Házi feladat

<u>1. feladat:</u> Határozza meg a mozgásegyenletek Laplace transzformáltját!

<u>Laplace-transzformálási szabályok:</u>

$$L\{f'\} = s \cdot L\{f\} - f(0)$$

$$L\{\dot{\Theta}(t)\} = s \cdot \Theta(s) - \Theta(0)$$

$$L\{\ddot{\Theta}(t)\} = s \cdot \dot{\Theta}(s) - \dot{\Theta}(0) = s \cdot \left[s \cdot \Theta(s) - \Theta(0)\right] - \dot{\Theta}(0) = s^2 \cdot \Theta(s) - s \cdot \Theta(0) - \dot{\Theta}(0)$$

$$L\{\dddot{\Theta}(t)\} = s \cdot \ddot{\Theta}(s) - \ddot{\Theta}(0) = s \cdot \left[s^2 \cdot \Theta(s) - s \cdot \Theta(0) - \dot{\Theta}(0)\right] - \ddot{\Theta}(0)$$

$$= s^3 \cdot \Theta(s) - s^2 \cdot \Theta(0) - s \cdot \dot{\Theta}(0) - \ddot{\Theta}(0)$$

$$L\{f(t-\alpha) \cdot \varepsilon(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s} \cdot F(s)$$

<u>11. egyenlet:</u> $\frac{BJ}{k} \cdot \dddot{\Theta}(t) + \ddot{\Theta}(t) + B \cdot \dot{\Theta}(t) = M_x(t) - M_0(t)$

Laplace-transzformálás:

$$\frac{BJ}{k} \cdot \left[s^3 \cdot \Theta(s) - s^2 \cdot \Theta(0) - s \cdot \dot{\Theta}(0) - \ddot{\Theta}(0)\right]$$
$$+ \left[s^2 \cdot \Theta(s) - s \cdot \Theta(0) - \dot{\Theta}(0)\right]$$
$$+ B \cdot \left[s \cdot \Theta(s) - \Theta(0)\right] \qquad = M_x(s) - M_0(s)$$

$$\left(\frac{BJ}{k} \cdot s^3 + s^2 + B \cdot s\right) \cdot \Theta(s) - \left(\frac{BJ}{k} \cdot s^2 + s + B\right) \cdot \Theta(0) - \left(\frac{BJ}{k} \cdot s + 1\right) \cdot \dot{\Theta}(0) - \frac{BJ}{k} \cdot \ddot{\Theta}(0) =$$
$$= M_x(s) - M_0(s)$$

$$s \cdot \left(\frac{BJ}{k} \cdot s^2 + s + B\right) \cdot \Theta(s) - \left(\frac{BJ}{k} \cdot s^2 + s + B\right) \cdot \Theta(0) - \left(\frac{BJ}{k} \cdot s + 1\right) \cdot \dot{\Theta}(0) - \frac{BJ}{k} \cdot \ddot{\Theta}(0) =$$
$$= M_x(s) - M_0(s)$$

<u>Kezdeti feltételek:</u>

$M_0(0) = 0 \rightarrow \dot{M}_0 = 0$ → $s \cdot \left(\frac{BJ}{k} \cdot s^2 + s + B\right) \cdot \Theta(s) = M_x(s) - M_0(s)$

$\Theta(0) = 0$

<u>12. egyenlet:</u> $\dot{M}_0(t) + \frac{M_0(t)}{\tau} = \beta \cdot \left[\dot{\Theta}(t - T_d) + \frac{\Theta(t - T_d)}{\eta \cdot \tau}\right]$

Laplace-transzformálás:

$$s \cdot M_0(s) - M_0(0) + \frac{M_0(s)}{\tau} = \beta \cdot \left[e^{-T_d s} \cdot \dot{\Theta}(s) + e^{-T_d s} \cdot \frac{\Theta(s)}{\eta \cdot \tau} \right]$$

$$\left(s + \frac{1}{\tau} \right) \cdot M_0(s) - M_0(0) = \beta \cdot e^{-T_d s} \cdot \left[\dot{\Theta}(s) + \frac{\Theta(s)}{\eta \cdot \tau} \right]$$

$$\left(s + \frac{1}{\tau} \right) \cdot M_0(s) - M_0(0) = \beta \cdot e^{-T_d s} \cdot \left\{ s \cdot \Theta(s) - \Theta(0) + \frac{\Theta(s)}{\eta \cdot \tau} \right\}$$

$$\left(s + \frac{1}{\tau} \right) \cdot M_0(s) - M_0(0) = \beta \cdot e^{-T_d s} \cdot \left[\left(s + \frac{1}{\eta \cdot \tau} \right) \cdot \Theta(s) - \Theta(0) \right]$$

$$\left(s + \frac{1}{\tau} \right) \cdot M_0(s) - M_0(0) = \beta \cdot e^{-T_d s} \cdot \left(s + \frac{1}{\eta \cdot \tau} \right) \cdot \Theta(s) - \beta \cdot e^{-T_d s} \cdot \Theta(0)$$

