrow E_n = \boxed{\frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m \cdot L^2}} \cdot n^2$$

$\Downarrow$

$\equiv E_0$



$\boxed{E_{kin}}$ $\Rightarrow$ A részecskét minél kisebb térbe szorítom be, annál nagyobb az ő kinetikus energiája

$\hat{H}\Psi = E\cdot\Psi$ $\boxed{3D}$

Matematikai megoldás $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Regularitás feltétele}}$

$\downarrow$

$|\Psi(\vec{r})|^2 \equiv P(\vec{r})$

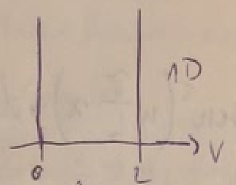
Az axióma szintjén megjelenik a valószínűség fogalma,
eddig a klasszikus fizika axiómái kauzálisak voltak

Nem tudunk semmit sem megállapítani, csak a valószínűségét jósoljuk meg

Az axiómáink mérésekkel igazolhatóak

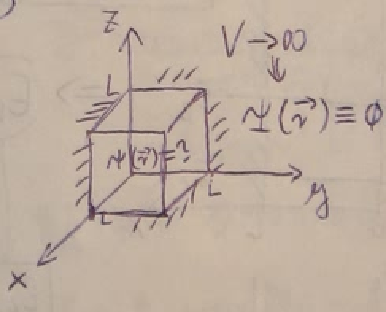
$\Downarrow$

tényekkel alátámasztott



$\Downarrow$ általánosítás

3D



$\hat{H}\Psi = E\cdot\Psi$

$$-\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\Delta\Psi + 0 = E\Psi$$

$\Psi(\vec{r})\equiv 0 \quad \vec{r}\in L^3$

$$\Delta\Psi = -\underbrace{\boxed{\frac{2\cdot m\cdot E}{\hbar^2}}}_{\equiv k^2}\cdot\Psi \Rightarrow \boxed{E = \frac{\hbar^2\cdot k^2}{2\cdot m}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\Psi = -k^2\cdot\Psi$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = -k^2\cdot\Psi \leftarrow \Psi(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$$

$$X''\cdot Y\cdot Z + X\cdot Y''\cdot Z + X\cdot Y\cdot Z'' = -k^2\cdot X\cdot Y\cdot Z$$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{-k_x^2}+\underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-k_y^2}+\underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-k_z^2} = -k^2$$

$$\Downarrow$$

$$X'' = -k_x^2\cdot X$$
$$Y'' = -k_y^2\cdot Y$$
$$Z'' = -k_z^2\cdot Z$$

$$\int_{L^3}|\Psi(\vec{r})|^2\,dV = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int_0^L X^2\,dx}_{1}\cdot\underbrace{\int_0^L Y^2\,dy}_{1}\cdot\underbrace{\int_0^L Z^2\,dz}_{1} = 1 \Rightarrow \boxed{1D}\ A = \sqrt{\frac{2}{L}} \Rightarrow \text{ista 3 rezultata}$$

$$\boxed{3D}\ A = \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\right)^3 = \sqrt{\frac{8}{L^3}}$$

$$k_x = \frac{\pi}{L}\cdot n_x \ ;\ k_y = \frac{\pi}{L}\cdot n_y \ ;\ k_z = \frac{\pi}{L}\cdot n_z$$

$$\Psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{L^3}}\,\sin\left(n_x\frac{\pi}{L}\right)\cdot\sin\left(n_y\frac{\pi}{L}\right)\cdot\sin\left(n_z\frac{\pi}{L}\right)$$

$$n_x, n_y, n_z = 1,2,3,\ldots$$

$$E = \underbrace{\frac{\hbar^2\cdot\pi^2}{2\cdot m\cdot L^2}}_{\equiv E_0}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)$$

	n_x	n_y	n_z	
Ψ_{111}	1	1	1	$E_1 = 3\cdot E_0$
Ψ_{211}	2	1	1	$6\cdot E_0$
Ψ_{121}	1	2	1	$6\cdot E_0$
Ψ_{112}	1	1	2	$6\cdot E_0$

degenerált állapot

$\left.\right\}\ E_2 = 6\cdot E_0 \Rightarrow$ pl.: 1D-ben

$\Downarrow$

a 2 energiája azonos, DE 2 különböző hullámfüggvényt

4. Előadás

$\boxed{\text{B.Sc.}}$ $\boxed{\text{M.Sc.}}$

a.,
b.,
c.,

általánosítás

I.
II.
III.
IV.
V.

általánosítás

$$\boxed{\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(\cancel{\vec{r},t})\cdot\Psi$$

$V(\vec{r})$ (csak az $\vec{r}$-től függ)

általánosítás

$$\boxed{|\Psi|^2 dV = |\Psi|^2 dV \quad \text{Bohr}}$$

$$\int_{\infty} |\Psi|^2 dV = 1$$

$P(\vec{r})$

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})\cdot e^{-j\frac{E}{\hbar}\cdot t}$$

$$\hat{H}\Psi = E\cdot\Psi$$

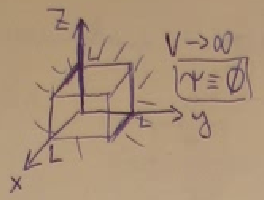
lehetséges energiák

- egyértékű
- folytonos
- véges

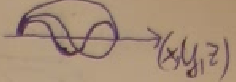
$\Psi(\vec{r}) \in \mathbb{C}$

matematikai megoldás

Fizikai megoldás



$$\left.\begin{matrix} X(x) \\ Y(y) \\ Z(z) \end{matrix}\right\} \odot \to \Psi$$



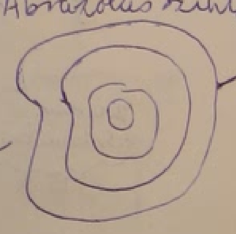
$$\boxed{\begin{aligned} \Psi &= \sqrt{\frac{8}{L^3}} \cdot \sin\left(n_x \frac{\pi}{L} \cdot x\right) \sin\left(n_y \cdot \frac{\pi}{L} \cdot y\right) \cdot \sin\left(n_z \cdot \frac{\pi}{L} \cdot z\right) \\ E &= \underbrace{\boxed{\frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m \cdot L^2}}}_{\equiv E_0} \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \qquad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}}$$

Ψ	n_x	n_y	n_z	
Ψ_{111}	1	1	1	$E_1 = 3 \cdot E_0$
Ψ_{211}	2	1	1	
Ψ_{121}	1	2	1	$E_2 = 6 \cdot E_0$
Ψ_{112}	1	1	2	
Ψ_{221}	2	2	1	
Ψ_{212}	2	1	2	$E_3 = 9 \cdot E_0$
Ψ_{122}	1	2	2	
Ψ_{311}	3	1	1	
Ψ_{131}	1	3	1	$E_4 = 11 \cdot E_0$
Ψ_{113}	1	1	3	
Ψ_{222}	2	2	2	$E_5 = 12 \cdot E_0$

$\Rightarrow$ szimmetria

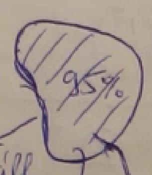
$$\Psi(\vec{r}) \in \mathbb{C} \to \underbrace{|\Psi|^2}_{P(\vec{r})} \in \mathbb{R}$$

Ábrázolás szintfelületekkel



$P(\vec{r}) = \text{áll}$

+ "előjel"

