Fizika 1i, 2018 őszi félév, 1. gyakorlat

Szükséges előismeretek: vektorok, műveletek vektorokkal (összeadás, kivonás, skalárral való szorzás, skaláris szorzat és vektoriális szorzat, abszolút érték), vektorok reprezentációja koordináta-rendszerekben (komponensek), műveletek reprezentációkkal; trigonometrikus függvények, azonosságok; függvény ábrázolása, transzformációja; határérték;

Jelölések

vektor (irányított szakasz): $\vec{\boldsymbol{r}}$
vektor reprezentációja (komponensek): $\boldsymbol{r}$
vektor hossza (nagysága): $|\vec{\boldsymbol{r}}| = r$
irányvektor, normálvektor (ezek egységvektorok): $\vec{\boldsymbol{e}}, \vec{\boldsymbol{n}}$

Feladatok

Vektorok és vektorműveletek

F1. Adjuk meg az ABC háromszög súlypontjába mutató vektort, ha a háromszög csúcsainak helyvektora rendre $\vec{\boldsymbol{r}}_A$, $\vec{\boldsymbol{r}}_B$ és $\vec{\boldsymbol{r}}_C$!

F2. Egy egyenes karó a sík talajból merőlegesen áll ki. A karó talppontjából a legfelső pontjába mutató vektor $\vec{\boldsymbol{r}}$. Kizárólag vektorok és vektorműveletek felhasználásával adjuk meg a karó árnyékának hosszát, ha a napsugarak az $\vec{\boldsymbol{e}}$ irányvektor irányában haladnak!

F3. Az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektort az $\vec{\boldsymbol{n}}$ normálvektorú síkra tükrözzük. Írjuk fel az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektor tükörképét kizárólag vektorok és vektorműveletek felhasználásával!

F4. Az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektort az $\vec{\boldsymbol{e}}$ irányvektor irányában kétszeresére nyújtunk. Írjuk fel a megnyúlt vektort!

F5. Adjuk meg a következő görbék és felületek egyenletét kizárólag vektorok és vektorműveletek felhasználásával (komponensek használata nélkül)!

a) $\vec{\boldsymbol{e}}$ irányvektorú egyenes, amely áthalad az $\vec{\boldsymbol{r}}_P$ helyvektorú P ponton;

b) $\vec{\boldsymbol{n}}$ normálvektorú sík, amely áthalad az $\vec{\boldsymbol{r}}_P$ helyvektorú P ponton;

c) $\vec{\boldsymbol{r}}_C$ középpontú, R sugarú gömb;

d) $\vec{\boldsymbol{r}}_C$ középpontú, R sugarú kör, amely az $\vec{\boldsymbol{n}}$ normálvektorú síkban fekszik.

F6. Egy háromszög A, B és C csúcsainak helyvektorai rendre $\vec{\boldsymbol{r}}_A$, $\vec{\boldsymbol{r}}_B$ és $\vec{\boldsymbol{r}}_C$. Írjuk fel a háromszög területét kizárólag vektorok és vektorműveletek felhasználásával!

F7. Az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektort az $\vec{\boldsymbol{e}}$ irányvektor körül (a jobbkézszabálynak megfelelően) 90°-kal elforgatunk. Írjuk fel az elforgatott vektort, ha

a) $\vec{\boldsymbol{r}}$ és $\vec{\boldsymbol{e}}$ *merőlegesek* egymásra;

b) $\vec{\boldsymbol{r}}$ és $\vec{\boldsymbol{e}}$ *nem merőlegesek* egymásra.

Vektorok reprezentációja

F8. Egy kiránduló először 10 km-t tesz meg ÉK-i irányban, majd É-i irányban 5 km-t, végül 20 km-t ÉNy-i irányban. Mekkora távolságra került a kiránduló a kiindulási helyétől? Adjuk meg a teljes elmozdulás(vektor) irányát!

