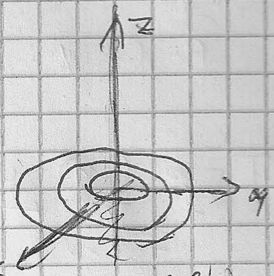
Ábrázolás:

$z = f(x,y) \Rightarrow$ felületet ad a 3D-ben.

1. szintalakzatokkal
2. síkmetszetekkel.



pl. $z = x^2 + y^2$

1. szintalakzatokkal: $x^2 + y^2 = c$.

az ÉT-n belül origó középpontú kör ($c \geq 0$)

az x, y síkon van a szintalakzat.

$c < 0$, $c = 1$ (1), $c = 2$ (4 sugarú), $c = 3$ (9 sugarú)

(a gradiens $\forall$ esetben a növekvő ~~függvényértékű~~ paraméterű szintalakzat felé mutat, és $\forall$ esetben merőleges a szintalakzatra)

(a leggyorsabb mozgásnak felé viszi a grad)

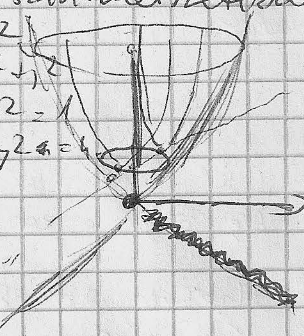
2. speciális síkmetszetekkel:

$z = x^2 + y^2$

$z = 0$: $0 = x^2 + y^2$

$z = 1$: $x^2 + y^2 = 1$

$z = 4$: $x^2 + y^2 = 4$



$x = 0$ $z = y^2$

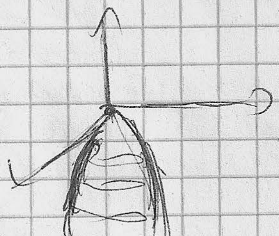
$x = \pm 1$ $z = y^2 + 1$

(mivel felveszi x-re parallel egyenest mely metszi a z-t, annak parabola)

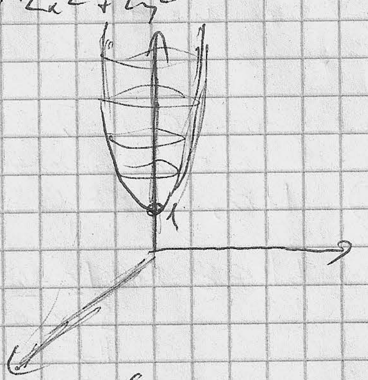
forgási paraboloid

(megforgatva a tengely körül adja a felületet)

pl. $z = -x^2 - y^2$

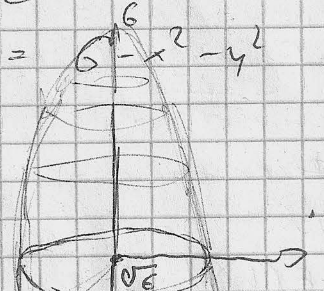


pl. $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$



$\sqrt{2}$ sugarú kör?

pl. $z = 6 - x^2 - y^2$



Térrész: $z \leq 6 - x^2 - y^2$

$z \geq 0$.

milyen körben metszi az x, y síkot

ekkor $z = 0 \Rightarrow 0 = 6 - x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 = (\sqrt{6})^2$

$\hookrightarrow$ $\sqrt{6}$ sugarú kör metszi.

($z = 2x^2 + 3y^2$ ellipszis)

pl. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nem lehet z most sem negatív.

gyorsabban nő a sugara.

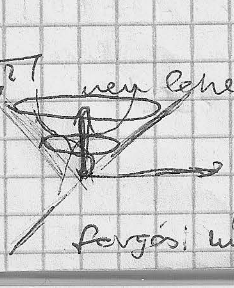
$z = 0$: $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$

$z = 1$: $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$x^2 + y^2 = 1$

$z = 2$: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$

$x^2 + y^2 = 2^2$



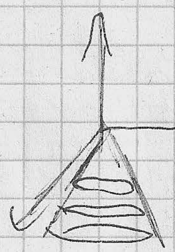
forgási kúp.