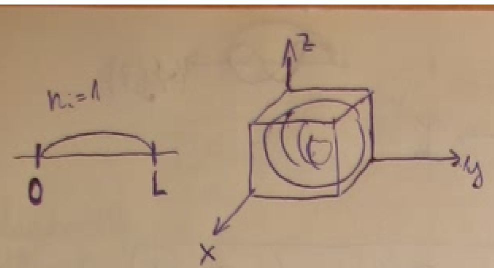


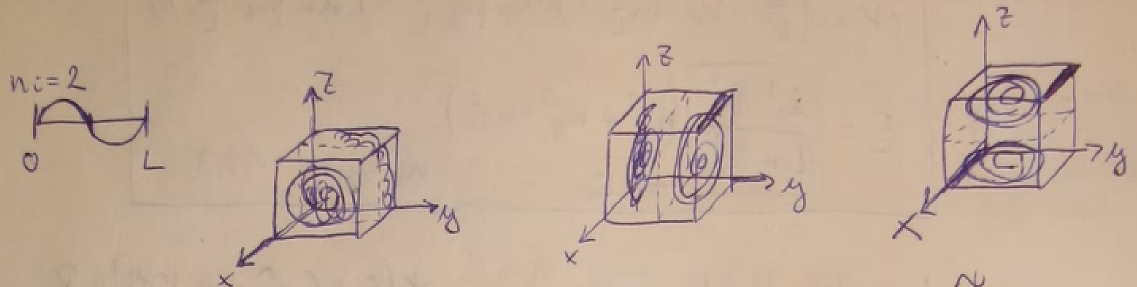
$P(\vec{r}) = \text{áll}$

$$F \Rightarrow \int_F P(\vec{r})\, dr = 95\%$$

A mi esetünkben (a potenciáldoboz esetében) $\Psi(\vec{r})$ valós függvény

 $\sim \Psi(\vec{r}) \in \mathbb{R}$



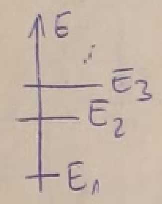


Ψ_{211} Ψ_{121} Ψ_{112}

$\hat{H}\,\Psi = E\cdot\Psi \rightarrow$ sajátérték ~~feladat~~ egyenlet

valós
mérhető

a részecske energia szintje ez lesz



$E_1, E_2, E_3, \dots$

általánosítás

$\Psi \rightarrow \boxed{\hat{F}\,\varphi_i = F_i\cdot\varphi_i}$ sajátérték egyenlet megoldása

$F_1, F_2, \dots$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots$

III

kvantum mechanika

dinamikai változók

$\boxed{\vec{r};\vec{p}}$ $\begin{cases} x, y, z \\ p_x, p_y, p_z \end{cases}$

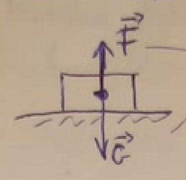
Newton II.

$\left.\begin{array}{c} \frac{p^2}{2m} \\ V(\vec{r}) \end{array}\right\}$ $H = \frac{p^2}{2\cdot m} + V$

L_x, L_y, L_z $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

A dinamikai változókhoz operátorokat fogunk rendelni

pl.:



Ez nem látható, csak reprezentatív segítség (matematikai modell felállításához)

$$\hat{F} = F(\underbrace{\hat x, \hat y, \hat z, \hat p_x, \hat p_y, \hat p_z})$$

F ezek függvénye, mert ezek szükségesek, hogy egy adott állapotot le tudjunk írni

speciálisan

$$\hat H = \frac{\hat p_x^2 + \hat p_y^2 + \hat p_z^2}{2 \cdot m} + V(\hat x, \hat y, \hat z)$$

$$\hat H = -\frac{\hbar^2}{2 \cdot m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z).$$

$$\hat p_x = \frac{\hbar}{j} \cdot \frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat p_y = \frac{\hbar}{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y}; \quad \hat p_z = \frac{\hbar}{j} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

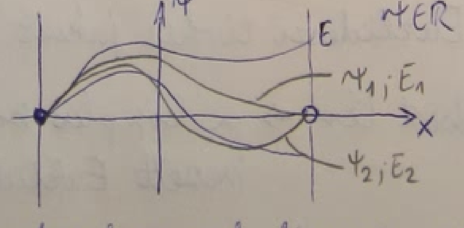
$$\begin{cases} \hat x = x \cdot \\ \hat y = y \cdot \\ \hat z = z \cdot \end{cases}$$

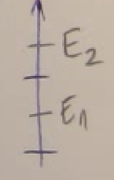
II. axióma

$\boxed{\text{B.Sc.}}$

$$\hat H \cdot \Psi = E \cdot \Psi \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2 \cdot m}\Psi'' + V(x) \cdot \Psi = E \cdot \Psi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1 \Leftarrow \lim_{x \to \pm\infty} \Psi = 0$$





Meg kell adni, hogy mely függvény állapothalmaz reprezentál fizikai állapotot.

$\boxed{\text{OPERÁTOR}}$ → függvényhez függvényt rendel

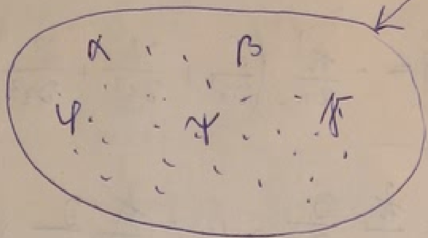
$\hat F \alpha = \beta$

lineáris operátor.

$$\hat A\,(a_1\cdot\alpha_1 + a_2\cdot\alpha_2) = a_1\hat A\alpha_1 + a_2\cdot\hat A\alpha_2$$

$\hat C = \hat A + \hat B$ $\quad \hat C\alpha = (\hat A + \hat B)\alpha = \hat A\alpha + \hat B\alpha$

$$\hat C\alpha = (\hat A\hat B)\alpha = \hat A(\hat B\alpha)$$



$$(\alpha,\beta) \equiv \langle\alpha|\beta\rangle \in \mathbb{C}$$

jelölés a skalár szorzatra

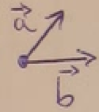
$$\langle\alpha|\beta\rangle = \int_\infty \alpha^*\cdot\beta\, dV$$

norma ⇐ $\langle\alpha|\alpha\rangle = \int_\infty \alpha^*\alpha\, dV = 1$

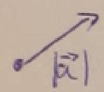
Euklideszi térhez jutunk

Hilbert tér ⇒ a komplex számtest felett értelmezett Euklideszi tér

Megjegyzés.



$\underbrace{\vec a\,\vec b}_{\text{skaláris szorzat}} \in \mathbb{R}$



$\sqrt{\vec a\cdot\vec a} \equiv |\vec a|$

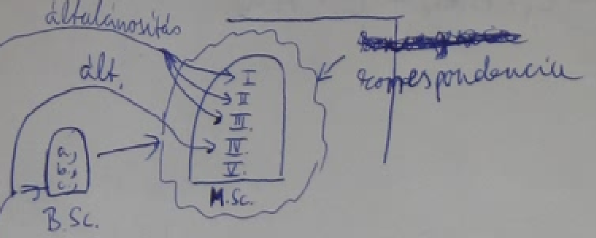
vektorhoz, vektorokhoz skalárt rendelek, mérhetővé teszem a távolságot

(I) Minden fizikai állapothoz hozzátudunk rendelni egy Hilbert tér-beli elemet

állapot $\rightarrow \Psi \in \mathcal{H}$

2009. 02.23.

