Fibonacci típusú egyenletek

Ⓣ Ha $q_1 \neq q_2$ valósak $\Rightarrow f(n) = a \cdot f(n-1) + b \cdot f(n-2)$ ∀ megoldása
$f(n) = c_1 \cdot q_1^n + c_2 q_2^n$ alakú ; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

nagyságrendek
tudni!!!
numerikus
sorok tudni!!!
Σ

Majoráns, minoráns kritérium

(pozitív tagú sorok)

(i) Ha $0 < a_n \leq b_n$ és $\sum^{\infty} b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konvergens.
(ii) Ha $0 < c_n \leq a_n$ és $\sum^{\infty} c_n$ divergens $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens. ($\forall n \geq N$-re) biz.: . . .

Gyökkritérium

(i) $0 < a_n$ és $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konvergens.
(ii) $0 < a_n$ és $\sqrt[n]{a_n} \geq q \geq 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens. + q kell? megnézni..

Gyökkritérium limeszes alakja

(i) $0 < a_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konvergens.

(ii) $0 < a_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens.

Ha $l = 1$, akkor más kritériumot kell használnunk.

Hányadoskritérium

(i) $0 < a_n$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konvergens.
(ii) $0 < a_n$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \geq 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens.

Hányadoskritérium limeszes alakja

(i) $a_n > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konvergens.
(ii) $a_n > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens.

(l értéke nem lehet 1!)

Függvénysorok

- konvergenciatartomány, pontonkénti konvergencia, egyenletes konvergencia
- Cauchy-kritérium, Weierstrass-kritérium
  ↳ Ha $|f_k(x)| \leq b_k$ $\forall x \in H$ és $\sum^{\infty} b_k$ konv. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen és abszolút konv. a H-on.

• Végtelen sok folytonos fgv. összegfgv-e is folytonos, ha a konvergencia egyenletes. (megj....)
• $\int$ és Σ jel... • deriv... III jegyzet

Hatványsorok

- konvergenciasugár, meghatározása; egyenletes konvergenciával kapcsolatos tulajdonságok
- hatványsorokkal a konvergencia sugáron belül lényegében úgy lehet bánni, mint a polinomokkal

%

T.: Legyen f n-szer diff-ható x_0-ban. Ekkor a $T_n(x)$ Taylor polinom:

$$\boxed{T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

D.: Taylor-polinom maradéktagja: (f n-szer diffható x_0-ban)

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$$

T.:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

T.: Legyen f $(n+1)$-szer diff-ható vagy $[x_0, x]$-ben, vagy $(x, x_0]$-ban.

Ekkor $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ahol ξ az x_0 és x között van.

- $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)} \text{; ahol } \xi \in \begin{cases} (x_0, x), \text{ ha } x > x_0 \\ (x, x_0), \text{ ha } x < x_0 \end{cases}$$

- $$f(x) \rightsquigarrow T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ (f ∞-szer diffható x_0-ban)

T.: $f(x) = T(x) \iff \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

D.: A $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ fgv. rendszer egyenletesen korlátos az $I \subset \mathbb{R}$-en, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in I$, és $\forall i \in \mathbb{N}$ esetén $|g_i(x)| < K$.

T.: Ha f ∞-szer diff-ható $(-R, +R)$-ben, és $\{f^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen korlátosak $(-R, +R)$-en, akkor $f(x) = T(x)$, ahol $x_0 = 0$. ($x_0 \neq 0$ esetén az $(x_0 - R, x_0 + R)$-en kell az egyenletes korlátosság.)

$\boxed{x \in \mathbb{R}}$

- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$
- $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k$

x-ben mind lineárisak!

- $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$
- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$

K.K.

Binomiális tétel: $\underset{n\in\mathbb{N}}{(a+b)^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$, ahol a binomiális együttható: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(binomiális sor: $(1+x)^\alpha$) $a=x$, $b=1$ esetén. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ $n\in\mathbb{N}$ ...

Általában: $\alpha\in\mathbb{R}$ $\boxed{\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}}$ $\longleftarrow$ (k db tényező)

I.: $\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \text{, ha } |x|<1}$ binomiális sorfejtés

Gyak. használat pl.: $(1+\underset{\underset{1}{\wedge}}{\text{kicsi}})^\alpha \approx 1+\underset{\underset{\frac{\alpha}{1}=\alpha}{\parallel}}{\binom{\alpha}{1}}\cdot\text{kicsi}^1 = 1+\alpha\cdot\text{kicsi}$

$\left(\frac{1}{1+x}\right)\approx 1-x$

Többváltozós függvények $f: D_f\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};\ \underline{x}\mapsto f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

D.: (Határérték) $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = A$, ha

i.) $\underline{x}_0$ torlódási pontja D_f-nek (Nem kell, hogy $\underline{x}_0\in D_f$)

ii.) $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon)>0$, hogy $|f(\underline{x})-A|<\varepsilon$, ha $\underbrace{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|<\delta(\varepsilon);\ \underline{x}\neq\underline{x}_0,\ \underline{x}\in D_f}$ $\underline{x}\in D_f\cap\overset{\circ}{K}_{\delta(\varepsilon)}(\underline{x}_0)$

I.: (Átviteli elv) $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = A \iff \forall\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n,\ \forall y_i \xrightarrow[\infty]{i} \underline{x}_0,\ \forall y_i\in D_f,$
$\forall y_i\neq\underline{x}_0,\ f(y_i)\xrightarrow[\infty]{i} A$