$x = 0$: $z = \sqrt{y^2} = |y|$

$x = \pm 1$: $z = \sqrt{1 + y^2}$

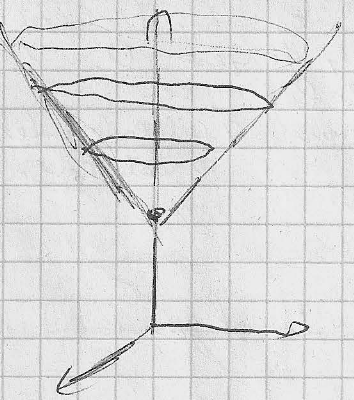
$z^2 - y^2 = 1$ hiperbolapár

$z = -\sqrt{x^2+y^2}$

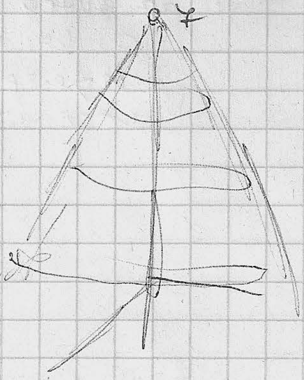


kúp!

$z = 3+\sqrt{x^2+y^2}$

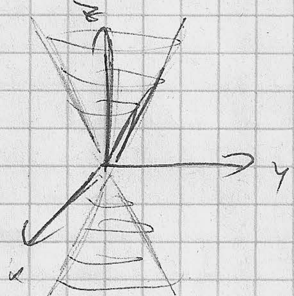


$z = 7-\sqrt{x^2+y^2}$



pl. $z^2 = x^2+y^2$. ez nem függvény → nem egyértelmű megfeleltetés, ábrázoljuk a mértani pontokat melyeket ez jelent!

$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$



pl. $x^2+y^2+z^2 = 9$. állandó 9 ⇒ gömb

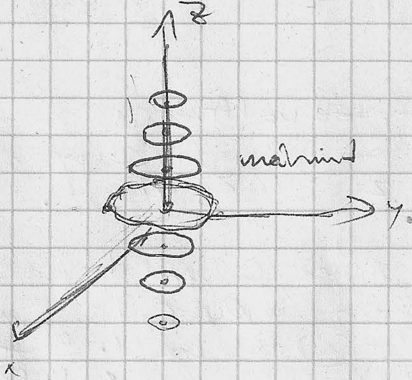
$z = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 9$

körgörbe $r = 3$ kör

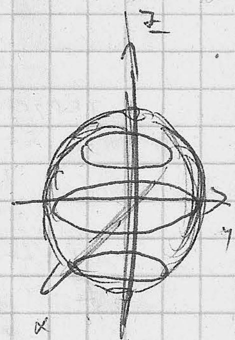
$z = \pm 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 8 \to r = \sqrt{8}$

$z = \pm 2 \Rightarrow x^2+y^2 = 5$

$z = \pm 3 \quad x^2+y^2 = 0$



mint

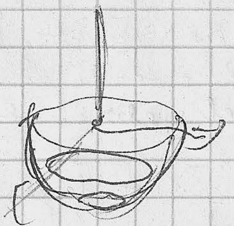


pl. $z = -\sqrt{9-x^2-y^2}$

$x^2+y^2+z^2 = 9 \quad /:9$

z negatív ⇒ csak a gömb alsó fele.

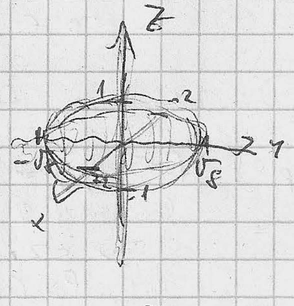
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9} = 1$



pl. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{1} = 1$. ⇒ ellipszoid

a tengelyekkel metszéspontjai:

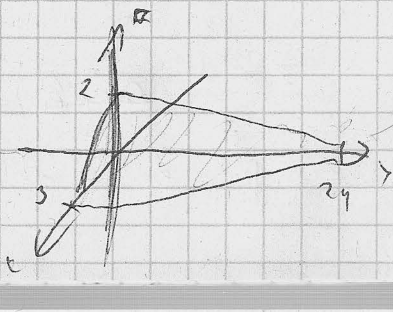
$x = \pm 2$. $y = \pm\sqrt{8}$ $z = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.



pl. $2x + \frac{y}{4} + 3z = 6$

$(A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0)$

$z = 3$; $y = 2$, $x = 24$.



! pl. $z = x \cdot y$.

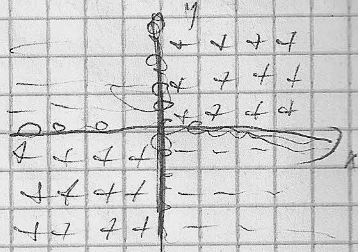
Fkc.