5. Előadás



$\boxed{\text{Induktív módszer}}$ ⇒ egyedi ~~...~~ eseteket vizsgálunk, ezekből vonunk le általános következtetéseket ⇒ posztulátum

⇓

Amíg nincs ellentmondó esemény, addig ezeket az axiómákat érvényesnek tekintjük, nem kérdőjelezzük meg igazukat

$$\boxed{\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\hat{H}\Psi = E\cdot\Psi}$$

lehetséges energia szintek

$$|\Psi|^2 \Rightarrow \int_\infty |\Psi|^2 dV = 1$$

Hilbert-tér ≡ komplex számok felett értelmezett Euklidészi-tér

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \int_\infty \alpha^*(\vec{r})\cdot\beta(\vec{r})\,dV \in \mathbb{C}$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \int_\infty \alpha^*(\vec{r})\cdot\alpha(\vec{r})\,dV = \int_\infty |\alpha|^2 dV = 1 \in \mathbb{R}$$

Operátorok bevezetése.

$$\hat{A},\hat{B} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B} \;;\; \hat{A}\hat{B}$$

mérhető

$$\hat{F} \equiv F(\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z) \longrightarrow \hat{F}\varphi = \hat{F}\cdot\varphi$$

Lineáris operátor.

$$\hat{A}(c_1\cdot\alpha_1 + c_2\cdot\alpha_2) = c_1\cdot\hat{A}\alpha_1 + c_2\cdot\hat{A}\alpha_2$$

Adjungált operátor.

hozzárendelést jelent

$$\hat{A} \longrightarrow \hat{A}^+$$

$$\boxed{\langle\gamma|\hat{A}\beta\rangle = \langle\hat{A}^+\gamma|\beta\rangle}$$

$$\int_{\infty}(\hat{A}^+\gamma)^*\cdot\beta\, dV = \int_{\infty}\gamma^*\cdot\hat{A}\beta\, dV$$

speciális esete

Önadjungált operátor: → tételeket tudunk kimondani (T1-T3)

$$\hat{A} = \hat{A}^+$$

$$\boxed{\langle\hat{A}\gamma|\beta\rangle = \langle\gamma|\hat{A}\beta\rangle \equiv \langle\gamma|\hat{A}|\beta\rangle}$$

jelölés

T1. Önadjungált operátor sajátértéke valós

T2. Önadjungált op. sajátfüggvényei ortogonálisak egymásra

T3. Felcserélési törvényei → és következményei $\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}] = \varphi$

Az önadjungált operátort leíró mátrix szimmetrikus mátrix.

B1. $\hat{A} = \hat{A}^+$

$\alpha_i^* |$ $\hat{A}\alpha_i = A_i \cdot \alpha_i$ $\quad i = 1, 2, 3, \ldots$ / α_i balról skalár szorzat

$(\hat{A}\alpha_i)^* = A_i^* \cdot \alpha_i^* \quad | \alpha_i$ / α_i jobbról skalár szorzat

$$\left.\begin{aligned} \langle \alpha_i | \hat{A} \alpha_i \rangle &= A_i \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle \\ \langle \hat{A} \alpha_i | \alpha_i \rangle &= A_i^* \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle \end{aligned}\right\} \quad A_i = A_i^* \Rightarrow A_i \text{ csak valós lehet}$$

mert $\hat{A}$ önadjungált

B2. $\hat{A} = \hat{A}^+$

$\alpha_j^* |$ $\hat{A}\alpha_i = A_i \cdot \alpha_i$

$\hat{A}\alpha_j^* = A_j^* \cdot \alpha_j^* \quad | \cdot \alpha_i$

$$\left.\begin{aligned} \langle \alpha_j | \hat{A} \alpha_i \rangle &= A_i \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle \\ \langle \hat{A} \alpha_j | \alpha_i \rangle &= A_j^* \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle \end{aligned}\right\}$$

mert önadjungált $\hat{A}$

A_j az 1. tétel alapján

A két egyenlet különbsége

$$\underbrace{\langle \alpha_j | \alpha_i \rangle}_{=0} \underbrace{(A_i - A_j)}_{\neq 0} = \emptyset$$

$\Downarrow$

α_j és α_i egymásra ortogonálisak

D. „Kommutátor"

$$\boxed{\underbrace{(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})}_{[\hat{A}, \hat{B}]}} \Psi = \emptyset$$

T3. Ha 2 operátor kommutátora $\emptyset$, akkor ugyanazok a sajátfüggvény rendszerük.

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \emptyset$$

B3. $\hat{B} |$ $\hat{A}\alpha_i = A_i \cdot \alpha_i$

$\hat{A} |$ $\hat{B}\beta_j = B_i \cdot \beta_j$

$(\hat{B}\hat{A})\alpha_i = A_i \cdot \hat{B}\alpha_i$

$(\hat{A}\hat{B})\alpha_j = B_j \cdot \hat{A}\alpha_j$

Mivel $\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = \emptyset \Rightarrow$ $\hat{A}\hat{B}$ írható $\hat{B}\hat{A}$ helyére

$(\hat{A}\hat{B})\alpha_i = A_i \hat{B}\alpha_i$

$\hat{A}(\underbrace{\hat{B}\alpha_i}_{c\cdot\alpha_i}) = A_i(\underbrace{\hat{B}\alpha_i}_{c\cdot\alpha_i}) \Rightarrow$ ez $\hat{A}$-nak egy sajátérték egyenlete

$\Downarrow$

$\hat{B}\alpha_i = c\cdot\alpha_i \Rightarrow$ $\hat{B}$-nek sajátérték egyenlete

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\sim\beta_j$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\} \equiv \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots\}$

$\Uparrow$

„azonos" sajátfüggvény rendszer

Példa:

$\hat{x} = x\cdot$

$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{j}\cdot\frac{\partial}{\partial x}$

állapot $\to \Psi \in \mathcal{H}$ — I.

dim.m $\hat{F}$ — II.

mérhető: $\hat{F}\Psi = F\cdot\Psi$ — III.

$|\Psi|^2$ — IV.

$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}$ — V.

ez még nincs kész

$\langle\alpha|\hat{x}\beta\rangle = \langle\hat{x}\alpha|\beta\rangle$

$$\int_\infty \alpha^* x\cdot\beta\, dx = \int_\infty \underbrace{x\cdot\alpha^*}_{\underbrace{(x\cdot\alpha)^*}_{(\hat{x}\alpha)^*}}\cdot\beta\, dx = \langle\hat{x}\alpha|\beta\rangle$$

$\langle \alpha | \hat{p}_x \beta \rangle = \langle \hat{p}_x \alpha | \beta \rangle$

$$\int_{\infty} \alpha^* \frac{\hbar}{j} \beta' \cdot dx = \int_{\infty} \frac{\hbar}{j} \underbrace{\alpha^* \cdot \beta'}_{u \cdot v'} dx = \underbrace{\frac{\hbar}{j} \left[\alpha^* \cdot \beta\right]_{-\infty}^{+\infty}} - \underbrace{\int_{\infty} \frac{\hbar}{j} \frac{d}{dx} \alpha^* \cdot \beta dx} = ⊛$$

$u' = \frac{d}{dx} \alpha^*$

$v = \beta$

$$+ \int_{\infty} \underbrace{\left(\frac{\hbar}{j} \frac{d}{dx} \alpha\right)^*}_{(\hat{p}_x \alpha)^*} \cdot \beta \cdot dx =$$

$$= \langle \hat{p}_x \alpha | \beta \rangle$$

$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$

$\downarrow$

$$\int_{\infty} |\alpha|^2 dV = 1 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \alpha = \emptyset$$

$\Downarrow$

$$\frac{\hbar}{j} \left[\alpha^* \cdot \beta\right]_{-\infty}^{+\infty} = \emptyset$$

$⊛ = \langle \hat{p}_x \alpha | \beta \rangle$ ✓

Példa 2.

