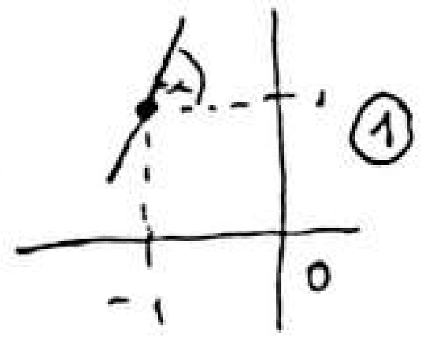
ANALÍZIS(2) VIZSGADOLGOZAT I. rész 2003. június. 19.
Műszaki Informatika szak A kurzus Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

DE 1. feladat (13 pont)

$$y' = 2x^2 + x + y^2$$

(2) a) Rajzolja fel a $P(-1,1)$ ponthoz tartozó vonalelemet!
(5) b) Van-e lokális maximuma vagy minimuma az origón áthaladó megoldásgörbének az origóban? (Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet, de feltételezheti, hogy van ilyen megoldás!)
(6) c) Írja fel az origón áthaladó megoldás $x_0 = 0$ bázispontú harmadrendű Taylor polinomját!

a, $y'(-1) = 2-1+1 = 2$ (1) $\quad tg\alpha = 2$



(1)

b, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (1) lehet lok. szé.

$y'' = 4x + 1 + 2yy'$ (1), $y''(0) = 0 + 1 + 0 = 1 > 0 \Rightarrow$ lok. min. van (2)
(1)

(2) $y''' = 4 + 2y'y' + 2yy''$; $y'''(0) = 4 + 0 + 2\cdot 0\cdot 1 = 4$ (1)

$T_3(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 = \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3$
(2) (1)

fn 2. feladat (15 pont)

$$f_n(x) = \frac{2n^4x^2 + 1}{n^4x^2 + 3n - 1}$$

(3) a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$
(3) b) Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a $(-\infty,\infty)$ intevallumon?
(9) c) $\| f_n - f \|_{[2,\infty)} = ?$
Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a $[2,\infty)$ intevallumon?

a, $f_n(0) = \frac{1}{3n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(0)$ (1)

Ha $x \neq 0$ $\quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x^2 + \frac{1}{n^4}}{x^2 + \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4}} = 2$ (2)

Tehát $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

b, $(-\infty,\infty)$-en nem egyenletes a konv., mert bár f_n-ek folytonosak, f nem az. (3)

c.) $[2,\infty)$:

$\| f_n - f \|_{[2,\infty)} = \sup_{x\in[2,\infty)} |f_n(x) - f(x)|$ (1) $= \sup_{x\in[2,\infty)} \left| \frac{2n^4x^2+1}{n^4x^2+3n-1} - 2 \right|$ (1) $=$

$= \sup_{x\in[2,\infty)} \frac{\cancel{2n^4x^2}+1-\cancel{2n^4x^2}-6n+2}{n^4x^2+3n-1}$ (1) $= \sup_{x\in[2,\infty)} \left| \frac{3-6n}{n^4x^2+3n-1} \right| =$

$= \sup_{x\in[2,\infty)} \frac{6n-3}{n^4x^2+3n-1}$ (1) $= \frac{6n-3}{4n^4+3n-1}$ (2)

$0 \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{[2,\infty)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n^3} - \frac{3}{n^4}}{4 + \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4}} = 0$ (1)
(2)

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[{[2,\infty)\text{-en}}]{\text{NORMÁBAN}} f \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ $[2,\infty)$-en

+

3. feladat (12 pont)

Határozza meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\,x^k}{3^{k+1}}$$

sor összegfüggvényét és konvergencia sugarát!

