ANALÍZIS(1)
Műszaki Informatika szak

VIZSGADOLGOZAT I. rész

2003. dec. 22.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (10 pont)

Írja le a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ definícióját, majd ennek alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+11}{n^2+n} = 2$$

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$: $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ (2)

$$|a_n - A| = \left|\frac{2n^2+11}{n^2+n} - 2\right| \overset{(1)}{=} \left|\frac{2n^2+11-2n^2-2n}{n^2+n}\right| \overset{(1)}{=} \left|\frac{11-2n}{n^2+n}\right| =$$

$$\underset{n\geq 6}{=} \frac{2n-11}{n^2+n} \underset{(1)}{\leq} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > \frac{2}{\varepsilon} \quad (4)$$

$$N(\varepsilon) = \max\left\{6, \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right\} \quad (1)$$

2. feladat (8 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-2}+4^{n+2}}{3^{2n-1}} = ? \qquad \text{(Adja meg a sor összegét!)}$$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $|q|<1$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a q^n = \frac{a}{1-q}$ $(|q|<1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}\cdot 2^n + 16\cdot 4^n}{\frac{1}{3}\cdot 9^n} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n + 48\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \quad (3)$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}} + 48\,\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7} + \frac{4\cdot 48}{5} \quad (3)$$

3. feladat (19 pont)

Vizsgálja meg és vázlatosan ábrázolja az

$$f(x) = \frac{\ln(ex)}{x}$$

függvényt! Konvexitást, inflexiót nem kell vizsgálnia!

$D_f = (0, \infty)$ (1)

Nullahely: $ex = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ (1)

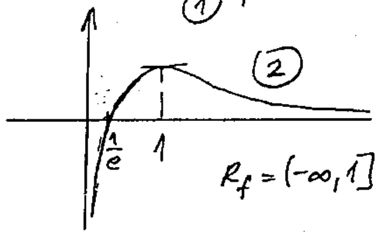
$$\lim_{x\to +0} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln(ex)}}{\underset{\to +0}{x}} \overset{(1)}{=} -\infty \ (1) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(ex)}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}\ (1)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \underset{(2)}{=} 0 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - \ln(ex)}{x^2} \underset{(2)}{=} \frac{1-\ln(ex)}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln(ex) = \ln e$$

$\underset{(1)}{x=1}$; $f(1) = 1$

x	(0,1)	1	(1,∞)
f'	+	0	−
f	↗	lok. max.	↘

(2) (3)



$R_f = (-\infty, 1]$ (3)

4. feladat (10 pont)

Mit állíthatunk az x_0-ban lokálisan növekedő függvény deriváltjáról?
Állítását bizonyítsa be!

(T) Ha f differenciálható x_0-ban és f lokálisan nő x_0-ban $\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ (2)

(B) $$\lim_{h\to -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \geq 0 \quad (1)$$
$\frac{-}{-}$ (2)

$$\lim_{h\to +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0 \quad (1)$$
$\frac{+}{+}$ (2)

Derivált definíciója: (2)

5. feladat (15 pont)

$$x(t) = t + e^{2t}; \quad y(t) = t - e^{3t}; \quad t \in \mathbf{R}$$

a) Indokolja meg, hogy a fenti paraméteres megadású görbének van $y = f(x)$ leírása is!
b) $\dot{x}(t) = ?$, $\dot{y}(t) = ?$, $f'(x) = ?$, $f''(x) = ?$
c) Határozza meg f lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!

a.) $\dot{x}(t) = 1 + 2e^{2t} > 0 \Rightarrow x(t)$ szigorúan mon. nő $\Rightarrow$ 1 1
$\exists$ inverze: $t = t(x) \Rightarrow f(x) = y(t(x))$ $\exists$ 1 1

b.) $\dot{y}(t) = 1 - 3e^{3t}$ 1

$f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1 - 3e^{3t}}{1 + 2e^{2t}}$ 1

$\ddot{x} = 4e^{2t}$, $\ddot{y} = -9e^{3t}$ $\quad f''(x) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$ 3

$f''(x) = \frac{-9e^{3t}(1+2e^{2t}) - 4e^{2t}(1-3e^{3t})}{(1+2e^{2t})^3} = \frac{-9e^{3t} - 4e^{2t} - 6e^{5t}}{(1+2e^{2t})^3}$ 1

c.) $f'(x) = 0$: $1 - 3e^{3t} = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}$ paraméterű pontban lehet lok. szé. 2

$x_0 = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{3} + \underbrace{e^{\frac{2}{3}\ln\frac{1}{3}}}_{\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}$ 1

$f''(x_0) < 0$ miatt x_0-ban lok. min. van. 2

6. feladat (5 pont)*

Mit nevezünk az $[a, b]$ intervallum egy felosztásának, integrálközelítő összegének, illetve alsó összegének!
(A használt jelölések tartalma derüljön ki!)

1 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots x_n = b$; $I_k = [x_{k-1}, x_k]$
$[a,b]$ egy felosztása: $F = \{I_k : k = 1, 2, \dots n\}$

$\sigma_F = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x_k}$ 1 ; $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 1 $\quad$ i.k.ö.