$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$

$[\hat{A}, \hat{B}]^+ = \hat{C}^+ = ?$

$[\hat{A}, \hat{B}] \varphi = \hat{C} \varphi$

$[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] \varphi = \hat{A}\hat{B}\varphi - \hat{B}\hat{A}\varphi$

$$[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}]^+ \varphi = ? \longrightarrow \int_{\infty} \varphi^* [\hat{A}, \hat{B}] \varphi dV \equiv \int_{\infty} (\underbrace{[\hat{A}, \hat{B}]^+}_{?} \varphi)^* \varphi \cdot dV$$

$$\int_{\infty} \varphi^* [\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] \varphi dV = \underbrace{\langle \varphi | \hat{A}\hat{B}\varphi \rangle}_{\langle \hat{A}^+\varphi | \hat{B}\varphi \rangle} - \underbrace{\langle \varphi | \hat{B}\hat{A}\varphi \rangle}_{\langle \hat{B}^+\varphi | \hat{A}\varphi \rangle}$$

$\langle \hat{A}^+\varphi | \hat{B}\varphi \rangle \Downarrow \langle \hat{B}^+\hat{A}^+\varphi | \varphi \rangle$ $\qquad$ $\langle \hat{B}^+\varphi | \hat{A}\varphi \rangle \Downarrow \langle \hat{A}\hat{B}\varphi | \varphi \rangle$ $\Longrightarrow$

$$\langle \hat{B}^+ \hat{A}^+ \psi | \psi \rangle - \langle \hat{A}^+ \hat{B}^+ \psi | \psi \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle [\hat{B}^+ \hat{A}^+ - \hat{A}^+ \hat{B}^+] \psi | \psi \rangle \equiv [\hat{B}^+, \hat{A}^+] \psi$$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]^+ = [\hat{B}^+, \hat{A}^+]$$

speckó eset

$$\hat{A}^+ = \hat{A}$$
$$\hat{B}^+ = \hat{B}$$

3. példa:

$$\hat{X} = x \cdot$$
$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{j} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\underbrace{[\hat{p}_x, \hat{X}]}_{(\hat{p}_x \hat{X})\psi - (\hat{X}\hat{p}_x)\psi} \psi = \frac{\hbar}{j} \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \psi) - x \cdot \frac{\hbar}{j} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\hbar}{j} \Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x \psi)}_{\psi + \cancel{x\psi'}} - \cancel{x\psi'} \Big] =$$

$$= \frac{\hbar}{j} \cdot \psi$$

$$\boxed{[\hat{p}_x, \hat{X}] = \frac{\hbar}{j} \cdot} \longrightarrow [\hat{p}_x, \hat{X}]^+ = -\frac{\hbar}{j}$$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{p}_y, \hat{y}] = \frac{\hbar}{j} \longrightarrow \text{kanonikus párok}$$

$$[\hat{X}, \hat{y}] = 0$$
$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$$
$$[\hat{X}, \hat{p}_y] = 0$$
$$[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$$

stb.

$$[\hat{A},\hat{B}]=\emptyset \longrightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{A}\,\Psi_i = A_i\cdot\Psi_i\\ \hat{B}\,\Psi_j = B_i\cdot\Psi_j\end{array}\right\}\ \{\Psi_1,\Psi_2,\dots,\Psi_i,\dots,\Psi_j,\dots\}$$

① $\cancel{\hat{A}(x)}$

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{j}\frac{\partial}{\partial x} \equiv \hat{p}(x) \qquad \hat{x} = x\cdot \equiv \hat{x}(x)$$

$$\hat{p}_y = \frac{\hbar}{j}\frac{\partial}{\partial y} \equiv \hat{p}(y)$$

$$\boxed{[\hat{p},\hat{x}] = \frac{\hbar}{j}} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l}\hat{p}_x = \frac{\hbar}{j}\frac{\partial}{\partial x}\\ \hat{x} = x\cdot\end{array}}$$

Csak ez valósítja meg a $[\hat{p},\hat{x}] = \frac{\hbar}{j}$ -t?

$$\uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{p}_x = p_x\cdot\\ \hat{x} = -\frac{\hbar}{j}\frac{\partial}{\partial p_x}\end{array}}\ \begin{array}{l}\longrightarrow \hat{p}_x(p_x)\\ \longrightarrow \hat{x}(p_x)\end{array}\Bigg\}$$

Ilyen fajta operátor kiosztás is lehetséges a kvantummechanikában

A mérés és a tapasztalat fogja eldönteni, hogy melyik operátori kiosztás jobb, ami megvalósítja

$[\hat{p},\hat{x}] = \frac{\hbar}{j}$ kifejezést

$$\Downarrow$$

Kvantummechanikai méréselmélet

2009.
02.2?.

6. Előadás

I. → állapot → $\varphi \in \mathcal{H}$

II. → dinamikai mennyiséghez operátorokat ($\hat{F}$) rendelünk

III. → $\hat{F}\,\varphi_i = F_i \cdot \varphi_i$ → mérhető értékek

IV. → $|\varphi_i|^2 dV$ → ezt még általánosítani kell

V. → $\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{i}\dot{\Psi}$

! először jelenik meg a valószínűség fogalma axióma szinten

REJTETT PARAMÉTEREK

⇓

Valószínűség magyarázata: azért nem tudom, hogy mi lesz adott idő múlva, mert van egy paraméter amelyet még nem ismerünk

→ "EPR" paradoxon

J. S. BELL (1965.)

⇓

Kísérlet 2 esetre

↙ kvantummechanika ✓

↘ ~~rejtett paraméteres modell~~

⇓

~~ez nem működött~~

Nincsenek rejtett paraméterek !!!

⇓

kvantuminformatika
kvantumszámítógépek

(Imre Sándor kvantuminformatika tárgy hallgatását ajánlja)

A kvantummechanikai méréselmélet alapjai

$\varphi \in \mathcal{H} <$ $\mathcal{L}_2$, $\varphi(\vec{r})$; l_2 → együtthatók

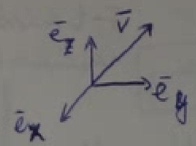
Segítség:
$\langle \alpha | \beta \rangle = \int_\infty \alpha^* \cdot \beta \, dV$

$B: \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\} \quad (N = 2, 3, 4, 5, \dots \infty) \to \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$

$\varphi = \sum_i a_i \cdot \alpha_i \to \langle \varphi | \varphi \rangle = 1 \to \left\langle \sum_j a_j \alpha_j \middle| \sum_i a_i \alpha_i \right\rangle = \sum_j \sum_i a_j^* a_i \underbrace{\langle \alpha_j | \alpha_i \rangle}_{\delta_{ij}}$

$$\langle \varphi|\varphi\rangle \to \langle \sum_j a_j \alpha_j \,|\, \sum_i a_i \alpha_i\rangle = \sum_i a_i^* \cdot a_i = \sum_i |a_i|^2 = 1$$

$$a_1 \to \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

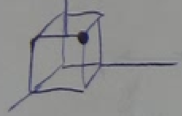


$$\varphi = \sum_j a_j \alpha_j$$

$$\langle \alpha_i|\varphi\rangle = \sum_j a_j \underbrace{\langle \alpha_i|\alpha_j\rangle}_{\delta_{ij}} = a_i$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_i = \langle \alpha_i|\varphi\rangle}$$



$$(\hat{1}, 1, 1, \dots, \overset{N}{\hat{1}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow N \to \infty$$

⇓

$\sum$ divergens lehet

⇓

DE konstruálható olyan eset amikor $N=\infty$ is lehetséges, de vigyázni kell ezzel

$$\left.\begin{matrix} \hat{A}\,\alpha_i = A_i \cdot \alpha_i & B_A: \{\alpha_i\}_i^N \\ \hat{B}\,\beta_j = B_j \cdot \beta_j & B_B: \{\beta_j\}_j^N \\ \vdots & \end{matrix}\right\} \text{Bázis(ok)}$$

(Egymásba átszámíthatók)

↓

$\boxed{\text{MÉRÉSELMÉLET}}$

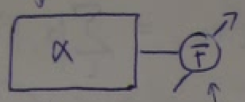
↓ IV.

⇘ elméletet ad a mérésre

⇓

ideális műszereket feltételez (elvi)

részecske

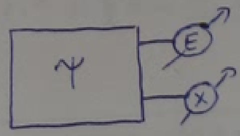


F → fizikai mennyiség (energia, impulzus, stb.)

a részecske α állapotban van

F-t mérő ideális műszer

Kiindulási példa: Induktív módszer



részecske Ψ állapotban van, mérjük meg a helyzetét és az energiáját.