Kezdeti feltételek:

$M_0(0) = 0 \rightarrow \dot{\mathrm{M}}_0 = 0$

$\Theta(0) = 0$

$\rightarrow \quad \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \cdot M_0(s) = \beta \cdot e^{-T_d s} \cdot \left(s + \frac{1}{\eta \cdot \tau} \right) \cdot \Theta(s)$

Megoldás:

A mozgásegyenletek Laplace-transzformáltjai:

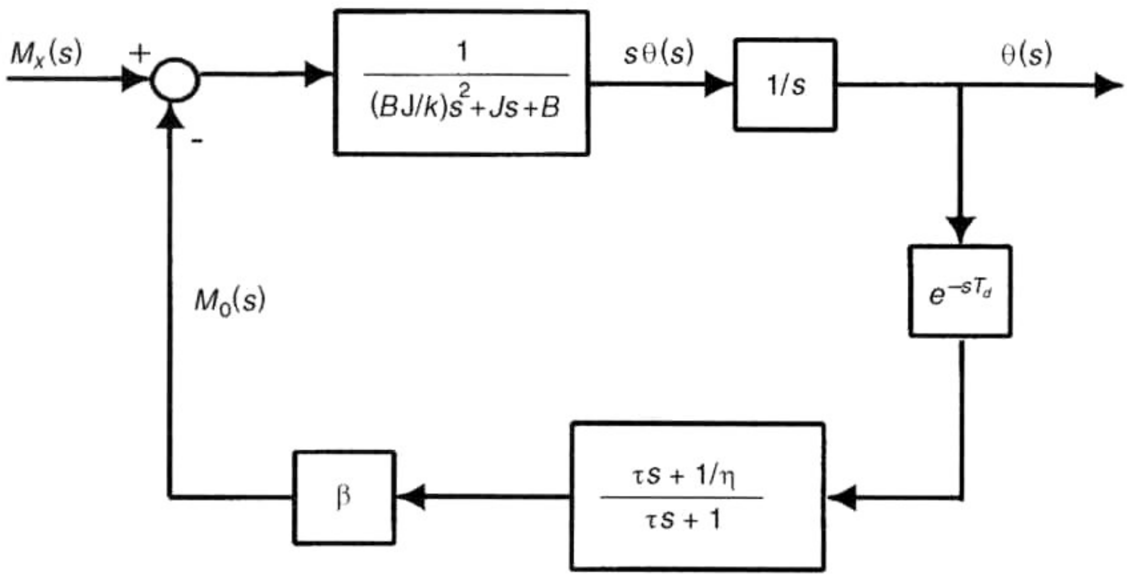
(11) $\quad s \cdot \left(\frac{BJ}{k} \cdot s^2 + s + B \right) \cdot \Theta(s) = M_x(s) - M_0(s)$

(12) $\quad \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \cdot M_0(s) = \beta \cdot e^{-T_d s} \cdot \left(s + \frac{1}{\eta \cdot \tau} \right) \cdot \Theta(s)$

2. feladat: Hozza létre a rendszer hatásvázlatát!

(11) $\quad \Theta(s) = \dfrac{M_x(s) - M_0(s)}{s \cdot \left(\frac{BJ}{k} \cdot s^2 + s + B \right)} = \dfrac{M_x(s)}{s \cdot \left(\frac{BJ}{k} \cdot s^2 + s + B \right)} - \dfrac{M_0(s)}{s \cdot \left(\frac{BJ}{k} \cdot s^2 + s + B \right)}$

(12) $\quad \Theta(s) = \dfrac{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)}{\left(s + \frac{1}{\eta \cdot \tau} \right)} \cdot \dfrac{M_0(s)}{\beta \cdot e^{-T_d s}} \quad \rightarrow \quad M_0(s) = \Theta(s) \cdot \beta \cdot e^{-T_d s} \cdot \dfrac{\left(s + \frac{1}{\eta \cdot \tau} \right)}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)}$



forrás: https://imsc.uni-graz.at/batzel/ss02_seminar/Lecture_handouts/Muscle_Control_Model.pdf

megjegyzés: 1/s = integrátor
e^{-sTd} = késleltetés

3. feladat: Határozza meg a zárt rendszer átviteli függvényét, és jellemezze a stabilitás szempontjából (a holtidőt 3-ad rendű Padé approximációval közelítse)!

