1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra 1. ZH. 2021-11-11 **Neptun:** ________ **Név:** ____________________

*A dolgozat feladatainak **eredményeit** mind erre az oldalra kell írni, a **mellékszámításokot** a hátoldalra, ez elvben elegendő, de ha esetleg nem, a másik lap is beadandó, melynek jobb felső sarkára írja fel a nevét, Neptun-kódját! **Eredmény mellékszámítás nélkül** nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. Válaszoljon az alábbi kérdésekre (mindegyik 0 vagy 1 pont)! *(4 pont)*

a) Az $\mathbb{F}^6$ tér két 4-dimenziós alterének metszete legalább hány dimenziós? Karikázzuk be a helyes választ!

0 1 2 3 4 5 6

b) Tekintsük az n-dimenziós $\mathcal{V}$ teret, és az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformációt. Az L valamely λ_i sajátértékéhez tartozó sajátalterét jelölje $\mathcal{V}_i$. Az alábbiak közül melyik *szükséges és elégséges* feltétele annak, hogy az L leképezés diagonalizálható legyen? (mindegyik négyzetbe H vagy I írandó)

1. $\mathcal{V}$ minden vektora előáll az L sajátvektorainak összegeként. ☐
2. $\sum_i \dim(\mathcal{V}_i) = n$, azaz a sajátalterek dimenzióinak összege kiadja a tér dimenzióját. ☐
3. A sajátértékek páronként különbözők. ☐

c) Mit tudunk az alábbi négyzetes mátrixok sajátértékeiről:

Önadjungált mátrix minden sajátértéke...

Unitér mátrix minden sajátértéke...

Nilpotens mátrix minden sajátértéke...

d) Melyek igazak (I), ill. hamisak (H) az alábbi állítások közül?

1. Ha $\mathbf{A}$ valós mátrix, akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit. ☐
2. Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha pontosan egy olyan pozitív szemidefinit $\mathbf{B}$ mátrix létezik, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$. ☐
3. Ha egy mátrix minden eleme pozitív, akkor pozitív szemidefinit. ☐

2. *(3 pont)* Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (2, 2, 0, 0)$ vektornak a $\operatorname{span}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ térre eső merőleges vetületét!

3. *(4 pont)* Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix LU-felbontását, majd abból a Cholesky-felbontását!

4. *(5 pont)* Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (redukált) QR-felbontását és (akár ezt felhasználva) a pszeudoinverzét!

5. *(4 pont)* Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixnak $(25, (4, 3))$ és $(0, (-3, 4))$ sajátpárjai. Ezt használva írjuk fel $\mathbf{A}$ ortogonális diagonalizálhatóságához tartozó sajátfelbontását és ebből határozzuk meg azt az egyetlen pozitív szemidefinit mátrixot, melynek négyzete $\mathbf{A}$.