D.: (Parciális derivált) $$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k} = f'_{x_k}(\underline{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k+h, \dots x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots x_n)}{h}$$

D.: (Totális deriválhatóság): $f: D_f\to\mathbb{R};\ D_f\subset\mathbb{R}^n;\ \underline{x}_0\in\text{Int}D_f;\ \underline{h}\in\mathbb{R}^n;\ \underline{x}_0+\underline{h}\in D_f;$
f totálisan deriválható $\underline{x}_0\in D_f$-ben, ha

$$\Delta f = f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \underbrace{\underline{A}\cdot\underline{h}}_{\substack{\text{főrész}\\ \sum_{i=1}^{n}A_i h_i}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}}_{\substack{\text{elenyésző rész}\\ \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i h_i}}$$, ahol $\underline{A}$ független $\underline{h}$-tól és

$\underline{A} = \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$ $\underline{h} = \begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}$

$\underline{\varepsilon}(\underline{h})\xrightarrow[0]{\underline{h}} 0$

(vagy: $\|\underline{\varepsilon}(\underline{h})\|\xrightarrow{\|\underline{h}\|\to 0} 0$)*

Akkor $\boxed{\underline{A} = \text{grad}f(\underline{x}_0)}$

I.: Ha $\exists\ \text{grad}f(\underline{x}_0) = \underline{A} = \begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{bmatrix}$, akkor $\forall k\in\{1,2,\dots n\}$ esetén $\exists f'_{x_k}(\underline{x}_0)$ és $\text{grad}f(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix}f'_{x_1}(\underline{x}_0)\\ \vdots\\ f'_{x_n}(\underline{x}_0)\end{bmatrix}$

I.: $\exists\ \text{grad}f(\underline{x}_0)\Rightarrow f$ folyt. $\underline{x}_0$-ban

I.: (Elégséges felt. tot. diffhatóra) $\underline{x}_0\in\text{Int}D_f$;
Ha az $\{f'_{x_k}\}_{k=1}^{n}$ parciális deriváltak léteznek és folytonosak $\underline{x}_0$ egy $K_\varepsilon(\underline{x}_0)$ $(\varepsilon>0)$ környezetében, akkor f totálisan differenciálható $\underline{x}_0$-ban.

I.: (Elégséges felt. $\text{grad}f(\underline{x}_0)$ létezésére)
Ha $\exists\varepsilon>0$: $\underline{x}\in K_\varepsilon(\underline{x}_0)$ esetén $f'_{x_k}(\underline{x})$ léteznek és folytonosak $\Rightarrow\exists\ \text{grad}f(\underline{x}_0)$

$*\ \frac{|\underline{\varepsilon}(\underline{h})\underline{h}|}{\|\underline{h}\|}\xrightarrow[0]{\|\underline{h}\|} 0$

D.: (Iránymenti derivált) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\underline{e}\in\mathbb{R}^n$, $\|\underline{e}\|=1$ irányvektor;

$$\boxed{\frac{df(\underline{x}_0)}{d\underline{e}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\underline{x}_0+t\underline{e}) - f(\underline{x}_0)}{t}} = \text{tg}\alpha$$

Másként: $\varphi(\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{t}}) = f(\underline{x}_0+t\underline{e})$

$\frac{df(\underline{x}_0)}{d\underline{e}} = \varphi'(0)$

II.: Ha f tot. diff.ható $\underline{x}_0$-ban ($\exists\ \text{grad}f(\underline{x}_0)$), akkor $\boxed{\frac{df(\underline{x}_0)}{d\underline{e}} = \text{grad}f(\underline{x}_0)\cdot\underline{e}} = \sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_i}$; $\|\underline{e}\|=1$

D.: Laplace operátor (másodrendű diff. op.): Δ; $\Delta f = f''_{xx}+f''_{yy}$; $\Delta f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

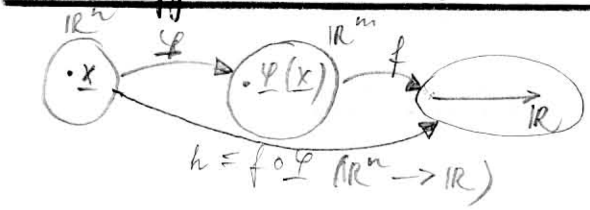
I.: (Young) Ha a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}$ második parciális derivált függvények léteznek és folytonosak $\forall\underline{x}\in K_\varepsilon(\underline{x}_0)$-ra ($\varepsilon>0$; $k, l = 1\dots n$), akkor $\frac{\partial^2 f(\underline{x}_0)}{\partial x_k\partial x_l} = \frac{\partial^2 f(\underline{x}_0)}{\partial x_l\partial x_k}$ (sorrend mindegy)

Vektor-vektor fgv. deriválása

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\longrightarrow f(\underline{x})=\begin{bmatrix}f_1(\underline{x})\\ \vdots\\ f_m(\underline{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(x_1\dots x_n)\\ \vdots\\ f_m(x_1\dots x_n)\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{f}(\underline{x}_0)}{\partial x_1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(\underline{x}_0)}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m(\underline{x}_0)}{\partial x_1}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}_0)}{\partial x_2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(\underline{x}_0)}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m(\underline{x}_0)}{\partial x_2}\end{bmatrix},\quad \dots$$

Összetett fgv. deriválása (ált. lánc-szabály)