Padé-közelítés: http://www.repulestudomany.hu/kulonszamok/2007_cikkek/szabolcsi_robert.pdf

$$e^{-sTd} \cong Pd(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1) \cdot k \cdot c_k \cdot T_d^k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^{n} k \cdot c_k \cdot T_d^k \cdot s^k}$$

n	1	1	2	3	4	n
k	0	1	2	3	4	k = n
c_k	1	1/2	1/12	1/120	1/1680	$\frac{(2n-k)!\cdot n!}{2n!\cdot k!\cdot(n-k)!}$

Harmadrendű Padé-közelítés:

$$P_d(s) = \frac{\sum_{k=0}^{3} (-1) \cdot k \cdot c_k \cdot T_d^k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^{3} k \cdot c_k \cdot T_d^k \cdot s^k}$$

$$P_d(s) = \frac{(1) \cdot T_d^0 \cdot s^0 + (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot T_d^1 \cdot s^1 + (1) \cdot \frac{1}{12} \cdot T_d^2 \cdot s^2 + (-1) \cdot \frac{1}{120} \cdot T_d^3 \cdot s^3}{1 \cdot T_d^0 \cdot s^0 + \frac{1}{2} \cdot T_d^1 \cdot s^1 + \frac{1}{12} \cdot T_d^2 \cdot s^2 + \frac{1}{120} \cdot T_d^3 \cdot s^3}$$

$$P_d(s) = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot T_d \cdot s + \frac{1}{12} \cdot T_d^2 \cdot s^2 - \frac{1}{120} \cdot T_d^3 \cdot s^3}{1 + \frac{1}{2} \cdot T_d \cdot s + \frac{1}{12} \cdot T_d^2 \cdot s^2 + \frac{1}{120} \cdot T_d^3 \cdot s^3}$$

behelyettesítés: $T_d = 0{,}05 = 1/20$

$$P_d(s) = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \cdot s + \frac{1}{12} \cdot 0{,}05^2 \cdot s^2 - \frac{1}{120} \cdot 0{,}05^3 \cdot s^3}{1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \cdot s + \frac{1}{12} \cdot 0{,}05^2 \cdot s^2 + \frac{1}{120} \cdot 0{,}05^3 \cdot s^3}$$

$$P_d(s) = \frac{1 - \frac{1}{40} \cdot s + \frac{1}{4800} \cdot \cdot s^2 - \frac{1}{960000} \cdot s^3}{1 + \cdot \frac{1}{40} \cdot s + \frac{1}{4800} \cdot \cdot s^2 + \cdot \frac{1}{960000} \cdot s^{33}}$$

W = ? → Matlab:

```
%paraméterek:
B = 5;
J = 0.25;
k = 70;
Td = 0.05;
tau = 0.01;
nu = 10;
beta = 100;     %50, 100, 150

W1 = tf(1,[B*J/k, J, B]);     %1/(BJ/k)*s^2 + Js + B
W2 = tf(1,[1, 0]);            %1/s
%W3 = beta*tf([1  1/nu/tau],[1  1/tau], 'InputDelay', Td);
W3 = tf([-1/960000, 1/4800, 1/40, 1], [1/960000, 1/4800, 1/40, 1]); %3.fokú Pádé-közelítés
W12 = W1*W2;
W = feedback(W12,W3);


W =

                       1.042e-06 s^3 + 0.0002083 s^2 + 0.025 s + 1
  ------------------------------------------------------------------------------------
  1.86e-08 s^6 + 3.981e-06 s^5 + 0.0005037 s^4 + 0.02515 s^3 + 0.3752 s^2 + 5.025 s + 1
```

Stabilitás? → Matlab:

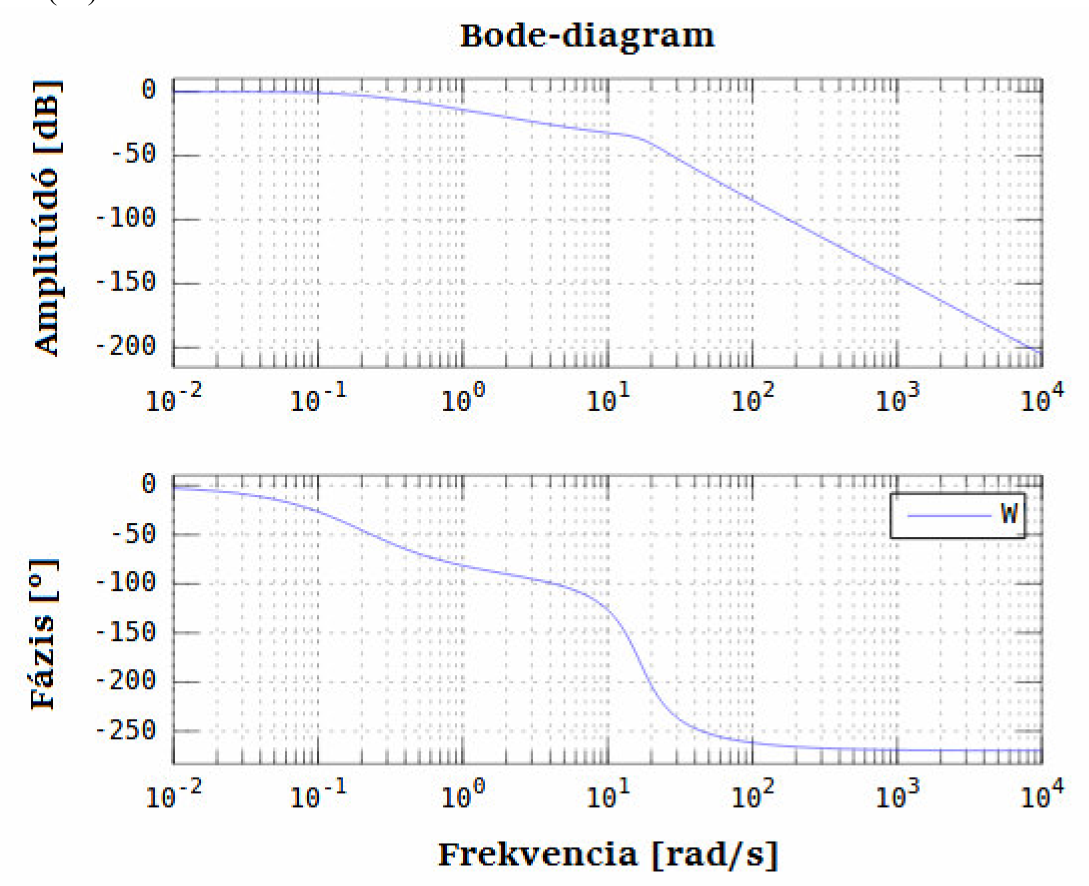
```
isstable(W)
ans =

   1
```

Tehát a rendszer stabilis.

4. feladat: Vizsgálja meg a stabilitás kérdését frekvenciatartományban (Nyquist-diagram, Bode-diagramok)!

Matlab (https://octave-online.net)
>> bode(W)



Bode-stabilitási kritériumok: http://www.mogi.bme.hu/TAMOP/iranyitaselmelet/ch05.html

- Ha -20 dB/dek-dal metszi a $\log\omega$ tengelyt, akkor a zárt rendszer stabilis.
- Ha -40 dB/dek-dal metszi a $\log\omega$ tengelyt, akkor a vágási frekvencián érvényes fázisszög értéke dönt a zárt rendszer stabilitásáról. Ha $\varphi(\omega_c) > -180^\circ$, akkor a zárt rendszer stabilis, míg ha $\varphi(\omega_c) < -180^\circ$, akkor a zárt rendszer labilis.
- Ha -60 dB/dek-dal metszi a $\log\omega$ tengelyt, akkor a zárt rendszer labilis.

A zárt szabályozási körök stabilitásával kapcsolatban bevezetjük a φ_t fázistartalék fogalmát:

$\varphi_t = \pi - \varphi(\omega_c)$,

- Ha $\varphi_t > 0$, akkor a zárt rendszer stabilis.

- Ha $\varphi_t = 0$, határeset.

- Ha $\varphi_t < 0$, akkor a zárt rendszer labilis.

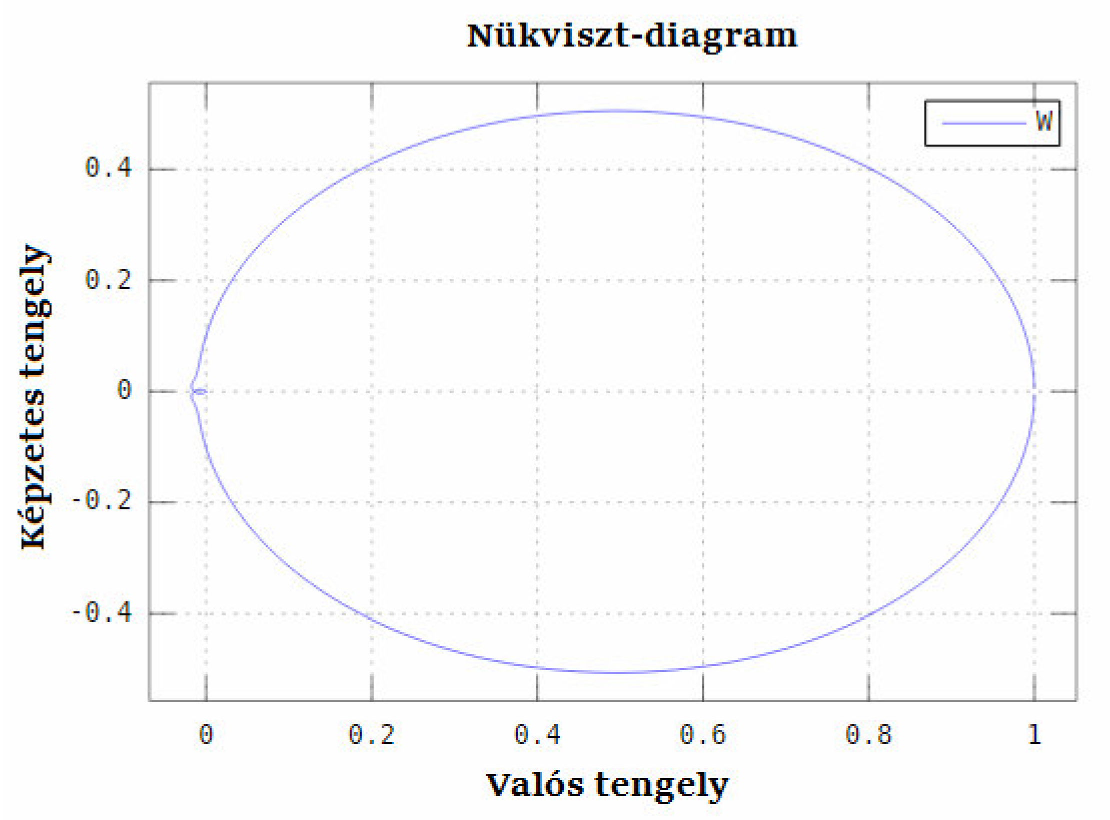
A zárt szabályozási körök stabilitásával kapcsolatban bevezetjük a κ_t erősítési tartalék fogalmát. Azt mutatja, hogy mennyivel tudjuk még növelni a statikus körerősítést, úgy, hogy épp a stabilitás határára kerüljön a rendszer. Erősítési tartalék és a stabilitás kapcsolata:

- Ha $\kappa_t < 1$, akkor a zárt rendszer stabilis.

- Ha $\kappa_t = 1$, határeset.

- Ha $\kappa_t > 1$, akkor a zárt rendszer labilis.

>> nyquist(W)



Nyquist kritérium: http://www.mogi.bme.hu/TAMOP/iranyitaselmelet/ch05.html

Ha a $G_H(i\omega)$ *(* $-\infty < \omega < \infty$ *) felnyitott hurok frekvencia függvénye a növekvő frekvenciák irányába haladva*

- nem veszi körül a -1 pontot, akkor a rendszer stabilis,
- átmegy a -1 ponton, akkor a rendszer a stabilitás határán van,
- körülveszi a -1 pontot, akkor a rendszer labilis.

Ha a $G_H(i\omega)$ frekvencia függvény a növekvő frekvenciák irányába haladva nem veszi körül a -1 pontot, akkor a zárt rendszer rendszer stabilis. Ha a $G_H(i\omega)$ frekvencia függvény épp átmegy a komplex számsík -1 pontján, akkor a G_H frekvencia függvénynek ω_0

körfrekvencián a zárt rendszerben csillapítatlan lengések keletkeznek. Ekkor a zárt rendszer a stabilitás határán van.

5. feladat: Vizsgálja meg a különböző értékekre (50; 100; 150) a rendszer minőségi jellemzőit: túllövés, szabályozási idő (a kimenet alapján)! Jellemezze a kapott eredményeket!

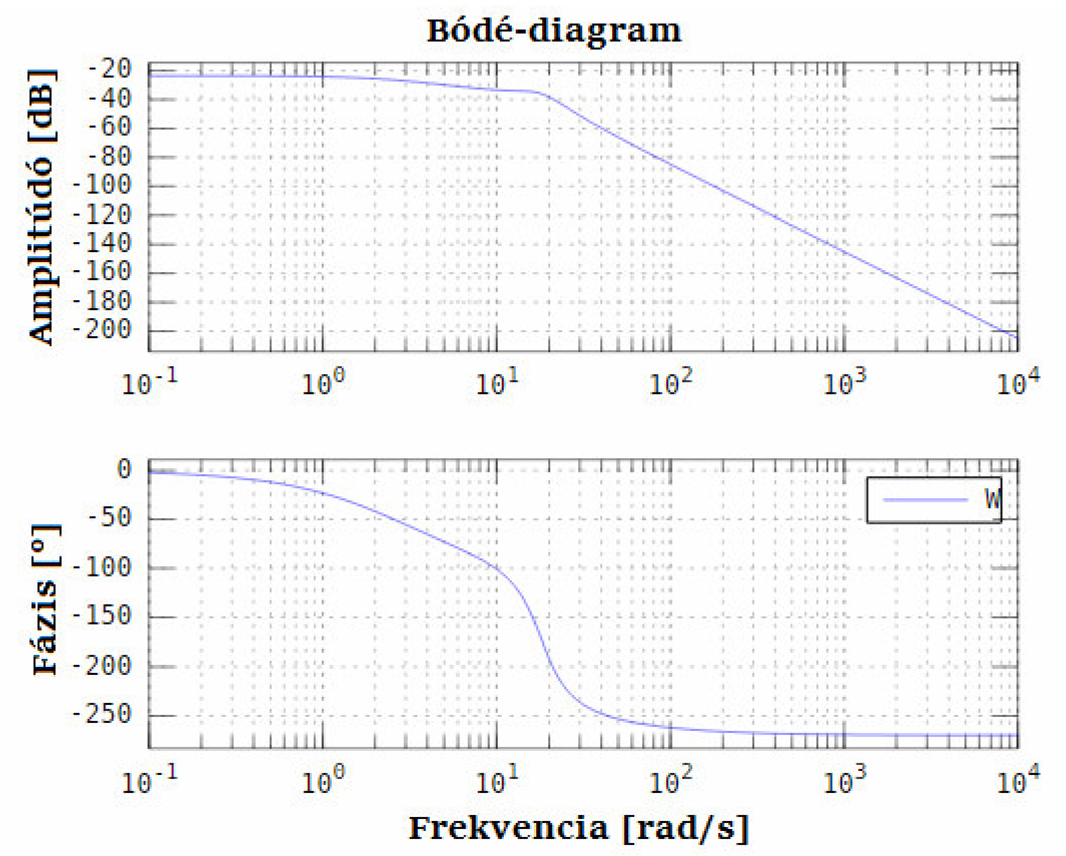
Hö? ☺ Mik ezek az értékek? Talán a béta?