Tfh. Ψ állapot kielégíti a 3. axiómát, azaz

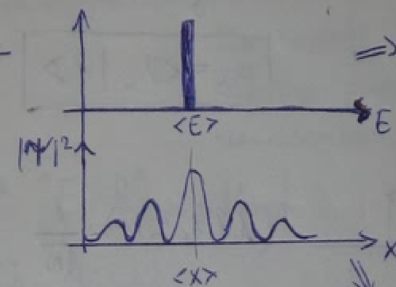
$$\hat{H}\Psi = E\cdot\Psi$$

⇒ Mérés saját állapotban

$$\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \langle E\rangle = E$$

↓ általánosítás

$$\langle E\rangle_\Psi = \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle$$



⇓ mérés nem saját állapotban ⇓ mérés szuperponált állapotban

$|\Psi|^2$ Born

ezt vissza kell kapnunk spec. esetben

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\Psi|^2\,dx$$

$$\Psi^*| \quad \hat{H}\Psi = E\Psi$$

$$\langle\Psi|H\Psi\rangle = E\cdot\underbrace{\langle\Psi|\Psi\rangle}_{1}$$

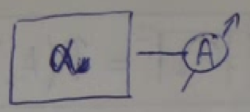
$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot|\Psi|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\Psi^*\cdot\Psi\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\cdot\underbrace{x\cdot\Psi}_{\hat{x}\Psi}\cdot dx = \langle\Psi|\hat{x}|\Psi\rangle$$

↓ általánosítás

$$\boxed{\langle F\rangle_\Psi = \langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle}$$

IV. axióma

⇒ kiváltja a Born értelmezést, mert azt használja fel a, "Mérés saját állapotban"

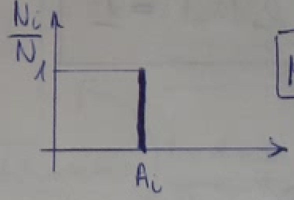


$\hat{A}\alpha_i = A_i \cdot \alpha_i$

(elemi ≡ egyedi mérés)

$\Downarrow$

egyszer ~~fel~~kapcsolom mutat valamit kikapcsolom



$\boxed{\text{MÉRÉS}}$

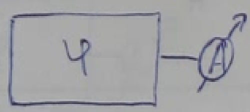
$\Downarrow$

N db elemi mérés összessége

b, "Mérés ~~NEM SAJÁT~~ állapotban"

$\downarrow$

szuperponált



$\hat{A}\alpha_i = A_i \alpha_i$

$\varphi \notin \{\alpha_i\}$

$\varphi \in \mathcal{H} \Leftarrow \boxed{I.}$

$\Downarrow$

$\varphi = \sum_i a_i \alpha_i$

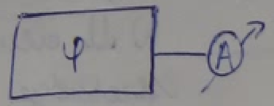
$\boxed{IV.}$

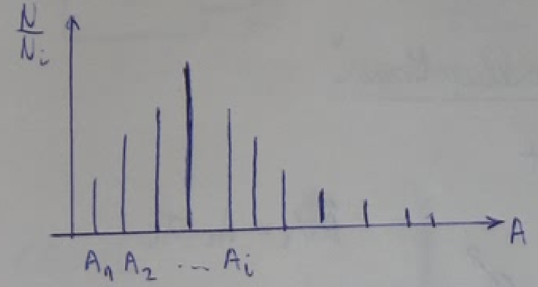
$$\langle A \rangle_\varphi \overset{\Downarrow}{=} \langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle = \langle \sum_i a_i \alpha_i | \hat{A} | \sum_j a_j \alpha_j \rangle = (*)$$

$$= \sum_i \sum_j a_i^* a_j \cdot \underbrace{\underbrace{\langle \alpha_i | \underbrace{\hat{A} | \alpha_j}_{A_j \cdot \alpha_j} \rangle}_{\langle \alpha_i | A_j \cdot \alpha_j \rangle}}_{A_j \cdot \underbrace{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}_{\delta_{ij}}}$$

$$(*) = \sum_i \sum_j a_i^* \cdot a_j \cdot A_j \cdot \delta_{ij} = \sum_i |a_i|^2 \cdot A_i$$

$$\boxed{\begin{aligned}\langle A\rangle_\varphi &= \sum_i |a_i|^2 \cdot A_i \\ \langle\varphi|\varphi\rangle &= \sum_i |a_i|^2 = 1\end{aligned}} \Longrightarrow \boxed{|a_i|^2 = P(A_i)}$$



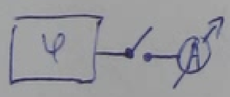


$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} = P(A_i) = |a_i|^2 = |\langle\alpha_i|\varphi\rangle|^2}$$

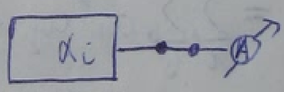
A negyedik axiómát így is ki lehet mondani

$$P(A_i) = |\langle\alpha_i|\varphi\rangle|^2 \quad \text{IV}$$

Elemi mérés előtt



Elemi mérés után



⇐ a 3. axióma miatt

$$P(A_i) = \boxed{P(\varphi\to\alpha_i) = |\langle\alpha_i|\varphi\rangle|^2} \quad \text{IV}$$

Nem tudok olyan mérést megvalósítani úgy, hogy ne avatkoznék be az elektron életébe.

(Trükkökkel megoldható)

7. Előadás

2009. 03.02.

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{x} = x\cdot \\ \hat{p}_x = \frac{\hbar}{j}\frac{\partial}{\partial x} \\ \vdots\end{array}} \to \hat{F} = F(\hat{x}, \hat{p}_x, \dots)$$

↓ általánosítás

$$\boxed{\begin{array}{l}[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{\hbar}{j} \\ \vdots\end{array}}$$

koordináta reprezentáció

állapot $\to \varphi \in \mathcal{H}$ (I.)

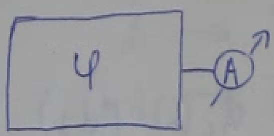
din. vált. $\to \hat{F}$ (II.)

$\hat{F}\varphi_i = F_i \cdot \varphi_i$ (III.)

$\boxed{P(F_i) = |\langle \varphi_i | \alpha \rangle|^2} \leftrightarrow \langle \hat{F} \rangle_\alpha = \langle \alpha | F | \alpha \rangle$ (IV.)

$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}$ (V.)

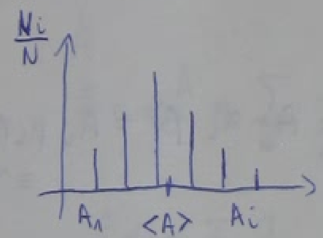
Példák.



$$\hat{A}\alpha_i = A_i \cdot \alpha_i \quad \text{III.}$$

$$\varphi \notin \{\alpha_i\} \quad \varphi = \sum_i a_i \alpha_i \quad \text{I.}$$

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \sum_i |a_i|^2 = 1$$

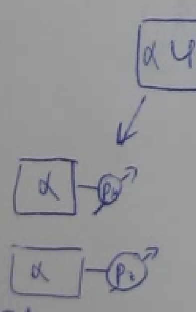


$$\langle \varphi | A | \varphi \rangle = \sum_i |a_i|^2 \cdot A_i$$

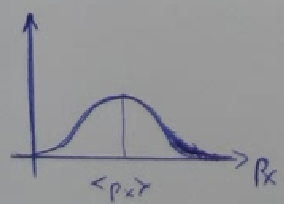
$$P(A_i) = |a_i|^2 \equiv |\langle \alpha_i | \varphi \rangle|^2$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} = P(A_i)$$

↓ pl



$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$



$$\hat{p}_x \varphi = p_x \cdot \varphi$$

$k_x > 0 \rightarrow$

$k_x < 0 \leftarrow$

$p_x = \hbar \cdot k_x$

$\Uparrow$

$\equiv k_x$

$$\frac{\hbar}{j}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p_x \varphi \to \varphi' = j \cdot \frac{p_x}{\hbar} \cdot \varphi$$

folytonos

$\Downarrow$

de Broglie hullám B.sc.

$$\boxed{\varphi(x) = c_0 \cdot e^{j k_x x}}$$

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 dx = |c_0|^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \to \infty$$

$$\langle p_x \rangle = \langle \alpha | \hat{p}_x | \alpha \rangle$$

$$P(p_x) = |\langle \varphi | \alpha \rangle|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j k_x x} \cdot \varphi(x) \cdot dx \right|^2$$

?