F9. Egy derékszögű koordináta-rendszerben fekvő háromszög csúcsainak helyvektorát az $\boldsymbol{r}_A = (4, 2)$, $\boldsymbol{r}_B = (12, 4)$ és $\boldsymbol{r}_C = (5, 12)$ számkettesek reprezentálják. Adjuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

F10. Mekkora szöget zárnak be az $\boldsymbol{a} = (5, 4, 2)$ és a $\boldsymbol{b} = (2, 6, -4)$ számhármasokkal reprezentált vektorok?

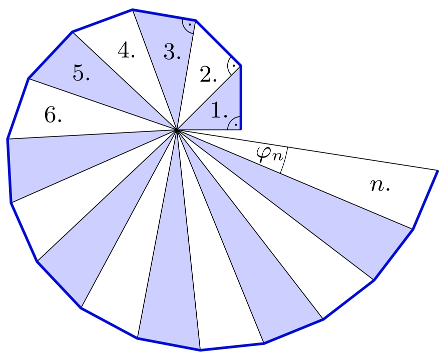
F11. Adjuk meg az $\boldsymbol{a} = (1, 1, 4)$ és $\boldsymbol{b} = (2, 3, 1)$ komponensű vektorok vektoriális szorzatának reprezentációját!

F12. Egy síkban vannak-e az $\boldsymbol{a} = (1, 1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (2, 3, 1)$ és $\boldsymbol{c} = (4, 7, -5)$ számhármasokkal reprezentált vektorok?

F13. Egy $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektor komponensei a K koordinátarendszerben x és y. Adjuk meg az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektor x' és y' komponenseit egy olyan K' koordinátarendszerben, amely a K-hoz képest α szögben (az óramutató járásával ellenkező irányban) el van forgatva!

Trigonometria, azonosságok

F14. Az alábbi *ábrán* egy ún. Theodorus-spirál látható, amely derékszögű háromszögekből épül fel. Az első háromszög egyenlőszárú, és mindegyik háromszög átfogója egyben a következő hosszabbik befogója, míg a rövidebb befogó mindig egységnyi. Mekkora az n. háromszög legkisebb φ_n szöge?



F15. Határozzuk meg egy szabályos tetraéder két lapja által bezárt szöget!

F16. Fejezzük ki a következő függvényeket $\sin x$-szel és $\cos x$-szel!

a) $\sin(x/2)$,

b) $\cos(x/2)$,

c) $\sin(3x)$,

d) $\cos(3x)$;

Függvények ábrázolása, függvénytranszformációk, határérték

F17. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

a) $y = \cos x$,

b) $y = \cos 2x$,

c) $y = \cos(2x - \pi/3)$,

d) $y = 3\cos(2x - \pi/3)$,

e) $y = 2 - 3\cos(2x - \pi/3)$;

F18. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

a) $y = x^2$,

b) $y = 2x^2$,

c) $y = 2(x+3)^2$,

d) $y = 2\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)^2$;

19. Határozzuk meg a következő határértékeket:

a) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$,

b) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$;

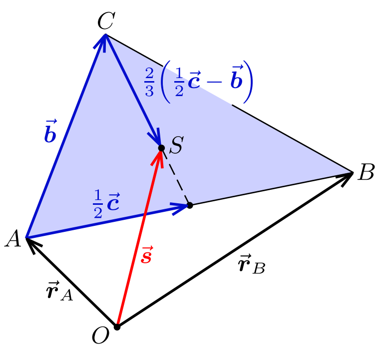
(Használjunk addíciós tételt és alkalmazzunk közelítéseket!)

Megoldások

M1. Jelöljük az A csúcsból a C csúcsba mutató vektort $\vec{b}$-vel, az A csúcsból a B csúcsba mutató vektort pedig $\vec{c}$-vel (lásd az *ábrát*)! A vektorok különbségére vonatkozó szabály szerint ezek felírhatók

$$(*)\qquad \vec{b} = \vec{r}_C - \vec{r}_A\,, \quad \text{illetve} \quad \vec{c} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

alakban. A C csúcsból az AB oldal felezőpontjába mutató vektor (amely egybeesik az egyik súlyvonallal) $\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$, ennek C-től távolabbi harmadolópontjában helyezkedik el az S súlypont.