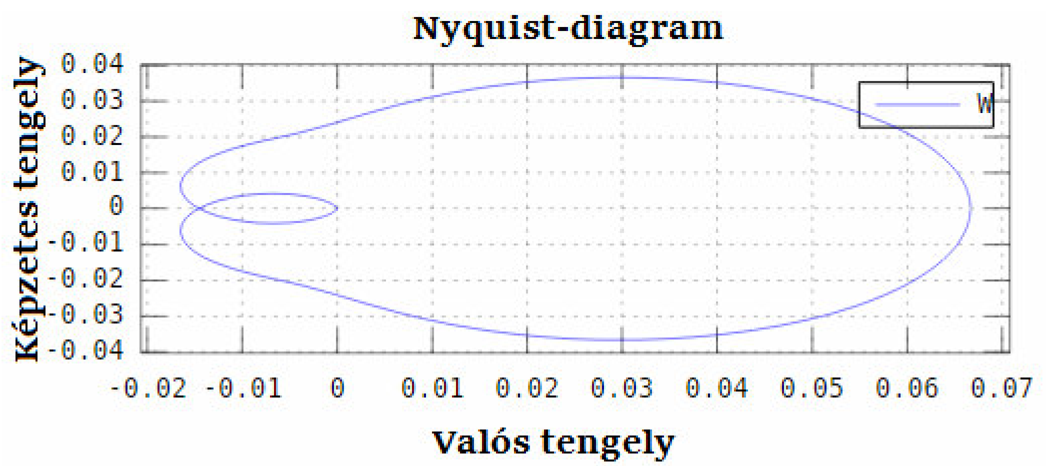
ß = 100	ß = 50	ß = 150
>> stepinfo(W) ans = felfutási idő: 10.8767 beállási idő: 19.4154 minimum beállás: 0.9035 maximum: 1.0000 túllövés: 0 alullövés: 0 csúcs: 1.0000 csúcs elérése [s]: 52.2043	>> stepinfo(W) ans = felfutási idő: 10.8767 beállási idő: 19.4154 minimum beállás: 0.9035 maximum: 1.0000 túllövés: 0 alullövés: 0 csúcs: 1.0000 csúcs elérése [s]: 52.2043	>> stepinfo(W) ans = felfutási idő: 10.8767 beállási idő: 19.4154 minimum beállás: 0.9035 maximum: 1.0000 túllövés: 0 alullövés: 0 csúcs: 1.0000 csúcs elérése [s]: 52.2043

Semmi különbség, független ß-tól! Ez azért gyanús. ☺

6. feladat: Mérje össze a 4. pontban kapott eredményeket azzal az esettel, ha a rendszer nem tartalmaz holtidőt (Td = 0)!

```
W1 = tf(1,[B*J/k, J, B]);   %1/(BJ/k)*s^2 + Js + B
W2 = tf(1,[1, 0]);
W12 = W1*W2;
W3 = beta*tf([1  1/nu/tau],[1  1/tau]);   %késleltetés nélkül
W = feedback(W12,W3);
```