$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n;\quad \varphi(\underline{x})=\begin{bmatrix}\varphi_1(\underline{x})\\ \vdots\\ \varphi_m(\underline{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_1(x_1,\dots x_n)\\ \vdots\\ \varphi_m(x_1,\dots x_n)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^m;$$

$$h(\underline{x})=(f\circ\varphi)(\underline{x})=f(\varphi(\underline{x}))=f(\underbrace{\varphi_1(\underline{x})}_{y_1},\dots\underbrace{\varphi_m(\underline{x})}_{y_m})$$

$$\frac{\partial h(\underline{x})}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial f}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}\Big|_{\underline{\varphi}(\underline{x})},\dots\frac{\partial f}{\partial y_m}\Big|_{\underline{\varphi}(\underline{x})}\right]\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}\end{bmatrix}=\operatorname{grad}f\Big|_{\underline{\varphi}(\underline{x})}\cdot\frac{\partial\underline{\varphi}}{\partial x_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f\circ\varphi)\Big|_{\underline{x}}=\operatorname{grad}f\Big|_{\underline{\varphi}(\underline{x})}\cdot\frac{\partial\underline{\varphi}}{\partial x_k}$$

Többváltozós függvények szélsőérték számítása

D.: Az $f:D_f\to\mathbb{R}$, $D_f\in\mathbb{R}^n$ fg-nek $\underline{x}_0$-ban lokális minimuma (maximuma) van, ha $\underline{x}_0$ a D_f belső pontja, és $\exists\varepsilon>0$, hogy $f(\underline{x})\geq f(\underline{x}_0)$ $(f(\underline{x})\leq f(\underline{x}_0))$, ha $\underline{x}\in K_\varepsilon(\underline{x}_0)$.

I.: (szükséges felt. lokális szélsőérték létezésére diff-ható fgv. esetén)
Ha f diff-ható $\underline{a}$-ban, és $\underline{a}\in\operatorname{Int}D_f$, és f-nek $\underline{a}$-ban lok. sz. é. van, akkor $\operatorname{grad}f(\underline{a})=\underline{0}$ („vízszintes érintősík")

D.: Hesse-féle matrix: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$\underline{\underline{H}}(\underline{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_2^2} & \dots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dots & \ddots & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_i\partial x_j}\right]$$

(másodrendű parciális deriváltak …)

Ha teljesülnek a Young-tétel feltételei, akkor $H_{ij}=H_{ji}$ szimmetrikus.

I.: (elégséges felt. szélsőértékre) $\underline{a}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

Legyen $\underline{a}\in\operatorname{Int}D_f$; $\underline{a}$ egy környezetében a másodrendű parciális deriváltak léteznek és folytonosak. Továbbá $\operatorname{grad}f(\underline{a})=\underline{0}\Leftrightarrow f'_x(\underline{a})=f'_y(\underline{a})=0$. Akkor legyen

$$D(x,y)=|\underline{\underline{H}}(x,y)|=\begin{vmatrix}f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y)\\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y)\end{vmatrix}=f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2$$

i.) Ha $D(\underline{a})>0$, akkor f-nek $\underline{a}$-ban lok. szélsőértéke van.
  α.) Ha $f''_{xx}(\underline{a})>0\Rightarrow$ lok. min.
  β.) Ha $f''_{xx}(\underline{a})<0\Rightarrow$ lok. max.

ii.) Ha $D(\underline{a})<0$, akkor f-nek $\underline{a}$-ban nincs lok. sz. é-je ($\underline{a}$ nyeregpont)

iii.) Ha $D(\underline{a})=0$, akkor nincs lok. sz. é, további vizsgálat szükséges.

Kompakt halmazon folytonos fg-ek

Legyen $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset D_f$ és H kompakt (korlátos és zárt), és f folytonos H-n.

Ekkor **I.:** (Weierstrass I.) $f(H \subset \mathbb{R}$ korl, zárt) kompakt: $f(H) = \{ y \mid y = f(\underline{x}), \underline{x} \in H \} \subset \mathbb{R}$

I.: (Weierstrass II.) $\exists \underline{\xi}, \underline{\eta} \in H$, hogy $f(\underline{\xi}) = \operatorname{Inf}_{\underline{x} \in H} \{ f(\underline{x}) \}$;

$$f(\underline{\eta}) = \operatorname{Sup}_{\underline{x} \in H} \{ f(\underline{x}) \}$$

D.: f egyenletesen folytonos H-n, akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, hogy $|f(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_2)| < \varepsilon$, ha $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in H$ és $\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\| < \delta(\varepsilon)$

→ [$\delta(\varepsilon)$ független $\underline{x}_1, \underline{x}_2$-től, univerzális H-ra]

I.: Kompakt halmazon folytonos fgv. egyenletesen folytonos.

Kompakt halmazon abszolút szélsőértek lehet:
- lokális szélsőérték helyen
- H peremén

H kompakt; $f: H \to \mathbb{R}$

f legyen folyt. H-n $\overset{W\,II.}{\Longrightarrow}$ felveszi szélsőértékeit.