Az O origóból a súlypontba mutató $\vec{s}$ vektor tehát három vektor összegeként írható fel:

$$\vec{s} = \vec{r}_A + \vec{b} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}\right) = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}\,,$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk a $(*)$ összefüggéseket.

M2. Válasszuk origónak a karó talppontját! A karó árnyékának P végpontját a karó legfelső pontján áthaladó $\vec{e}$ irányvektorú egyenes talajjal való metszéspontja jelöli ki. Az origóból ezen egyenes tetszőleges (például a P) pontjába mutató vektor felírható $\vec{r} + \lambda\vec{e}$ alakban, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ a pont helyzetét jellemző skalár mennyiség. Ezért a karó árnyékának megfelelő vektor

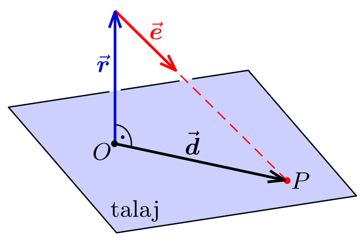
$$\vec{d} \equiv \overrightarrow{OP} = \vec{r} + \lambda\vec{e}\,.$$

Tudjuk továbbá, hogy a karó árnyéka a talaj síkjában fekszik, amit a skaláris szorzattal

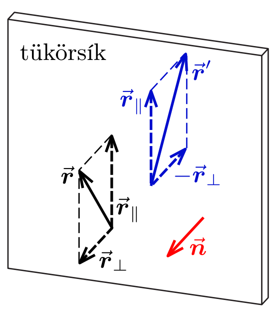
$$\vec{r}\vec{d} = |\vec{r}|^2 + \lambda\vec{r}\vec{e} = 0$$

alakban fejezhetünk ki. Ezt megoldva λ-ra, majd az eredményt a $\vec{d}$-t megadó összefüggésbe visszahelyettesítve kapjuk az árnyék hosszát:

$$|\vec{d}| = \left|\vec{r} - \frac{|\vec{r}|^2}{\vec{r}\vec{e}}\vec{e}\right|\,.$$



M3. A tükrözés az $\vec{r}$ vektor tükörsíkkal párhuzamos $\vec{r}_\parallel$ komponensét nem változtatja meg, míg a tükörre merőleges $\vec{r}_\perp$ komponensét ellentétesre változtatja (lásd az *ábrát*).



Írjuk fel tehát az $\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel$ és $\vec{\boldsymbol{r}}_\perp$ komponenseket! Utóbbi párhuzamos a tükörsík normálvektorával, hossza pedig $\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{n}}$, így

$$\vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{n}})\,.$$

A tükörsíkkal párhuzamos komponens a vektorok kivonására vonatkozó szabály szerint

$$\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{n}})$$

módon számolható. Mindezek alapján tehát az eredeti vektor $\vec{\boldsymbol{r}}'$ tükörképe:

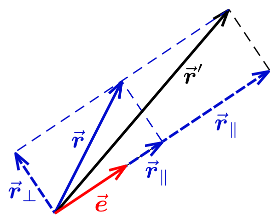
$$\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel - \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}} - 2\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{n}})\,.$$

M4. Az előző feladathoz hasonlóan bontsuk fel az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektort $\vec{\boldsymbol{e}}$-vel párhuzamos, illetve arra merőleges komponensekre!

$$\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel = \vec{\boldsymbol{e}}(\vec{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{r}})\,, \quad \text{illetve} \quad \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{e}}(\vec{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{r}})\,.$$