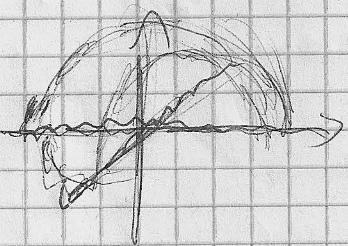
pl. $z = x \cdot y$.

az értelmezési tartomány (előjelek)

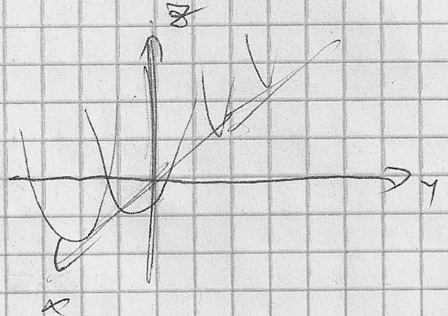
0: ha valamely tényező 0. ⇒ a ... "nyeregfelület".

„kétszer papír, 2 felületben fel, 2 felületben le".





pl. $z = y^2$



jegyzet, több változós fvk.
fajtái: ellipszoid stb.
$z = xy$, $z = y^2 - x^2$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3. Határérték, folytonosság:

$f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ n-változós függvény, azt mondjuk, hogy

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ ha 1. a torlódási pontja D_f-nek.

2. $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $0 < \varrho(x, a) = |x - a| < \delta$ akkor $|f(x) - b| < \varepsilon$.

a D számontékelhető, pl. ...
ezek értelmezve van.

(T) átviteli elv: $\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall x_n \to a$ ($x_n \in D_f \setminus \{a\}$) pontsorozatra $f(x_n) \to b$.

(Bizonyítás lásd, lim ∄.)

(D) $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$; m-változós fv. folytonos a-ban, ha a. $a \in D_f$ b. a torlódási pontja D_f-nek, c. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(T) folytonos fvk $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ ha $g \neq 0$ folytonos marad.

pl. $f(x, y) = y$, folytonos $a = (a, b)$-ben. (koordináta fv.) csak y-tól függ.
koord fvk folytonosak $\forall$ a-ban
⇒ az ... k változós polinomok folytonosak.
pl. $P_4(x, y, z) = x^3 z + 5xyz - 4z^2 + 6, -\sqrt{2}$ (polinom folytonos)

pl. hol folytonos fvk: $f(x, y) = \left\{ \frac{xy}{x^2 + y^2}; 0 \right\}$
folytonossági tételekből folyt. $x \neq 0$.

⇓ és $x = 0$-ban?

1 (pl.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = ?$

$\underline{x} \to \underline{0}$ $\quad = f(x,y)$.

I. mo. → létezik megoldás? → ha nem, akkor 2 pontsorozat keresése.

$p_n^{(1)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right)$ $(y = 3x)$

$$f\left(p_n^{(1)}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{3}{10} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{10}.$$

nem függ n-től

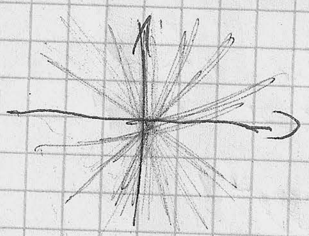
$p_n^{(2)} = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ $(y = -x)$ → tart az origóhoz.

$$f\left(p_n^{(2)}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(-\frac{1}{n}\right)^2} = -\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \text{ h.é.}$$

⇒ mi a feltétel

II. mo.

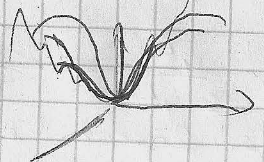
megvizsgáljuk különböző origón áthaladó egyenesekkel (kiv: y tengely, x = 0)



$y = mx$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx)$ → ha függ m-től, ∄ határérték.

↳ ha nem függ m-től, $\boxed{?}$



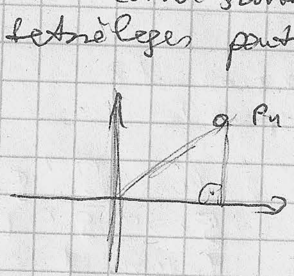
minden egyenes a 0-n halad át és ez attól még nem biztos h. ∃.

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}\,\frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

ellenben függ m-től ⇒ ∃ hé.

III. mo. ezzel szinte ∀ megoldható!

tetszőleges pontsorozatot szeretnénk előállítani.