Fourier-sorok

- Lineáris tér/vektortér: $(\mathcal{L}, +, \cdot)$; axiómák...
- Skaláris szorzás $\mathcal{L}$-en (belső szorzás): $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, $(\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$; tulajdonságai:
  - i, Szimmetrikus: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$
  - ii, Bilineáris: $\langle \alpha \underline{u}_1 + \beta \underline{u}_2, \underline{v} \rangle = \alpha \langle \underline{u}_1, \underline{v} \rangle + \beta \langle \underline{u}_2, \underline{v} \rangle$;
    $\langle \underline{u}, \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 \rangle = \alpha \langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle + \beta \langle \underline{u}, \underline{v}_2 \rangle$
  - iii, Nem negatív és nem elfajuló
    $\forall \underline{u} \in \mathcal{L}$ esetén $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$;
    $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

Pl.: $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$ esetén sk. szorzás:
$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$
Pl.: $\mathcal{L} = C[-\pi, \pi]$ esetén sk. sz.:
$$\boxed{\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx}$$

D.: euklideszi tér: $(\mathcal{L}, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – skalárszorzattal ellátott lineáris tér/vektortér

Norma: $\underline{x} \in \mathcal{L}$; $\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$

$\underline{x} \perp \underline{y}$ (ortogonális), ha $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0$

I.: A $C[-\pi, \pi]$ térben a $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots \sin kx, \cos kx, \ldots\}_{k \in \mathbb{N}} = \{1, \sin kx, \cos kx\}_{k=1}^{\infty}$ rendszer ortogonális rendszer (így: i, bármely véges sok lineárisan független
ii, az általuk generált tér nem véges dimenziós)

[$1 = \cos(0 \cdot x)$]

Megj.: $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi \Rightarrow \|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{2\pi}$

ONR (ortonormált rendszer): $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}; \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

Trigonometrikus polinom: $t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Trigonometrikus sor: $\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

I.: Adott a $\phi(x)$ $[-\pi, \pi]$-n egyenletesen konvergens trigonometrikus sor. Ekkor:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \cos(kx) dx; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin(kx) dx; \qquad k = 1, 2, \ldots$$

D.: Ha f 2π szerint periodikus és $f \in R[0,2\pi]$, akkor f Fourier sora

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \text{ ahol}$$

Fourier együtthatók; $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos kx), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, \sin kx), \quad k = 1, 2, \ldots$$

T.: Legyen $f(x) = f(x+2\pi)$, $f \in R[0, 2\pi]$, és legyen $t_n(x)$ n-edrendű trigonometrikus polinom. Ekkor $\|f - t_n\|$ minimális, ha $t_n = \phi_n$ (vagyis az együtthatók a Fourier együtthatók).

T.: (Dirichlet) $f(x) = f(x+2\pi)$; $f \in R[0,2\pi]$; $[0,2\pi] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, $I_k \cap I_\ell = 0$, ha $k \neq \ell$ (véges sok diszj. int.) → f monoton és folyt. $\forall I_k$-n, és $\exists f(x-0)$, ill. $\exists f(x+0)$ $\forall x \in [0,2\pi]$.
Ekkor $\exists \phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ és $\phi(x) = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Többes integrálok

D.: f korlátos fgv. Riemann-integrálható $T \subset \mathbb{R}^2$-en (T mérhető, $m(T) < \infty$), ha $h(f) = H(f)$, és ekkor

$$I = \iint_T f \cdot dm = \iint_{(x,y) \in T} f(x,y) \, dx dy \qquad (dm \text{ Jordan mérték szerint})$$

Szükséges és elégséges feltételek a többes integrál létezésére (3db)...

T.: (elégséges felt.) Ha $m(T) < \infty$ (T Jordan-mérhető), és f korlátos és folytonos T-n, akkor $\exists \iint_T f \, dm$.

A többesintegrálok tulajdonságai (f, g korlátos; $m(T) < \infty$; $\exists \iint_T f dm$; $\exists \iint_T g dm$ esetén)

① $\iint_T (f+g) dm = \iint_T f dm + \iint_T g dm$
$\iint_T \lambda f dm = \lambda \iint_T f dm$; $\lambda \in \mathbb{R}$
} Az integrálás lineáris funkcionál az integrálható függvények terén.

② $f \geq 0 \Rightarrow \iint_T f dm \geq 0$ (nem negatív) [Megj: egyváltozóban létezik előjeles terület, kétváltozóban nem]

$f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in T \Rightarrow \iint_T f dm \geq \iint_T g dm$ (monoton)

③ $\iint_T |f| dm \geq \left| \iint_T f dm \right|$ (analógia: $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$)

Kettős integrál

T.: Ha $f(x,y)$ Riemann-integrálható $T = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$-en, és $\forall$ rögzített $y \in [c,d]$ esetén $\exists \varphi(y) = \underbrace{\int_{x=a}^{b} f(x,y) dx}_{\text{paraméteres egyváltozós integrál}}$, akkor

$$\iint_T f dm = \underbrace{\iint_T f(x,y) dx dy}_{\text{kettős integrál}} = \int_{y=c}^{d} \varphi(y) dy = \underbrace{\int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y) dx \right) dy}_{\text{kétszeres integrál}}$$

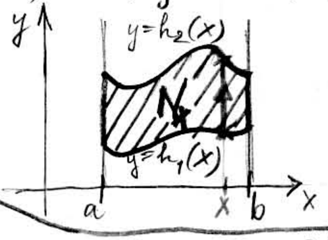
Spec. eset: $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ szorzat alakú (és a tart. téglalap alakú!) $\Rightarrow$

$$\iint_T f(x,y) \cdot dm = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} g(x) h(y) dy \right) dx = \left(\int_{y=c}^{d} h(y) dy \right) \cdot \left(\int_{x=a}^{b} g(x) dx \right)$$

Integrálás normáltartományon

D.: x tengely felől nézve normáltartomány:

$N_x = \{ (x,y) : h_1(x) \leq y \leq h_2(x); \ x \in [a,b]; \ h_1, h_2 \in C[a,b] \}$



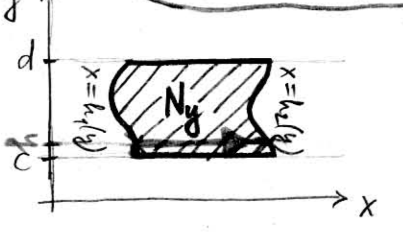
• Ha f folyt. N_x-en:

$$\iint_{N_x} f dm = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

(x param.)

y tengely felől nézve normáltartomány:

$N_y = \{ (x,y) : h_1(y) \leq x \leq h_2(y); \ y \in [c,d]; \ h_1, h_2 \in C[c,d] \}$

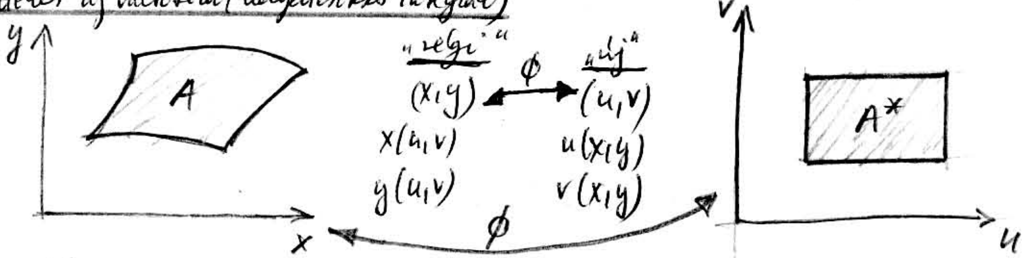


• Ha f folyt. N_y-on:

$$\iint_{N_y} f dm = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

(y paraméter)

Áttérés új változóra (helyettesítéses integrál)



„régi" „új"

$(x,y) \xleftrightarrow{\phi} (u,v)$

$x(u,v)$ $u(x,y)$

$y(u,v)$ $v(x,y)$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A^*} \underbrace{f\big(x(u,v),y(u,v)\big)}_{\tilde{f}(u,v)} \cdot \underbrace{|J|}_{} \cdot du\,dv$$

→ Jacobi-determináns abszolútértéke

Jacobi-determináns:

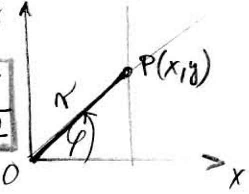
$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

„lokális térfogatnövelési ráta"

Megj.: $\underline{\underline{M}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. tr.; $\det \underline{\underline{M}}$ = térfogatnövelési faktor

Polártranszformáció

$\boxed{|J| = r}$



$(r,\varphi) \leftrightarrow (x,y)$ kölcsönösen egyértelmű, kivéve az origóban: $(0,0) \leftrightarrow (0,\varphi)$ φ határozatlan

$x, y \in \mathbb{R}$

$r \in [0,\infty)$

$\varphi \in [0,2\pi)$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

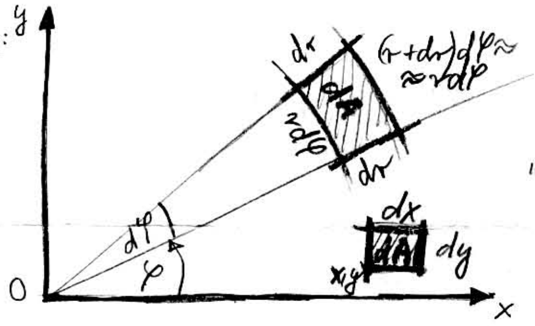
$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ (megf. síkn.!)

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \underline{\underline{r}}$$

Tehát $|J| = r$.

Megj.:



$$\text{„}dA = \underset{\text{Jacobi}}{\boxed{r}}\,d\varphi\,dr = dx\,dy\text{"}$$

Hármas integrál transzformációja

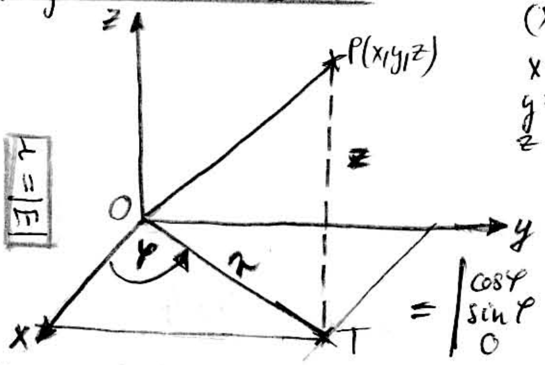
$(x,y,z) \leftrightarrow (u,v,w)$ $V \leftrightarrow V^*$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \operatorname{grad} x \\ \operatorname{grad} y \\ \operatorname{grad} z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V^*} \underbrace{f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)}_{\tilde{f}(u,v,w)} \cdot \underbrace{|J(u,v,w)|}_{\text{Jacobi}}\,du\,dv\,dw$$

Henger koordinátarendszer

$\boxed{|J| = r}$



$(x,y,z) \leftrightarrow (r,\varphi,z)$

$x = r\cos\varphi$ $\varphi \in [0,2\pi)$

$y = r\sin\varphi$ $r \geq 0$

$z = z$ $z \in \mathbb{R}$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| =$$