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{3^{k+1}} = ?$$

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{3^{k+1}}$$

$$\int_0^x f(x)\,dx \;1\; = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{3^{k+1}}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(k+1)x^k}{3^{k+1}}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{k+1}}{3^{k+1}} \frac{x^{k+1}}{\cancel{k+1}}\Bigg|_0^x = \;2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{k+1} = \underbrace{\frac{\frac{x}{3}\;1}{1-\frac{x}{3}}}_{2} = \frac{x}{3-x}, \quad ha \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \;1 \Rightarrow |x| < 3 \;1$$

Tehát $R = 3$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(x)\,dx \;1\; = \left(\frac{x}{3-x}\right)' = \frac{3-x-x(-1)}{(3-x)^2} \;1\; = \frac{3}{(3-x)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} = f(1) \;1\; = \frac{3}{4} \;1$$

4 a) Írja le az iránymenti derivált definícióját és a kiszámítására tanult tételt!

8 b) Mi jellemzi a gradiens nagyságát illetve irányát?
Állítását indokolja meg!

8 c) $f(x,y,z) = z + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\quad P(-1,1,0)$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = ?, \text{ ha } \underline{e} \parallel (2,-1,1)$$

a) 2

(D) $\underline{a} \in \operatorname{int} D_f \subset \mathbb{R}^m$, $\quad |\underline{e}| = 1$

$$\boxed{\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \lim_{t\to+0} \frac{f(\underline{a}+t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}}$$

-1

(T) 2 Ha f totálisan deriválható $K_{\underline{a}}$-ban, akkor $\underline{a}$-ban $\forall$ irányban $\exists$ az iránymenti derivált, és

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a})\cdot\underline{e} \qquad (|\underline{e}| = 1)$$

b)

A gradiensvektor tulajdonságai

(Két és háromváltozós esetre, itt geometriai tartalom is van.)

(T) Ha $\exists$ grad $f(\underline{a})$, akkor $\exists \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}}$ $\forall\underline{e}$-re és

a *maximális iránymenti derivált* iránya: grad $f(\underline{a})$, 1 értéke: $|\operatorname{grad} f(\underline{a})|$ 1

(B) Már láttuk, hogy $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a})\cdot\underline{e}$. Ebből

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|\,|\underline{e}|\cdot\cos\varphi \;1\; = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|\cdot\cos\varphi \;1$$

Így $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}}$ maximális, ha $\cos\varphi = 1$ 1 $\Longrightarrow$ $\varphi = 0$ 1, tehát $\underline{e} \parallel \operatorname{grad} f(\underline{a})$ 1, pontosabban

$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(\underline{a})}{|\operatorname{grad} f(\underline{a})|} \quad \text{és} \quad \max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|.$$

Tehát a grad vektor irányában elmozdulva nő leggyorsabban a függvényérték, és $-$grad irányában csökken a leggyorsabban. 1

c)

$$f'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\Bigg|_P = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2} \;1 \quad ; \quad \underline{e}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \;1$$

$$f'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}\Bigg|_P = -\frac{1}{2} \;1$$

$$f'_z = 1 \;1$$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)}_{\operatorname{grad} f(P)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{\underline{e}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \;2$$

$\exists$ grad $f(P)$ mert a parciálisok folytonosak P-ban. 2

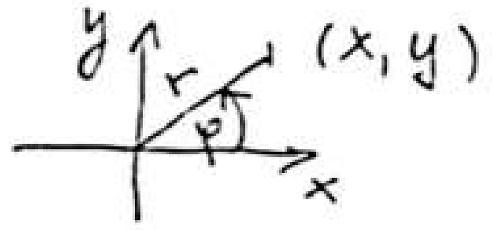
$n\int$ 5. feladat (15 pont)*

4 a) Ismertesse a polárkoordinátás transzformációt és vezesse le a Jacobi determinánsának az értékét!

11 b)

$$\iint_T 3xy^2\,dT = ?, \qquad T:\ 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge \sqrt{3}x$$

a) $\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$ (1)