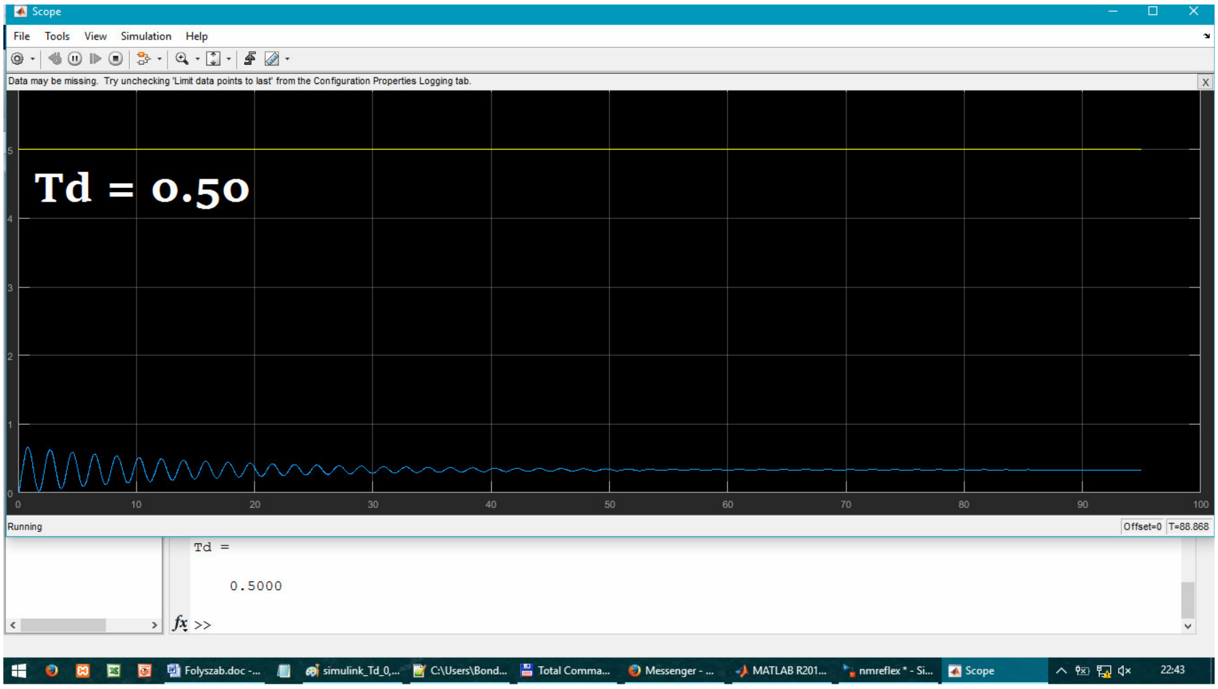


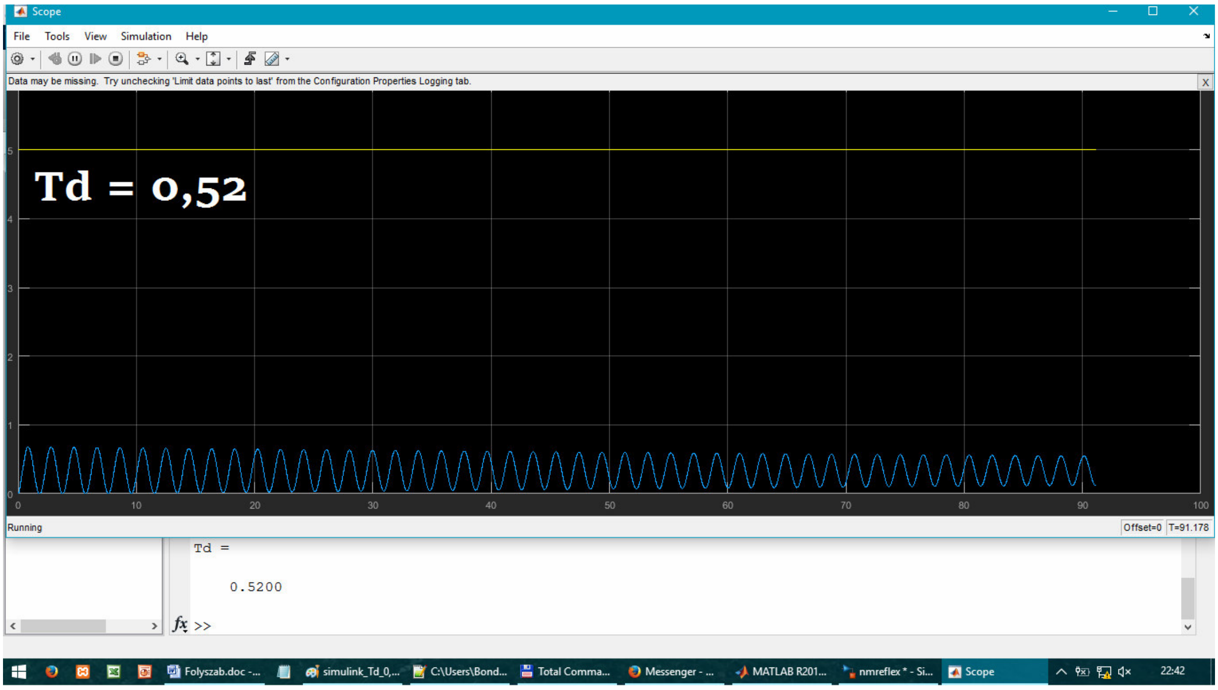
5. feladat eredményeivel összevetve:
ans =