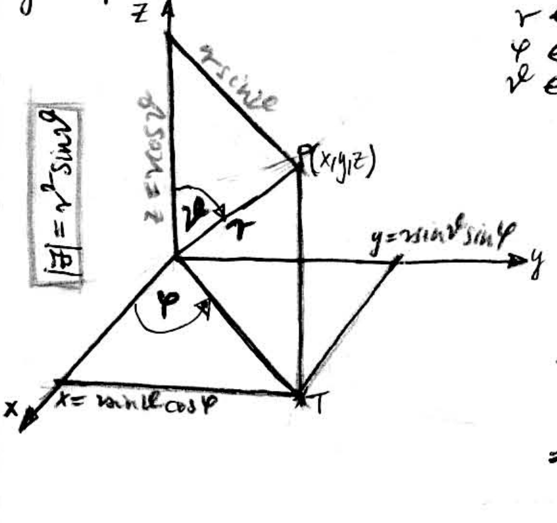
$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \underline{\underline{r}}$$

Megj.: (ábra)

„$dV = dz \cdot dr \cdot r\,d\varphi =$
$= r\,dr\,d\varphi\,dz = dx\,dy\,dz$"

Gömbi polár koordinátarendszer

$\boxed{|J| = r^2 \sin\vartheta}$



$r \in [0,\infty)$ $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$

$\varphi \in [0,2\pi)$ $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$

$\vartheta \in [0,\pi]$ $z = r\cos\vartheta$

Megj.: (ábra)

„$dV = dr \cdot r\,d\vartheta \cdot r\sin\vartheta\,d\varphi =$
$= r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi =$
$= dx\,dy\,dz$"

$$J = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\vartheta \begin{vmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\vartheta \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\vartheta\, r^2\cos\vartheta\sin\vartheta \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}}_{1} + r\sin\vartheta\, r\sin^2\vartheta \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}}_{1} =$$

$$= r^2\cos\vartheta\big(\underbrace{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}_{1}\big) = \underline{\underline{r^2\sin\vartheta}}$$

Komplex függvénytan

Komplex aritmetika

$\mathbb{C}: z = x + i \cdot y; \; x, y \in \mathbb{R}$

$i = \sqrt{-1}; \; i^2 = -1$

$x = \operatorname{Re} z \qquad y = \operatorname{Im} z$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\operatorname{arc} z = \varphi \in [-\pi, \pi)$

$$z = \underbrace{x + iy}_{\text{alg. alak}} = \underbrace{|z| \cdot e^{i\varphi}}_{\text{exp. alak}} = \underbrace{|z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{trigo. alak}}$$

Euler öf.: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad \text{eltolás} \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \text{forgatva nyújtás} \end{aligned}$$

Megj.: trigo. azon.-ok könnyen levezethetők

$$\left.\begin{aligned} z_1 = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ z_2 = e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta \end{aligned}\right\} \; z_1 \cdot z_2 = e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$

Konjugálás: $i \longmapsto (-i)$

$z = x + iy = re^{i\varphi}$

$\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = \\ = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$$

Most is igaz:

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0, \text{ ha } |z| < 1 \\ 1, \text{ ha } z = 1 \\ \text{div. egyébként} \end{cases}$$

Geom. sor: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, ha $|z| < 1$ (egyébként divergens)

I.: (konvergencia szükséges feltétele) $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergens $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$

I.: (absz. konv.) $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergens $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergens

Komplex függvények

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \; z = x + iy \longmapsto f(z) = w = u + iv$

$z = x + iy = re^{i\varphi} \; (x, y \in \mathbb{R}) \; (r, \varphi \in \mathbb{R})$

$w = u + iv = \rho \cdot e^{i\vartheta} \; (u, v \in \mathbb{R}) \; (\rho, \vartheta \in \mathbb{R})$

f megadása: $u(x,y); \; v(x,y)$ 2db $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fgv.

VAGY $\rho(r,\varphi); \; \vartheta(r,\varphi)$ 2db $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fgv.

- határérték, átviteli elv, folytonosság ...

Differenciálás

- def. ...

I.: A komplex fg-ekre valóban megmaradott diff. szabályok $\left((f+g)'; \; (f \cdot g)'; \; \left(\frac{f}{g}\right)'; \; (\text{inverz fg.})'; \; (f \circ g)' \right)$ érvényben maradnak.

I.: (szükséges és elégséges feltétel differenciálhatóságra)

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ akkor és csak akkor differenciálható az értelmezési tartomány $z_0 = x_0 + iy_0$ belső pontjában, ha u és v ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban és ugyanitt

$$\left.\begin{aligned} u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0) \end{aligned}\right\} \text{Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletek fennállnak.}$$

Ekkor: $\boxed{f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)}$

I.: (elégséges felt. $f'(z_0)$ létezésére) Ha u és v parciális deriváltjai léteznek (x_0, y_0) egy környezetében és itt folytonosak, és a C-R egyenletek teljesülnek (x_0, y_0)-ban, akkor ~~$\exists f'(z_0)$~~ f differenciálható $z_0 = x_0 + iy_0$-ban.

D.: f reguláris z_0-ban, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy f diff.ható $K_\varepsilon(z_0)$-ban.

D.: f reguláris $T \subset \mathbb{C}$ tartományon (összefüggő nyílt halmaz), ha f reguláris T minden pontjában.