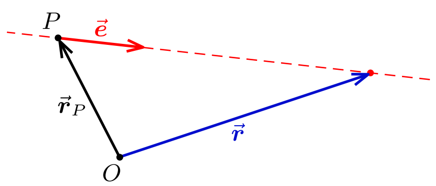
A nyújtás során az $\vec{\boldsymbol{e}}$-vel párhuzamos irányú komponens megkétszereződik, tehát az új, nyújtott $\vec{\boldsymbol{r}}'$ vektor a következőképp írható:

$$\vec{\boldsymbol{r}}' = 2\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel + \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{e}}(\vec{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{r}})\,.$$



M5. *a*) Az egyenesen lévő bármely $\vec{\boldsymbol{r}}$ helyvektorú pontba eljuthatunk úgy, hogy az $\vec{\boldsymbol{r}}_P$ ponthoz hozzáadjuk az irányvektor λ-szorosát ($\lambda \in \mathbb{R}$), ahol λ a szóbanforgó pont helyzetét jellemző skalár (lásd az *ábrát*). Az egyenes egyenlete tehát:

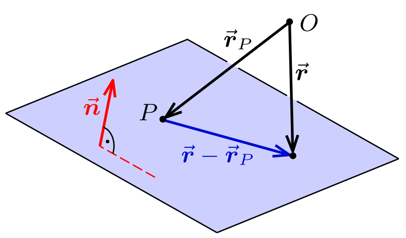
$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_P + \lambda\vec{\boldsymbol{e}}\,.$$



b) A P pontból a sík tetszőleges másik ($\vec{\boldsymbol{r}}$ helyvektorú) pontjába húzott $\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_P$ vektor benne van a síkban, azaz merőleges $\vec{\boldsymbol{n}}$-re. Ezért

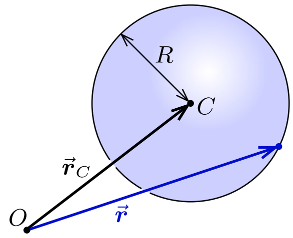
$$(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_P)\vec{\boldsymbol{n}} = 0\,,$$

ez a sík vektoros egyenlete.



c) A gömb felszínének pontjait az jellemzi, hogy a középponttól mért távolságuk állandó, éppen a gömb R sugara:

$$|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_C| = R\,.$$



d) A kör egy gömb és egy annak középpontján áthaladó sík metszeteként származtatható, ezért a körön lévő pontok helyvektorai az alábbi két egyenletet egyszerre elégítik ki:

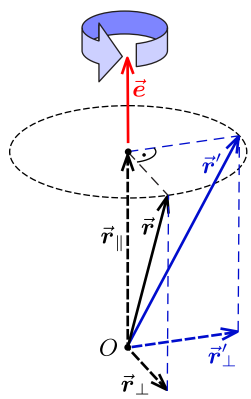
$$|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_C| = R\,, \quad (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_C)\vec{\boldsymbol{n}} = 0\,.$$

M6. A háromszög B és C csúcsából az A csúcsba mutató két vektort rendre $\vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\boldsymbol{r}}_B$ és $\vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\boldsymbol{r}}_C$ alakban írhatjuk fel. E két vektor vektoriális szorzatának abszolút értéke a vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyezik meg, ami éppen kétszerese a háromszög területének, ezért a megoldás:

$$T = \frac{1}{2}|(\vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\boldsymbol{r}}_B) \times (\vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\boldsymbol{r}}_C)|\,.$$

M7. *a*) Ha a két vektor merőleges, akkor az elforgatott vektor egyszerűen $\vec{\boldsymbol{e}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$, hiszen ennek hossza éppen $|\vec{\boldsymbol{r}}|$, iránya pedig a jobbkézszabály szerinti.

b) Általános esetben az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektort fel kell bontanunk az $\vec{\boldsymbol{e}}$ irányvektorral párhuzamos ($\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel$) és arra merőleges ($\vec{\boldsymbol{r}}_\perp$) komponensekre, ahogy az az *ábrán* is látható.