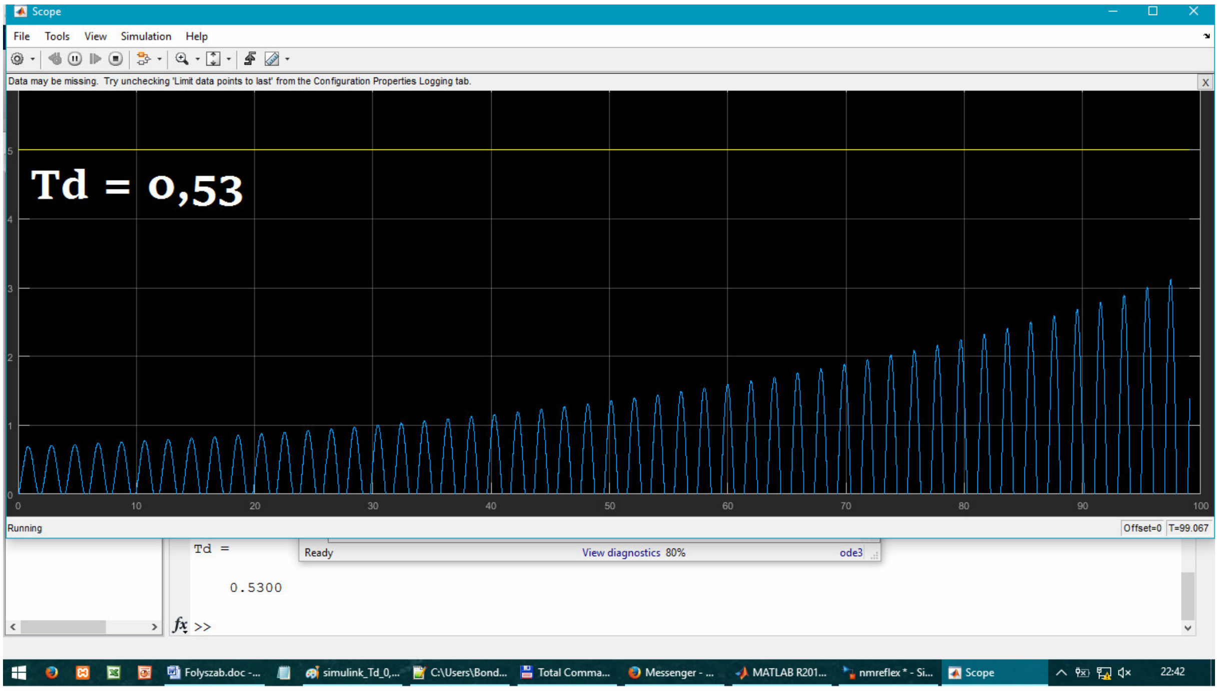
felfutási idő: 0.8207
beállási idő: 1.5553
minimum beállás: 0.0602
maximum: 0.0666
túllövés: 0
alullövés: 0
csúcs: 0.0666
csúcs elérése [s]: 2.7620

7. feladat: Határozza meg a küszöbértékeket, amelyre a rendszer még stabilis! Szimulálja a rendszer kimenetét SIMULINK-ben a kapott értékekre!

Td = 0,5s	Td = 0,52s	Td = 0,53s
RiseTime: 0.2417 SettlingTime: 61.9620 SettlingMin: 0.0045 SettlingMax: 0.1324 Overshoot: 98.6539 Undershoot: 0 Peak: 0.1324 PeakTime: 0.8132	RiseTime: 0.2422 SettlingTime: 726.7370 SettlingMin: -0.0030 SettlingMax: 0.1364 Overshoot: 104.5264 Undershoot: 4.4930 Peak: 0.1364 PeakTime: 0.8484	RiseTime: 0.2406 **SettlingTime: NaN** SettlingMin: -2.2541e+11 SettlingMax: 2.2084e+11 Overshoot: 3.3126e+14 Undershoot: 3.3811e+14 Peak: 2.2541e+11 PeakTime: 1.3541e+03







<u>8. feladat:</u> Adja meg a rendszer M_x bemenőjele és Θ kimenő jele alapján az állapotegyenlet-rendszerét! Adja meg az A,B,C,D állapotváltozókat!

A Matlab már előre meghatározta az állapotváltozós leírás normál alakjában az együttható-mátrixokat (nem, ezek nem állapotváltozók! Az állapotváltozók jelen esetben az x1, x2, x3, x4).

```
W =

  a =
            x1      x2      x3      x4
   x1      -14   -17.5    -525   210.9
   x2       16       0       0       0
   x3        0       1       0       0
   x4        0       0     224    -100

  b =
         u1
   x1     2
   x2     0
   x3     0
   x4     0

  c =
           x1     x2     x3     x4
   y1       0      0   1.75      0

  d =
         u1
   y1     0
```

```
(values computed with all internal delays set to zero)

Internal delays (seconds): 0.53
```

Jé, ez is kiszámolta a holtidős tag kritikus értékét.

```
%paraméterek:
B = 5;
J = 0.25;
k = 70;
Td = 0.50;
tau = 0.01;
eta = 10;
beta = 150;     %50, 100, 150

W1 = tf(1,[B*J/k, J, B]);   %1/(BJ/k)*s^2 + Js + B
W2 = tf(1,[1, 0]);           %1/s
W3 = beta*tf([1  1/nu/tau],[1  1/tau], 'InputDelay', Td);      %pontos késleltetéssel
%W3 = tf([-1/960000, 1/4800, 1/40, 1], [1/960000, 1/4800, 1/40, 1]); %3.fokú Pádé-közelítés
%W3 = beta*tf([1  1/nu/tau],[1  1/tau]);   %késleltetés nélkül
W12 = W1*W2;
W = feedback(W12,W3);
isstable(W)
bode(W)
nyquist(W)
stepinfo(W)
```