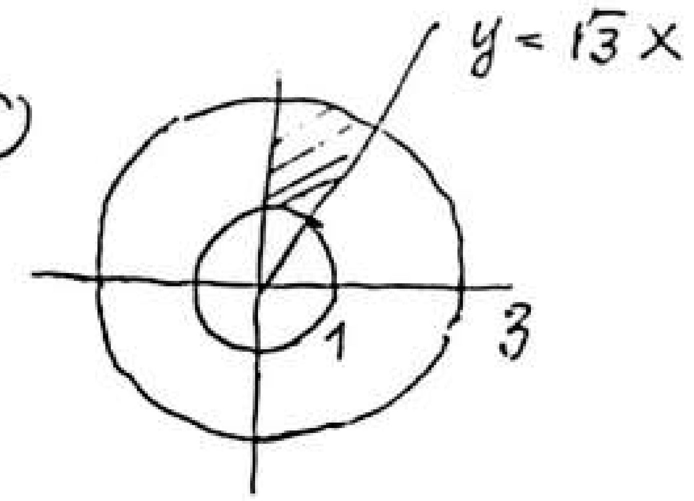


$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r' & x_\varphi' \\ y_r' & y_\varphi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overbrace{\cos\varphi \quad -r\sin\varphi}^{(1)} \\ \underbrace{\sin\varphi \quad r\cos\varphi}_{(1)} \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \quad (1)$$

b) $\iint_T 3xy^2\,dT =$

$1 \le r \le 3$ (1)

$\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (1) (1)



$$= \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3r\cos\varphi\, r^2\sin^2\varphi \cdot r\, d\varphi\, dr =$$
(1) (1)

$$= 3\int_1^3 r^4\,dr \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi = 3\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3 \cdot \left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
(2) (2)

$$= \cancel{3} \cdot \frac{3^5-1}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{\cancel{3}} = \frac{242}{5}\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \approx 16{,}94$$
(1) (1)

$:\sum$ 6. feladat (13 pont)*

Írja fel az

$$f(z) = \frac{1}{z\,(z+2j)^3}$$

függvény $z_0 = -2j$ bázispontú Laurent sorfejtéseit az összes lehetséges tartományon! Adja meg a konvergencia gyűrűket!

Szingularitások: 0 és $-2j$ (1)

$$f(z) = \frac{1}{(z+2j)^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{z}}_{:=g(z)}$$

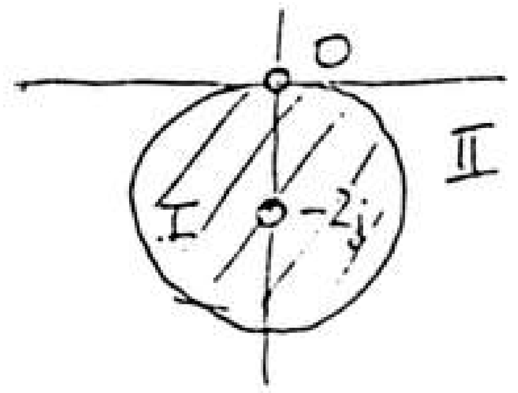
$$g(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{-2j+(z+2j)} = -\frac{1}{2j}\,\frac{1}{1-\frac{z+2j}{2j}} = -\frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+2j}{2j}\right)^k$$
(1) (1) (2)

$\left|\frac{z+2j}{2j}\right| < 1 \Rightarrow |z+2j| < 2$ (1) (1) Ez az I. tart. (1)

I) $f(z) = \frac{1}{(z+2j)^3} \cdot \left(-\frac{1}{2j}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+2j)^k}{(2j)^k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+2j)^{k-3}}{(2j)^{k+1}}$

KT: $0 < |z+2j| < 2$

A másik tartományon:



$$g(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{-2j+(z+2j)} = \frac{1}{z+2j}\,\frac{1}{1-\frac{2j}{z+2j}} = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{z+2j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2j}{z+2j}\right)^k \quad (1); \quad \left|\frac{2j}{z+2j}\right| < 1 \quad (1) \Rightarrow 2 < |z+2j| \quad (1)$$

Ez a II. tart. (1)

II) $f(z) = \frac{1}{(z+2j)^3} \cdot \frac{1}{z+2j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j)^k}{(z+2j)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j)^k}{(z+2j)^{k+4}}$

KT: $2 < |z+2j|$ II. tart. (1)

I és II tartományt rajzon is elfogadjuk, akkor (2)