Az *F.4. feladatban* láttuk, hogy

$$\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel = \vec{\boldsymbol{e}}(\vec{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{r}}) \quad \text{és} \quad \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{e}}(\vec{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{r}})\,.$$

A forgatás az $\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel$ komponenst változatlanul hagyja, míg a másik komponenst az *a*) részhez hasonlóan számíthatjuk:

$$\vec{\boldsymbol{r}}'_\perp = \vec{\boldsymbol{e}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{e}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\,,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\vec{\boldsymbol{e}} \times \vec{\boldsymbol{e}} = 0$. Végül felírhatjuk az elforgatott vektort:

$$\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel + \vec{\boldsymbol{r}}'_\perp = \vec{\boldsymbol{e}}(\vec{\boldsymbol{e}}\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{e}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\,.$$

M8. Válasszuk a koordináta-rendszerünk x-tengelyét keleti, y-tengelyét északi irányban! Az elmozdulásvektorok összege ebben a rendszerben így írható (km-ben mérve):

$$\frac{10}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{20}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\sqrt{2}\\15\sqrt{2}+5\end{pmatrix}.$$

A teljes elmozdulásvektor hossza

$$\sqrt{(-5\sqrt{2})^2+(15\sqrt{2}+5)^2}\approx 27{,}2\ (\mathrm{km}),$$

iránya pedig északhoz képest az óramutató körüljárása szerint

$$\operatorname{arctg}\frac{-5\sqrt{2}}{15\sqrt{2}+5}\approx -15{,}1^\circ$$

szögben hajlik, azaz valahol É és ÉÉNy között van.

M9. Az *F1. feladat* általános eredményét kell alkalmaznunk, mely szerint a súlypontba mutató vektor reprezentációja:

$$\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B+\boldsymbol{r}_C}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}21\\18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}.$$

M10. A skaláris szorzat definíciója szerint $\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$, ahol φ a két vektor által bezárt szög. Ezért

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5\cdot 2+4\cdot 6+2\cdot(-4)}{\sqrt{5^2+4^2+2^2}\sqrt{2^2+6^2+(-4)^2}},$$

innen $\cos\varphi=0{,}518$, azaz $\varphi=58{,}8^\circ$.

M11. A vektoriális szorzat komponensekkel a következőképp fejthető ki:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\7\\1\end{pmatrix}.$$

M12. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok kifeszítenek egy síkot, melynek normálvektora párhuzamos az $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ vektoriális szorzattal. Ha a $\boldsymbol{c}$ vektor ebben a síkban van, akkor merőlegesnek kell lennie a sík normálvektorára, és így az $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ vektorra is. A $\boldsymbol{c}$ és $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ vektorok skaláris szorzata (ami jelen esetben a három vektor vegyes szorzata) a megadott számadatok (és az előző feladat eredménye) alapján zérusnak adódik:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-11 & 7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\\-5\end{pmatrix}=0,$$

azaz a három vektor *egy síkban* fekszik.

M13. Vezessük be a K koordináta-rendszer tengelyeinek irányába mutató $\vec{\boldsymbol{i}}$ és $\vec{\boldsymbol{j}}$, valamint a K' koordináta-rendszer tengelyeinek irányába mutató $\vec{\boldsymbol{i}}'$ és $\vec{\boldsymbol{j}}'$ egységvektorokat! Ezek egymással vett skalárszorzatai:

$$\vec{\boldsymbol{i}}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}'=\cos\alpha,\qquad \vec{\boldsymbol{i}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}'=-\sin\alpha,$$
$$\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}'=\cos\alpha,\qquad \vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}'=\sin\alpha,$$