Közös sajátfüggvényrendszer.

$$\Psi = c_0 \cdot e^{j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} = c_0 \cdot e^{j \vec{k} \vec{r}}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{p}_x \Psi &= \hbar \cdot k_x \cdot \Psi \\ \hat{p}_y \Psi &= \hbar \cdot k_y \cdot \Psi \\ \hat{p}_z \Psi &= \hbar \cdot k_z \cdot \Psi \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}}$$

visszakaptuk a de Broglie-féle hullámokat

Impulzus sajátértékfüggvényei

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \emptyset$$

a)

$$\left.\begin{aligned} \hat{A}\, \alpha_i(x) &= A_i \cdot \alpha_i(x) \\ \hat{B}\, \beta_j(y) &= B_j \cdot \beta_j(y) \end{aligned}\right\} \quad \Psi(x,y) = \alpha_i(x) \cdot \beta_j(y)$$

$$\hat{A}\Psi = \hat{A}(\alpha_i \cdot \beta_j) = \beta_j \cdot \underbrace{(\hat{A}\alpha_i)}_{A_i \cdot \alpha_i} = A_i \cdot \alpha_i \cdot \beta_j = A_i \underbrace{(\alpha_i \beta_j)}_{\equiv \Psi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{A}\Psi &= A_i \cdot \Psi \\ \hat{B}\Psi &= B_j \Psi \end{aligned}}$$

b)

$$\hat{A}\, \alpha_i(x) = A_i \cdot \alpha_i(x)$$

$$\underbrace{\hat{A}(\hat{A}\alpha_i)}_{\hat{A}^2 \alpha_i} = A_i \cdot (\hat{A}\alpha_i) = A_i \cdot A_i \cdot \alpha_i = A_i^2 \cdot \alpha_i$$

$$(\underbrace{\hat{A}\hat{A}^2}) \alpha_i = A_i^2 \cdot \hat{A}\alpha_i = A_i^3 \cdot \alpha_i$$

$$\hat{A}^3 \alpha_i = A_i^3 \cdot \alpha_i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{A}^n \alpha_i = A_i^n \cdot \alpha_i}$$

$$c_n \mid \quad \hat{A}^n \alpha_i = A_i^n \cdot \alpha_i$$

$$c_n \cdot \hat{A}^n \alpha_i = A_i \cdot c_n \cdot \alpha_i$$

$$\cancel{\left(\sum_n c_n \hat{A}^n\right) \alpha_i}$$

$$\left(\underbrace{\sum_n c_n \cdot \hat{A}^n}_{\equiv \hat{F}}\right) \alpha_i = \left(\underbrace{\sum_n c_n \cdot A_i^n}_{\equiv F_i}\right) \cdot \alpha_i$$

$$\boxed{\hat{F} \alpha_i = F_i \cdot \alpha_i}$$

$$\hat{A} \longrightarrow \hat{F}$$

$$A_i \longrightarrow F_i$$

$$\hat{A}$$

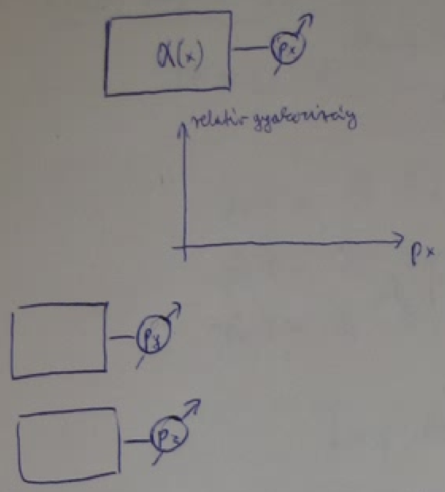
$$\hat{F} = e^{\hat{A}} = \sum_n \frac{1}{n!} \hat{A}^n$$

$$\hat{F} \alpha_i = F \cdot \alpha_i$$

$$\left(\left(e^{\hat{A}}\right) \alpha_i\right) = \left(\sum_n \frac{1}{n!} \underbrace{\left(\left(\hat{A}^n\right) \alpha_i\right)}\right) = \sum_n \frac{1}{n!} \cdot A_i^n \cdot \alpha_i = \alpha_i \underbrace{\sum_n \frac{1}{n!} A_i^n}_{e^{A_i}}$$

$$\hat{A}^n \alpha_i = \left(\hat{A}\hat{A} \dots \hat{A}\hat{A}\right) \alpha_i = A_i^n \cdot \alpha_i$$

$$\left(e^{\hat{A}}\right) \alpha_i = e^{A_i} \cdot \alpha_i$$



$$\hat{p}_x \psi = p_x \cdot \psi$$

$$\frac{\hbar}{j}\frac{\partial \psi}{\partial x} = p_x \cdot \psi \Rightarrow \psi' = j\frac{p_x}{\hbar}\cdot \psi$$

$$\Downarrow$$

$$\psi(x) = c \cdot e^{j k_x \cdot x}$$

de Broglie-féle hullám 1D-ben

$$p_x = \hbar \cdot k_x$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |c|^2 \cdot \underbrace{e^{-j k_x \cdot x} \cdot e^{j k_x \cdot x}}_{=1} dx = |c|^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx \longrightarrow \infty$$

?

$\downarrow$

Nem eleme a Hilbert-térnek

$$\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k_x) \cdot e^{j \cdot k_x \cdot x} \, dk_x$$

$$\downarrow$$

$$|\langle \psi | \alpha \rangle|^2 = |c(k_x)|^2$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \emptyset$$

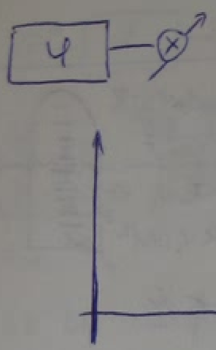
$$\hat{p}_y \psi = p_y \cdot \psi \qquad \psi = c \cdot e^{j \cdot k_y \cdot y} \qquad p_y = \hbar \cdot k_y$$

$$\hat{p}_z \psi = p_z \cdot \psi \qquad \psi = c \cdot e^{j \cdot k_z \cdot z} \qquad p_z = \hbar \cdot k_z$$

$$\boxed{\psi = c \cdot e^{j(\vec{k}\vec{r})}}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{p}_x e^{j(\vec{k}\vec{r})} &= \hbar \cdot k_x \cdot e^{j(\vec{k}\vec{r})} \\ \hat{p}_y e^{j(\vec{k}\vec{r})} &= \hbar \cdot k_y \cdot e^{j(\vec{k}\vec{r})} \\ \hat{p}_z e^{j(\vec{k}\vec{r})} &= \hbar \cdot k_z \cdot e^{j(\vec{k}\vec{r})} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}}$$

szabadon mozgó részecske hullámegyenlete



$\hat{x}\chi_{x} = x'\cdot\chi_{x} \longrightarrow$ ~~xx~~

$\varphi \notin \{\chi\}$

$\chi_{x'}(x)$

$\hat{x} = x\cdot$

$$x\cdot\chi_{x'}(x) = x'\cdot\chi_{x'}(x)$$

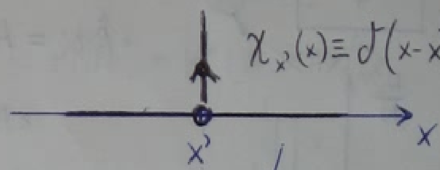
$$(x-x')\cdot\chi_{x'}(x) = \emptyset \quad \forall x\text{-re}$$

változó   sajátérték

1. eset
$x \neq x'$
$\Downarrow$
$\chi_{x'}(x)=\emptyset$

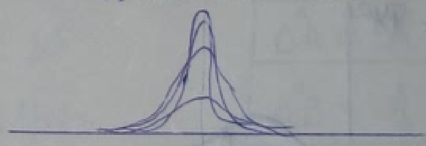
2. eset
$x = x'$
$\chi_{x'}(x)\neq\emptyset$

$$\chi_{x'}(x)\equiv\delta(x-x')$$



Nem eleme a Hilbert-térnek

hely sajátfüggvény



$\Downarrow$

a $\delta(x-x')$ előállítható reguláris fv.