$x_n = \rho_n \cos\varphi_n$

$y_n = \rho_n \sin\varphi_n$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{\rho_n \to 0\ (\rho_n \neq 0)\\ \varphi_n \text{ tetszőleges}}} f(\rho_n\cos\varphi_n, \rho_n\sin\varphi_n) =$$

$$= \lim_{\substack{\rho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\rho_n\cos\varphi_n\,\rho_n\sin\varphi_n}{\rho_n^2\cos^2\varphi_n + \rho_n^2\sin^2\varphi_n} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho_n\to 0\\ \varphi_n = \text{tetsz.}}} \frac{\rho_n^2}{\rho_n^2}\,\frac{\cos\varphi_n \sin\varphi_n}{\underbrace{\cos^2 + \sin^2}_{1}} = \cos\varphi_n \sin\varphi_n$$

függ φ_n-től ⇒ ∄ határérték!

pl.

pl. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x^2)e^y}{1+x^2+y^4} = \frac{(1+0)e^0}{1+0+0} = 1.$ kész.

be lehet helyettesíteni.

pl. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^2}\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{y^2} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{\frac{0}{0}} = 0.$

korlátos

pl. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot x = 0.$

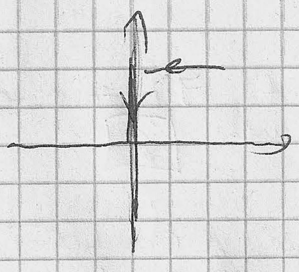
$\frac{0}{0}$

pl. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \cancel{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}}$

a $\rho_n \varphi_n$ behelyettesítése ~~...~~ nem lesz ha-

4. mo.

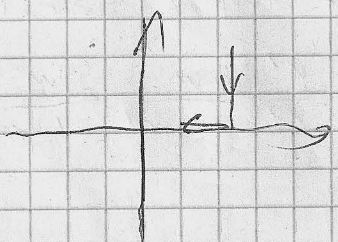
két irányban vett lim.



$\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1$

ha létezik határérték, ezek ez lehet,



Iterált limesz:

$\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq -1$

$\Rightarrow$ két különböző érték $\Rightarrow \nexists$ ha.

ha megegyezne, akkor ?

pl. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{2x^2+3y^2} =$ iterált nem jó → szerint e.

mert tél nem hosz → ?

$= \lim\limits_{\substack{\rho_n\to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\rho_n \cos\varphi_n \rho^2 \sin^2\varphi_n}{2\rho_n^2\cos^2\varphi_n + 3\rho_n^2 \sin^2\varphi_n} = \lim\limits_{\substack{\rho_n\to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{\rho_n^2}{\rho_n^2}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\rho_n} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{korlátos!}}}{\frac{\cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}{2\cos^2\varphi_n + 3\sin^2\varphi_n}}$

$\Rightarrow \frac{\cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}{2\cos^2\varphi_n + 3\sin^2\varphi_n} = \frac{\cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}{\underbrace{2 + \sin^2\varphi_n}_{\geq 2}}$ korl. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim = 0. \Rightarrow$ létezik.

(nem volt szó peremről → kérdés!

Anal 2. GYAK. 8.

Fourier

1. $f(x) = x, \quad 0 \le x \le 2\pi; \quad f(x) = f(x+2\pi)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi^2}{2} = 2\pi.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi}}_{0} - \frac{1}{k}\underbrace{\int_0 \sin kx\,dx}\Big) =$$

$u = x \quad v' = \cos(kx)$

$u' = 1 \quad v = \frac{\sin(kx)}{k}$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\cos kx}{\cancel{k}}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{k^2}\left[\cos 2\pi k - 0\right] = 0.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \overbrace{x}^{f(x)}\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x\cdot\frac{-\cos kx}{k} + \frac{1}{k}\int_0 \cos kx\,dx\right) =$$

$u = x \quad v' = \sin(kx)$

$u' = 1 \quad v = -\frac{\cos kx}{k}$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\left[2\pi\cdot -\frac{1}{k}\right] + \underbrace{\frac{1}{k}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi}}_{0}\right) = -\frac{2}{k}.$$

$a_0 = 2\pi$

$a_k = 0$

$b_k = -\frac{2}{k}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_k\cos kx + b_k\sin kx,$$

$$= 2\pi - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} = \Phi(x).$$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ summája

$$\hookrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cancel{2\pi} - 2\sum_{k=0} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{\cdots} = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = ?$$

$$\frac{1}{1} + 0 + \frac{-1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + -\frac{1}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

(HF. 46.)

Többváltozós fvk.

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+3}{x^2y+4} = \frac{0+3}{0+4} = \frac{3}{4}.$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2\cos y^2} = \lim_{x^2y\to 0} \overbrace{\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}}^{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{y}{\cos y^2}}^{\to 0} = 1\cdot\frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1.$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\operatorname{arctg}(xy)}_{0}\underbrace{\sin\frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{korlátos}} = 0.$$

korlátos (1-el konstanssal felülbecsülhető)

5. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{2x^2+4m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{2+2m^2} = \frac{m}{2+2m^2}$$ $\Rightarrow$ függ a lim ez iránytól

volt határérték ha két oldali.

most végtelen oldali, egyenessel

$y = mx$.

$\Rightarrow \nexists$ hé.