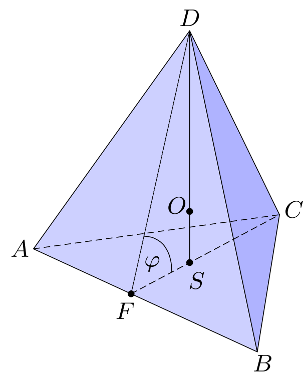
ahol felhasználtuk, hogy $\cos(90^\circ\mp\alpha)=\pm\sin\alpha$. Az eredeti K rendszerben az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektor $x\vec{\boldsymbol{i}}+y\vec{\boldsymbol{j}}$ módon írható fel. A K' rendszerbeli komponenseket úgy kapjuk, hogy az $\vec{\boldsymbol{r}}$ vektort levetítjük az új tengelyekre:

$$x'=\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}'=x\,\vec{\boldsymbol{i}}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}'+y\,\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$
$$y'=\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}'=x\,\vec{\boldsymbol{i}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}'+y\,\vec{\boldsymbol{j}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

M14. Az első (egyenlőszárú) háromszög átfogója a Pitagorasz-tétel értelmében $\sqrt{2}$ egység hosszúságú. Ez a második háromszög hosszabbik befogója, így az átfogó hossza $\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$. A sort folytatva az n-edik háromszög átfogójára $\sqrt{n+1}$ hosszúság adódik. A φ_n hegyesszög tehát a szinusz szögfüggvényt használva kapható meg:

$$\sin\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}},\quad\text{azaz}\quad \arcsin\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

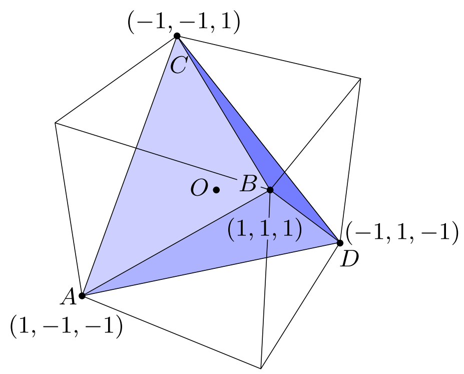
M15. *1. megoldás.* A tetraédert négy egybevágó szabályos háromszög alkotja, melyek magasságát (pl. az *ábrán*) látható FD szakasz hosszát) jelöljük h-val! A tetraéder O középpontjának az egyik (pl. az ABC) lapra vett merőleges vetülete a háromszög S súlypontjával esik egybe.



A súlypont harmadolja az FC súlyvonalat (amely egyben az ABC háromszög magassága), ezért az FS szakasz hossza $h/3$. Az FSD derékszögű háromszögre felírva a koszinusz szögfüggvényt megkaphatjuk a tetraéder lapjai által bezárt φ szöget:

$$\cos\varphi=\frac{FS}{FD}=\frac{h/3}{h},\quad\text{így}\quad \varphi=\arccos\frac{1}{3}=70{,}5^\circ.$$

2. megoldás. A szabályos tetraéder egy kockába rajzolható az *ábrán* látható módon. Mivel a keresett szög független a tetraéder méretétől, válasszuk a kocka oldalélét 2 egységnyinek, az origót pedig helyezzük a kocka középpontjába; ekkor a tetraéder csúcsainak összes koordinátája 1 vagy -1 lesz.



A tetraéder éleinek $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektora a csúcsokba mutató helyvektorok különbsége:

$$\overrightarrow{AB} = (0,2,2)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (-2,0,2)\,, \quad \overrightarrow{AD} = (-2,2,0)\,.$$

Számítsuk ki az ABC és ABD lapok normálvektorának koordinátáit!

$$\boldsymbol{n}_{ABC} = \frac{\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)\,,$$

$$\boldsymbol{n}_{ABD} = \frac{\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\,.$$

E két normálvektor skaláris szorzata $1/3$, ami éppen egyenlő a két lap által bezárt φ szög koszinuszával:

$$\cos\varphi = \frac{1}{3}\,, \quad \text{ebből} \quad \varphi = \arccos\frac{1}{3} = 70{,}5^\circ\,.$$

M16. *a)* Alkalmazzuk a kétszeres szög koszinuszára vonatkozó összefüggést $x/2$ argumentumra!