$\Downarrow$

Megoldás, hogy a Hilbert-térhez hozzávesszük az előző megoldást és ezt is, és így zárttá tesszük a Hilbert-teret

8. Előadás

$$\hat{x} = x\cdot$$
$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{j}\frac{\partial}{\partial x}$$
$$\vdots$$

$\xleftarrow{\text{repr}}$

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{\hbar}{j}$$
$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\hat{F} = F(\hat{x}, \hat{p}_x, \ldots)$$

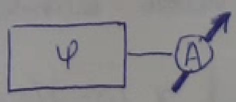
állapot $\to \varphi \in \mathcal{H}$ — I.

din. vált. $\to \hat{F}$ — II.

mérhető $\hat{F}\varphi_i = F_i \cdot \varphi_i$ — III., IV.

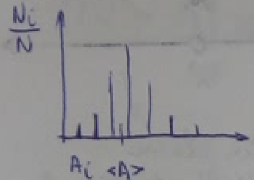
$\langle F\rangle_\varphi = \langle \varphi | \hat{F} | \varphi\rangle \longleftrightarrow P(F_i)_\varphi = |\langle \varphi_i | \varphi\rangle|^2$ — V.

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}$$

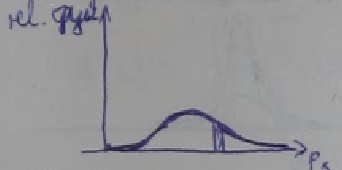


$\varphi \notin \{\alpha_i\}$

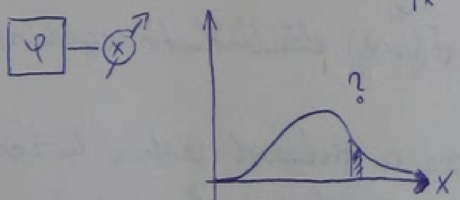
$\hat{A}\alpha_i = A_i \cdot \alpha_i$



$$\langle A\rangle = \langle \varphi | \hat{A} | \varphi\rangle$$



$\Longrightarrow$



III. $\hat{x}\chi = x'\cdot\chi$

$$\{\chi_{x'}(x)\} \to \chi_{x'} \equiv \delta(x - x')$$

IV.

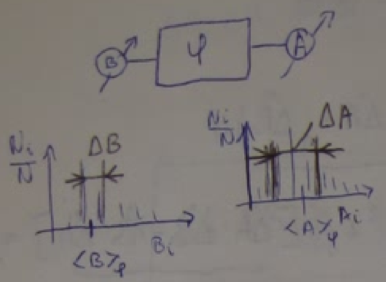
$$P(x'|\varphi) = |\langle \chi_{x'}(x) | \varphi(x)\rangle|^2 =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^*_{x'}(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx\right|^2 =$$

$$= \left|\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x')\cdot\varphi(x)\cdot dx}_{\varphi(x')}\right|^2 = |\varphi(x')|^2$$

$$\boxed{P(x)\,dx = |\varphi(x')|^2 \cdot dx} \quad \text{BORN}$$

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{C} \neq \emptyset$$



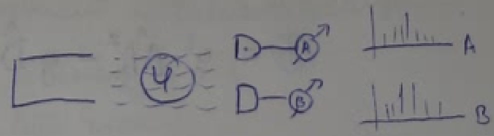
$$\left.\begin{aligned}\hat{A}^+ &= \hat{A}\\ \hat{B}^+ &= \hat{B}\end{aligned}\right\}$$ önadjungált

$\hat{C}^+ \neq \hat{C}$ → nem önadjungált

$\hat{C} \equiv j \cdot \hat{D}$ $\boxed{\hat{D}^+ = \hat{D}}$, DE $\hat{D}$ önadjungált

HF.

$\Delta B; \Delta A \Rightarrow$ szórás



$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} \longrightarrow \Delta A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

↓ kv.

$$\langle \psi | (\hat{A} - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle)^2 | \psi \rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\hat{A} &\equiv \hat{A} - \langle A \rangle\\ \Delta\hat{B} &\equiv \hat{B} - \langle B \rangle\end{aligned}} \rightarrow \in \mathbb{R}$$

$$\Delta A^2 = \langle \psi | \Delta\hat{A}^2 | \psi \rangle$$

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{C}$$

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A},\hat{B}] \equiv j \cdot \hat{D}$$

Matematikai levezetés:

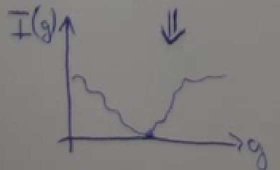
D: $\boxed{\hat{G} = g \cdot \Delta\hat{A} + j \cdot \Delta\hat{B}}$ $g \in \mathbb{R}$

$\Delta\hat{A}^+ = \Delta\hat{A}$

$\Delta\hat{B}^+ = \Delta\hat{B}$

$\hat{G}^+ = g \cdot \Delta\hat{A} - j \cdot \Delta\hat{B} \neq \hat{G} \Rightarrow$ nem lehet dinamikai változóhoz rendelni, DE számolhatunk vele

$$I(g) \equiv \langle \hat{G}\psi | \hat{G}\psi \rangle \geq \emptyset$$



$$I(g) = \langle \hat{G}\varphi | \hat{G}\varphi \rangle = \langle \varphi | \underbrace{\hat{G}^+ \hat{G}}\varphi \rangle = ⊛⊛$$

$$\underbrace{(g\cdot\Delta\hat{A} - j\cdot\Delta\hat{B})(g\cdot\Delta\hat{A} + j\cdot\Delta\hat{B})\varphi}$$

$$g^2\cdot\Delta\hat{A}^2 + \Delta\hat{B}^2 + jg[\underbrace{\Delta\hat{A}\cdot\Delta\hat{B} - \Delta\hat{B}\cdot\Delta\hat{A}}] = ⊛$$

$$\equiv [\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] \equiv j\cdot\hat{D}$$

$$⊛ = g^2\cdot\Delta\hat{A}^2 - g\cdot\hat{D} + \Delta\hat{B}^2$$

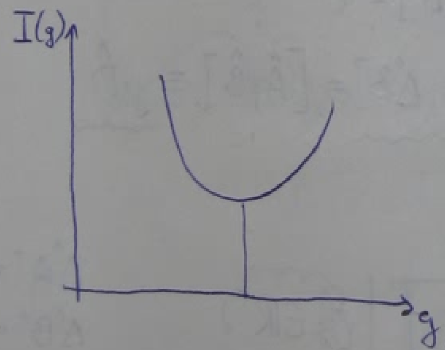
⊛⊛

$$= \langle \varphi | (g^2\Delta\hat{A}^2 - g\cdot\hat{D} + \Delta\hat{B}^2)\cdot\varphi \rangle =$$

$$= g^2\cdot\underbrace{\langle \varphi | \Delta\hat{A}^2 | \varphi \rangle}_{\Delta A^2 \in \mathbb{R}^+} - g\cdot\underbrace{\langle \varphi | \hat{D} | \varphi \rangle}_{\langle \hat{D} \rangle_\varphi \in \mathbb{R}} + \underbrace{\langle \varphi | \Delta\hat{B}^2 | \varphi \rangle}_{\Delta B^2 \in \mathbb{R}^+}$$

$$\downarrow$$

$$I(g) = g^2\cdot\Delta A^2 - g\cdot\langle \hat{D} \rangle_\varphi + \Delta B^2 \quad \in \mathbb{R}$$