D.: (harmonikus fgv.) $g \in C^2_H$, $H \subset \mathbb{R}^2$ harmonikus H-n, ha kielégíti a $\Delta g(x,y) = 0 \; \forall (x,y) \in H$ Laplace-féle parciális differenciálegyenletet (kétváltozósra: $\Delta g = g''_{xx} + g''_{yy} = 0$)

I.: $\boxed{\text{Ha } f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ reguláris } T \in \mathbb{C}\text{-n, akkor } u \text{ és } v \text{ harmonikus } T\text{-n}}$

D.: Ha $f(z) = u + iv$ reguláris fgv., akkor u és v harmonikus társak.

I.: Ha u harmonikus T-n ($\Delta u = 0$ T-n) és T egyszeresen összefüggő tartomány, akkor $\exists v$ harmonikus társa T-n (azaz $\exists v$, hogy $\Delta v = 0$) úgy, hogy $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ reguláris T-n.

A differenciálhányados geometriai jelentése

Legyen f differenciálható z_0 egy környezetében, $f'(z_0) \neq 0$. Ekkor

$|f'(z_0)|$ a z_0 pontbeli nyújtási együttható;

$\operatorname{arc} f'(z_0)$ a z_0 pontbeli elfordulási szög.

Elemi függvények

D.: $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{ch} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Azonosságok: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; $e^{z+2\pi i} = e^z$ $(p = 2\pi i)$;

$\sin z$, $\cos z$ periodikus $(p = 2\pi)$; $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ periodikus $(p = 2\pi i)$;

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin z = \cos(\pi/2 - z)$; $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$

$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z \iff \operatorname{sh}(iz) = i \sin z$

$\cos(iz) = \operatorname{ch} z \iff \operatorname{ch}(iz) = \cos z$

$$\sin(x+iy) = \underbrace{\sin x \operatorname{ch} y}_{u(x,y)} + i \underbrace{\cos x \operatorname{sh} y}_{v(x,y)}$$

$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$

$\operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$

$\operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$

T.:
$$\left.\begin{aligned} (e^z)' &= e^z \\ (\sin z)' &= \cos z \\ (\cos z)' &= -\sin z \\ (\operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z \\ (\operatorname{ch} z)' &= \operatorname{sh} z \end{aligned}\right\} \text{mindenütt regulárisak } \mathbb{C}\text{-n.}$$

Exponenciális függvény

$e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ azaz $|e^z| = e^x$, $\operatorname{arc} e^z = y$; Tulajdonságok: $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$; $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

Periodusa: $2\pi i$; $e^z \neq 0$, mert $|e^z| = e^x > 0$

$e^z \neq \infty$, mert csak a ∞-ben veheti fel, de $\nexists \lim_{z \to \infty} e^z$

ÉT. leszűkítése a fősávra, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű legyen. Fősáv: $\boxed{-\pi \leq \operatorname{arc} e^z = y < \pi}$

Logaritmus függvény ill. reláció

$e^z = w$, exp. fgv. inverse

$w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

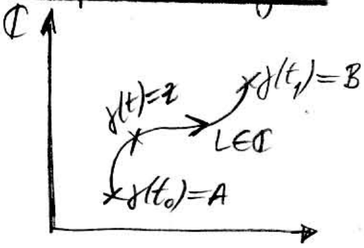
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Ln} w &= \ln|w| + i(\operatorname{arc} w + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\ \ln w &= \ln|w| + i \operatorname{arc} w, \quad \operatorname{arc} w \in [-\pi, \pi) \\ \operatorname{Ln}_k w &= \ln|w| + i(\operatorname{arc} w + 2k\pi) \end{aligned}\right\} |w| \neq 0$$

Hatványozás

$z^\lambda = (e^{\ln z})^\lambda = e^{\lambda \ln z}$ $z \neq 0$; $z, \lambda \in \mathbb{C}$

(önkényesen: $k = 0$)

Komplex vonalintegrál



$f(z)$

$\int_L f(z)dz$

D.: Legyen $\gamma:[\overset{\overset{\mathbb{R}}{\in}}{t_0},t_1]\to\mathbb{C}$ az L görbe paraméterezése, ha $\operatorname{Ran}\gamma=L\subset\mathbb{C}$, $\gamma(t_0)=A$ (kezdőpont), $\gamma(t_1)=B$ (végpont)

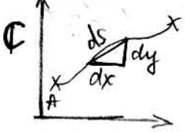
D.: $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{C}$ Jordan-görbe, ha
i.) γ folytonos
ii.) γ nem önátmetsző, tehát $\gamma(t)=\gamma(\tilde{t})\Rightarrow t=\tilde{t}$

γ zárt, ha $\gamma(t_0)=\gamma(t_1)$

γ szakaszonként sima, ha γ véges sok sima szakaszból áll, és γ folyt.
↳ a γ leképezés végtelen sokszor diff-ható

D.: γ egyszerű görbe, ha szakaszonként sima (irányított) Jordan görbe.

Ívhossz



$\gamma(t)=z(t)=x(t)+iy(t)$
$ds^2=dx^2+dy^2$

$\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}\\ \dot{y}(t)=\frac{dy}{dt}\end{array}\right\} ds=\dots;$ $\boxed{S=\int ds=\int_{t=t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt}$ szakaszonként sima görbe ?!

■ $L\subset\mathbb{C}$ egyszerű irányított görbe, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ korlátos fgv., azaz $|f(z)|<K\ (\forall z\in\mathbb{C})$

D.: $\int_L f(z)dz=\lim_{\Delta P_n\to 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})}_{\text{integrálközelítő összeg.}}\in\mathbb{C}$ ξ_k választástól fgtlenül

A felosztás finomsága: $\Delta P=\max\{\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}\text{ ívhossza}\}$

Elégséges feltétel az integrál létezésére pl. f folytonossága.