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 1 - 2\sin^2(x/2)\,.$$

Ebből kifejezhetjük $\sin(x/2)$-t, ügyelve a négyzetgyökvonásnál mindkét gyökre:

$$\sin(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,.$$

b) Az *a)* esethez hasonlóan járunk el, de most $\cos(x/2)$-re rendezünk:

$$\cos(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,.$$

c) A szögek összegére vonatkozó addíciós tételt használjuk:

$$\sin(3x) = \sin(x+2x) = \sin x\cos(2x) + \cos x\sin(2x)\,.$$

Felhasználva a kétszeres szögek szögfüggvényeire érvényes formulákat:

$$\sin(3x) = \sin x\cos^2 x - \sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x\,,$$

végül rendezve:

$$\sin(3x) = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x\,.$$

d) A *c)* esethez hasonlóan:

$$\cos(3x) = \cos(x+2x) = \cos x\cos(2x) - \sin x\sin(2x)\,.$$

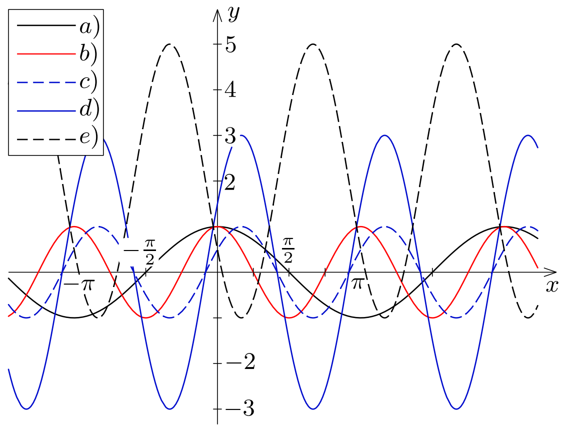
Felhasználva a kétszeres szögek formuláit:

$$\cos(3x) = \cos^3 x - \cos x\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x\,,$$

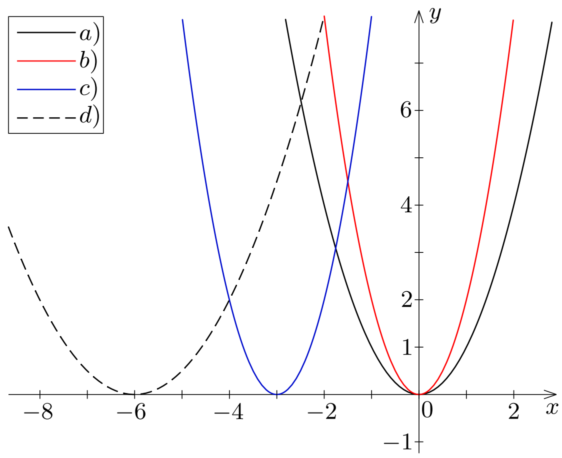
ami a következőre egyszerűsödik:

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\,.$$

M17. A függvénytranszformációk általános szabályait kell alkalmaznunk. Tetszőleges $f(x)$ függvény esetén $f(\lambda x)$ x tengely menti $1/\lambda$-szoros összenyomással, $\lambda f(x)$ y tengely irányú nyújtással, $f(x+a)$ *negatív* x tengely irányú eltolással, $f(x)+b$ pedig a *pozitív* y tengely irányú eltolással kapható meg. Ezeket alkalmazva kaphatjuk az alábbi grafikonokat.



M18. A függvénytranszformációk szabályait alkalmazva kapjuk az alábbi *ábrát.*



M19. *a)* A számlálóban bontsuk fel a zárójelet!

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\,\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)\,.$$

A jobb oldalon álló első tag független Δx-től, a második pedig nullához tart, így a határérték $2x$.

b) Használjuk a szinuszfüggvényre vonatkozó addíciós tételt!

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x + \sin\Delta x\cos x - \sin x}{\Delta x}\,.$$

$\Delta x\to 0$ esetén $\cos\Delta x\to 1$, valamint $\sin\Delta x/\Delta x\to 1$, így az eredmény $\cos x$.