Diskriminans:

$$D = \langle \hat{D} \rangle_\varphi^2 - 4\cdot\Delta A^2\cdot\Delta B^2 \le \emptyset$$

$$\downarrow$$

$$\Delta A^2\cdot\Delta B^2 \ge \frac{1}{4}\cdot\langle \hat{D} \rangle_\varphi$$

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \underbrace{\langle \psi | \hat{D} | \psi \rangle}_{-j \cdot \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] \psi \rangle} \right|$$

$$\boxed{\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] \psi \rangle \right|} \neq 0 \text{ , Ha } [\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

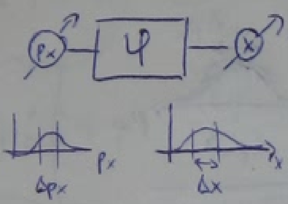
$\Downarrow$

Határozatlansági-relációk általános alapja

Ha ΔA kicsi $\Rightarrow$ ΔB nagy

Ha ΔA nagy $\Rightarrow$ ΔB kicsi

Példa:



$\hat{A} \equiv \hat{x}$

$\hat{B} \equiv \hat{p}_x$

$[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{\hbar}{j}$

Heisenberg-féle határozatlansági relációt adja meg

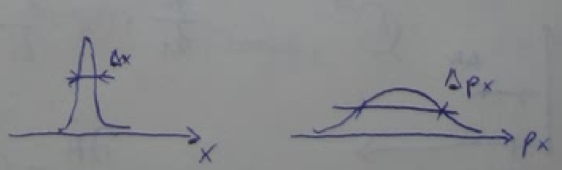
$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \left| \psi | [\cancel{\hat{x}\hat{p}_x}] \psi \right|$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \left| \psi | \underbrace{[\hat{p}_x, \hat{x}]}_{\frac{\hbar}{j}} \psi \right|$$

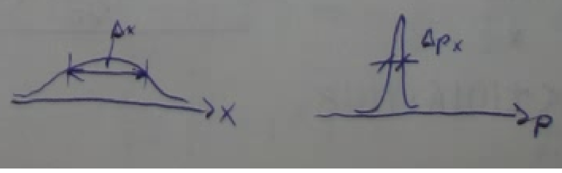
$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \cdot \hbar \cdot \left| \underbrace{\langle \psi | \psi \rangle}_{\equiv 1} \right|$$

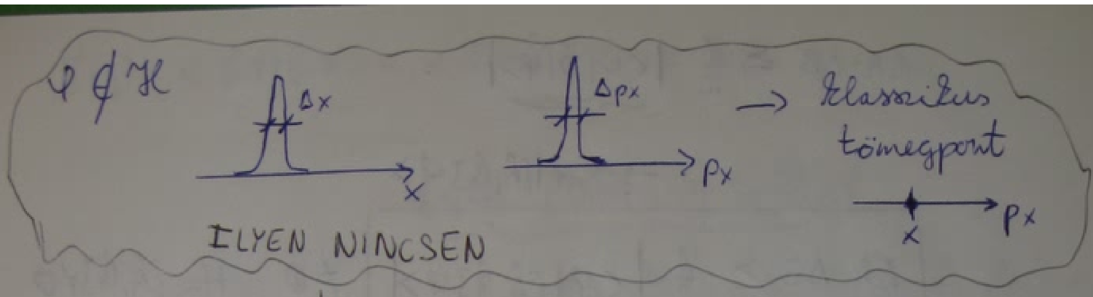
$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

ψ_A:



ψ_B:





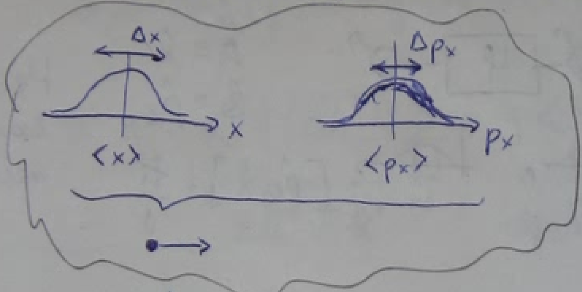
modell

Makroszkópikus skálán

Δx olyan kicsi, hogy 0-nak vehető

$\Downarrow$

Ezért érvényes a klasszikus fizika



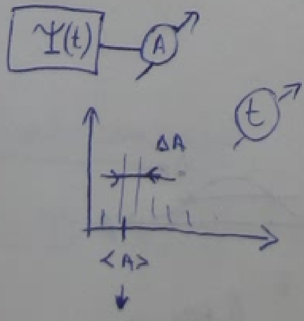
$\Downarrow$

Korrespondancia-elv bizonyítása

$\hookrightarrow$ A kvantummechanika makroszkópikus méretekben vissza adja a klasszikus fizika eredményeit

$\Downarrow$

EHRENFEST - tétel



$\langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle$

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{d}{dt}\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$$

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \langle \dot{\Psi}|\hat{A}|\Psi\rangle + \langle \Psi|\hat{A}\,\dot{\Psi}\rangle = ⊛$$

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi} \longrightarrow \dot{\Psi} = -\frac{j}{\hbar}\hat{H}\Psi$$

$$(\hat{H}\Psi)^* = +\frac{\hbar}{j}(\dot{\Psi})^*$$

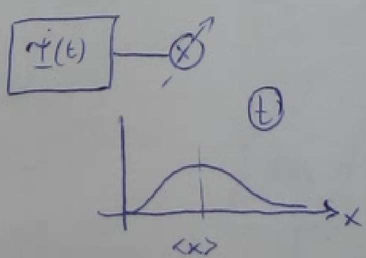
$$\hat{H}\Psi^* = +\frac{\hbar}{j}\dot{\Psi}^* \to \dot{\Psi}^* = \frac{j}{\hbar}\hat{H}\Psi^*$$

$$⊛ = \frac{j}{\hbar}\underbrace{\Big[\underbrace{\langle\hat{H}\Psi|\hat{A}\Psi\rangle}_{\langle\Psi|\hat{H}\hat{A}\Psi\rangle} - \langle\Psi|\hat{A}\hat{H}\Psi\rangle\Big]}_{\langle\Psi|(\hat{H}\hat{A}-\hat{A}\hat{H})\Psi\rangle}$$

$$\langle\Psi|(\underbrace{\hat{H}\hat{A}-\hat{A}\hat{H}}_{[\hat{H},\hat{A}]})\Psi\rangle$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{j}{\hbar}\cdot\langle\Psi|[\hat{H},\hat{A}]\Psi\rangle}$$

Pl. $\hat{A} \equiv \hat{x}$



$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$\hat{x} = x.$$

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{j}{\hbar}\langle\Psi|\underbrace{[\hat{H},\hat{x}]}_{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dx^2},x\right]}\Psi\rangle = -\frac{j}{\cancel{\hbar}}\cdot\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2m}\langle\Psi|\underbrace{\left[\frac{d^2}{dx^2},x\right]\Psi}_{\frac{d^2}{dx^2}x\cdot\Psi - x\cdot\frac{d^2}{dx^2}\Psi}\rangle = ⊛$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x \cdot \Psi) = x'' \cdot \Psi + 2 \cdot x' \cdot \Psi' + x \cdot \Psi''$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x \cdot \Psi) - x \cdot \frac{d^2}{dx^2}\Psi = 2 x' \cdot \Psi'$$

$$\circledast = -\frac{j \cdot \hbar}{\cancel{2} \cdot m} \cdot \cancel{2} \langle \Psi | \Psi' \rangle =$$

$$= \frac{1}{m} \langle \Psi | \underbrace{\frac{\hbar}{j}\frac{d}{dx}}_{\hat{p}_x} \Psi \rangle = \frac{1}{m} \langle \Psi | \hat{p}_x | \Psi \rangle$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{1}{m}\langle p_x \rangle}$$