$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ 1 , $m_k = \inf_{x \in I_k}\{f(x)\}$ 1 $\quad$ a.ö.

7. feladat (16 pont)*
Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 10}}\, dx = ?$ $\qquad$ b) $\int_{-2}^{1} \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+10}}\, dx = ?$

c) $\int (x+1)^2 \ln x \, dx = ?$

$\boxed{4}$ a.) $\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2 + 9}}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{3}\,\frac{\operatorname{arsh}\frac{2x+1}{3}}{\frac{2}{3}} + C$ 1 1 1 1

$\boxed{4}$ b.) $\frac{1}{4}\int_{-2}^{1} \underbrace{4(2x+1)}_{f'}\,\underbrace{(4x^2+4x+10)^{-\frac{1}{2}}}_{f^{\alpha}}\, dx = \frac{1}{4}\left.\frac{\sqrt{4x^2+4x+10}}{\frac{1}{2}}\right|_{-2}^{1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{18} - \sqrt{18}\right) =$ 1 2 1

$\boxed{8}$ c.) $\int (x+1)^2 \ln x \, dx = I_c$

2 $u' = (x+1)^2$, $v = \ln x$; $u = \frac{(x+1)^3}{3}$, $v' = \frac{1}{x}$ $\qquad \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$ 1

$I_c = \frac{(x+1)^3}{3}\ln x - \int \underbrace{\frac{(x+1)^3}{3}\,\frac{1}{x}}_{\frac{1}{3}x^2 + x + 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x}} dx = \frac{(x+1)^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\ln|x| + C$ 1 2 2

8. feladat (10 pont)*

$I := \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx = ?$, $\quad e^x = t$ helyettesítéssel dolgozzon!

$e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$ 1

$F = \int \frac{t+1}{t-1}\,\frac{1}{t}\,dt = \int\left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t}\right)dt = \int\left(\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt = 2\ln|t-1| - \ln|t| + C$ 2 1 2

$t + 1 = At + B(t-1)$ 1
$t = 0$: $B = -1$ 1
$t = 1$: $A = 2$ 1

$I = F|_{t=e^x} = 2\ln|e^x - 1| - \ln e^x + C = \ln(e^x - 1)^2 - x + C$ 1

9. feladat (7 pont)*

a) $\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx = ?$

b) Konvergens-e az alábbi integrál?

$$\int_0^\infty \sin x\, e^{\cos x}\, dx = ?$$

a.) $\int \sin x\, e^{\cos x} dx = -\int \underbrace{-\sin x\, e^{\cos x}}_{f' e^f} dx = -e^{\cos x} + C$ (2)

b.) $\int_0^\infty \sin x\, e^{\cos x} dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega \sin x\, e^{\cos x} dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[-e^{\cos x}\right]_0^\omega =$ (1)

$= \lim_{\omega\to\infty} \left(-e^{\cos\omega} + e\right) =$ nem létezik, mert (1) (1)

$\omega_n^{(1)} = 2n\pi \to \infty : e^{\cos \omega_n^{(1)}} = e \to e$

$\omega_n^{(2)} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty : \quad e^{\cos \omega_n^{(2)}} = 1 \to 1 \neq e$ (2)

Pótfeladatok (csak az elégséges (indokolt! esetben a közepes) vizsgához javítjuk ki):

10. feladat (8 pont)

Deriválja az alábbi függvényeket!

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{e^{3x}+1}{e^{-2x}+3}, \qquad g(x) = (4x^2+1)^x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{e^{3x}+1}{e^{-2x}+3}\right)^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{3x}}{e^{-2x}+3}\right)'}_{\frac{3e^{3x}(e^{-2x}+3) - (e^{3x}+1)e^{-2x}(-2)}{(e^{-2x}+3)^2}}$$ (4)

$$g(x) = e^{x \ln(4x^2+1)}$$

$$g'(x) = e^{x\ln(4x^2+1)} \cdot \underbrace{\left(x \cdot \ln(4x^2+1)\right)'}_{1\cdot \ln(4x^2+1) + x\frac{8x}{4x^2+1}}$$ (4)

11. feladat (12 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n^2+2}{n^2+4}\right)^{n^2}}_{:=a_n} = ?$ b) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n^2+2}{n^2+4}\right)^{n^3}}_{:=b_n} = ?$

a.) $a_n = \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}} \longrightarrow \frac{e^2}{e^4} = \frac{1}{e^2} \,(<1)$ (5)

$b_n = a_n^n$ miatt 0 határértéket várunk.

Rendőrelvvel: $\frac{1}{e^2} - 0{,}1 < a_n < \frac{1}{e^2} + 0{,}1 < 1$, ha $n > N_1$ miatt

$$\underbrace{\left(\frac{1}{e^2} - 0{,}1\right)^n}_{\downarrow\, 0} < b_n < \underbrace{\left(\frac{1}{e^2} + 0{,}1\right)^n}_{\downarrow\, 0}$$

$\Longrightarrow b_n \to 0$. (7)

($0 < b_n$ is elég lenne a bal oldalon.)