Érdekesség: ~~[illegible]~~

$\int_\gamma c\,dz=c(z_n-z_0)$ ← végpont ← kezdőpont

$\oint_\gamma c\,dz=0$ $c\in\mathbb{C}$ körintegrál, γ zárt.

Tulajdonságok

1) $\int_L f(z)dz=-\int_{-L}f(z)dz$

2) $\int_L cf(z)dz=c\int_L f(z)dz$

3) $\int_L (f(z)+g(z))dz=\int_L f(z)dz+\int_L g(z)dz$

4) $\int_{L_1\cup L_2}f(z)dz=\int_{L_1}f(z)dz+\int_{L_2}f(z)dz$

5) $\left|\int_L f(z)dz\right|\le S\cdot K$ S: L ívhossza
K: f korlátja; $|f(z)|<K\ \forall z\in L$

Komplex vonalintegrál kiszámítása

① L paraméterezésével (általános)
② Newton-Leibniz (egyszerű, de nem mindig alkalmazható)

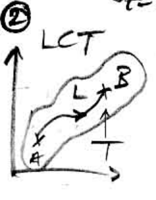
① $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{C}$ az L egy paraméterezése: $t_0,t_1\in\mathbb{R}$; $z(t)=\gamma(t)$
"$dz=\dot{\gamma}(t)dt$"

$$\boxed{\int_L f(z)dz=\int_{t=t_0}^{t_1}f(\gamma(t))\cdot\underbrace{\dot{\gamma}(t)dt}_{\text{"}dz\text{"}}}=$$

↳ nem függ a paraméterezéstől

$$=\int_{t=t_0}^{t_1}f(z(t))\dot{z}(t)dt$$

②

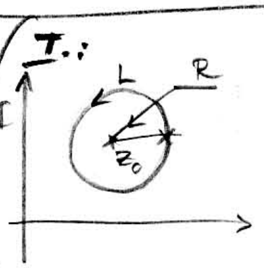


Ha ∃f-nek primitív fgv-e, azaz $\exists F:T\to\mathbb{C}$ (T egysz. öf. tart.)

$$\boxed{\int_L f(z)dz=F(B)-F(A)}$$

↳ nem függ L-től!!!

T.:



$f(z)=(z-z_0)^n$ $n\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{\oint_L(z-z_0)^n=\begin{cases}0, & \text{ha } n\neq -1\\ 2\pi i, & \text{ha } n=-1\end{cases}}$$

↳ nem függ R-től.

$\oint_{|z|=R>0}\frac{1}{z^n}dz=\begin{cases}0, \text{ ha } n\neq 1\\ 2\pi i, \text{ ha } n=1\end{cases}$ (független R-től)

T.: (Cauchy-féle alaptétel)

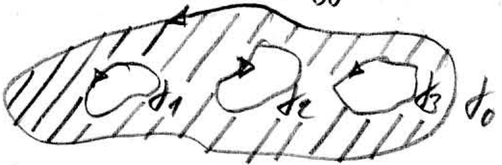
Ha f reguláris az egyszeresen öf. T tartományon, akkor minden T-beli egyszerű zárt görbére: $\oint_L f(z)dz=0$.

Köv.:
- ■ f reguláris az egysz. öf. T tartományon, $L\subset T$ egyszerű. Ekkor $\int_{L_{AB}}f(z)dz$ értéke fgtlen L-től, csak a végpontoktól függ.
- ■ Ha f reguláris az egyszeresen öf. T tartományon, akkor ∃ primitív fgv-e.

T.: (Cauchy-féle alaptétel nem egysz. öf tart-on)

γ_i, $i=0,1,\dots,n$ egyszerű, zárt görbék; γ_0 „körülveszi" $\gamma_1,\dots,\gamma_n$-et. f reguláris egy, a vonalkázott zárt tartományt tartalmazó többszörösen összefüggő tartományon.

Akkor $$\boxed{\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz}$$



($\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ azonos irányítású egyszerű zárt görbék)

M.: A Cauchy alaptétel akkor is igaz, ha L olyan zárt görbe, amely véges sok egyszerű görbe egyesítése.

D.: z_0 az f-nek izolált szingularitása, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy f reguláris z-ben, ha $0 < |z-z_0| < \varepsilon$ ($z \in \dot{K}_\varepsilon(z_0)$)

T.: f a z_0 kivételével reguláris az egyszeresen öf. T tartományon, és létezik $\dot{K}_\varepsilon(z_0) \subset T$ melyben f korlátos. $\gamma \subset T$ egyszerű, zárt görbe, mely „körülveszi" z_0-t. Akkor $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

T.: Cauchy-féle I. integrálformula

Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, $\gamma \in T$ egyszerű, zárt görbe, „egyszer futja körbe" a z_0 pontot, akkor $$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}$$

Cauchy-féle II. integrálformula

f reguláris az egyszeresen öf. T tartományon; $z_0 \in T$, $\gamma \subset T$ egyszerű, zárt görbe, „egyszer futja körbe" a z_0 pontot. Akkor f z_0-ban akárhányszor deriválható fgv., és

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz} \qquad n = 1, 2, \dots$$

(Ha f reguláris az egyszeresen öf T-n, akkor ott akárhányszor diffható.)