. feladat (12 pont)*

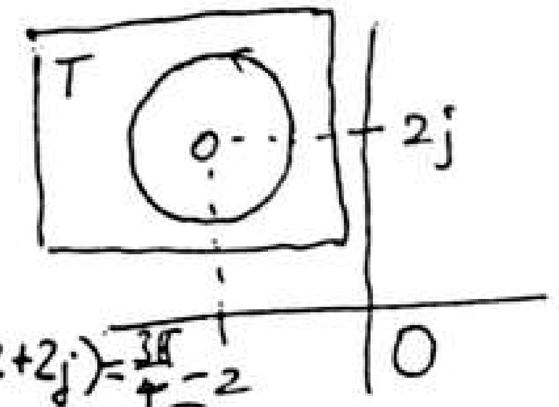
a) $I = \oint\limits_{|z-2j+2|=1} \frac{\ln z}{z-2j+2}\, dz$, $\quad \mathrm{Re}\, I = ?$, $\quad \mathrm{Im}\, I = ?$

b) $\left| \oint\limits_{|z-2j+2|=1} \frac{e^z}{z-2j+2}\, dz \right| = ?$

regulàris T-n (1)

$$\oint \frac{\ln z}{z-(-2+2j)}\, dz = 2\pi j \ln(-2+2j) = \quad (1)$$

$|z-(-2+2j)|=1$



$|-2+2j| = 2\sqrt{2}$ (1) $\quad \arg(-2+2j) = \frac{3\pi}{4}$ (1)

$$2\pi j\left(\ln 2\sqrt{2} + j\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi^2}{2} + j\, 2\pi \ln 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$\mathrm{Re}\, I = -\frac{3\pi^2}{2}$ (1) $\qquad \mathrm{Im}\, I = 2\pi \ln 2\sqrt{2}$ (1)

$$\left|\oint\limits_{|z-(-2+2j)|=1} \frac{e^z}{z-(-2+2j)}\, dz\right| = \left|2\pi j\, e^{-2+2j}\right| = |2\pi j|\cdot|e^{-2}|\cdot\underbrace{|e^{2j}|}_{=1\ (1)} = \frac{2\pi}{e^2}$$

$e^z = e^x e^{iy}$ (1)

$$\oint\limits_{|z-z_0|} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi j\, f(z_0) \quad (1).$$

reg (1)

DE 8. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' - 7y' + 6y = -6x$$

$y'' - 7y' + 6y = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ (1)

$(\lambda-6)(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = 6 \quad \lambda_2 = 1$ (1)

$y_{HÁ} = C_1 e^{6x} + C_2 e^x, \ (C_1, C_2 \in R)$ (2)

6	$y_{ip} = Ax + B$ (1)
(-7)	$y'_{ip} = A$
1.	$y''_{ip} = 0$

$6Ax + (6B - 7A) = -6x$ (1)

$6A = -6 \qquad 6B - 7A = 0$ (1)

$A = -1$ (1) $\qquad 6B = -7$

$B = -\frac{7}{6}$

$y_{ip} = -x - \frac{7}{6}$ (1)

(1)

$$y_{iá} = y_{HÁ} + y_{ip} = C_1 e^{6x} + C_2 e^x - x - \frac{7}{6} \quad (C_1, C_2 \in R)$$

nf 9. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2+y^2}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Hol folytonos az f függvény?

b) $f'_x(x,y) = ?$; $\ f'_y(x,y) = ?$, $\quad$ ha $(x,y) \neq (0,0)$

Hol differenciálható az f függvény?

a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)$ (1) $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x^2}{2x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{3}$ (1) $= \frac{1}{3} \neq 0$ Az origóban nem folytonos. (1) Máshol folytonos, mert folytonos függvények összetétele és a nevező nem zérus. (1)

b) $f'_x = \frac{y^2(2x^2+y^2) - 4x(xy^2+y^2)}{(2x^2+y^2)^2}$ (1)

$f'_y = \frac{(2xy+2y)(2x^2+y^2) - 2y(xy^2+y^2)}{(2x^2+y^2)^2}$ (1)

ha $(x,y) \neq (0,0)$

Az origóban nem diff.-ható mert ott nem is folytonos. (2)

Máshol diff.-ható, mert a parciálisok folytonosak. (2)