1. vizsga

A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. a) Mit jelent az (definíció szerint), hogy az $A, B, C \subset \Omega$ események együttesen függetlenek?

   b) Mondjuk ki a centrális határeloszlás tételét.

2. A Geysir nevű gejzír Izland egyik látványossága. Ez volt az első gejzír a történelemben, aminek a leírása nyomtatott formában megjelent, sőt (illetve ennek köszönhetően), maga a gejzír szavunk is a Geysir névből származik. A turisták közül ugyanakkor csak keveseknek van türelmük kivárni a kitöréseit, ugyanis ezek meglehetősen ritkák. Tegyük fel, hogy a kitörésig eltelő idő (órákban mérve) folytonos, örökifjú eloszlást követ, 8 óra várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy egy turista a várakozás kezdetétől számolva fél órán belül láthat egy kitörést? Mi a valószínűsége, hogy összesen 1 óránál többet kell várnia a kitörésig, ha tudjuk, hogy a várakozás első fél órájában a Geysir nem tört ki?

3. Legyen $X \sim N(1; 4)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(1 < X^2 < 4)$ valószínűséget.

4. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, amelyből egy érték hiányzik. Határozzuk meg X és Y kovarianciáját.

Y \ X	0	1	2
0	1/3	1/5	
2	1/15	2/15	1/5

5. Egy bevásárlóközpont látogatóiról felmérést készítenek, és néhány véletlenszerűen választott vásárlóval kitöltetnek egy kérdőívet, melyen többek között megkérdezik a korukat is. A válaszadók a következő adatokat adták meg: 23, 19, 16, 56, 37, 16, 23, 22 év. Számoljuk ki mintaátlagot és a korrigált tapasztalati szórást, illetve határozzuk meg a mintához tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt.

6. Egy normális eloszlású, 4 szórású minta alapján 95%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot számoltunk a háttéreloszlás várható értékére, és eredményül a $(3{,}04; 6{,}96)$ intervallumot kaptuk.

   a) Határozzuk meg a minta elemszámát.

   b) Határozzuk meg az ugyanezen mintához tartozó 99%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot is a várható értékre. (Elegendő két tizedesjegyre kerekített értékeket megadni.)

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$\mathbb{P}(X = k)$ v. $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$1 - p$, p	-	p	$p(1 - p)$
binomiális	$B(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	-	np	$np(1 - p)$
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1 - p)^{k-1} p$	-	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$Exp(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$N(\mu; \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

A Student-eloszlás kvantiliseinek táblázata

	Szignifikanciaszint $(1-\varepsilon)$				
Szabadsági fok	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	**6,314**	**12,706**	**31,821**	**63,657**	**636,619**
2	**2,920**	**4,303**	**6,965**	**9,925**	**31,599**
3	**2,353**	**3,182**	**4,541**	**5,841**	**12,924**
4	**2,132**	**2,776**	**3,747**	**4,604**	**8,610**
5	**2,015**	**2,571**	**3,365**	**4,032**	**6,869**
6	**1,943**	**2,447**	**3,143**	**3,707**	**5,959**
7	**1,895**	**2,365**	**2,998**	**3,499**	**5,408**
8	**1,860**	**2,306**	**2,896**	**3,355**	**5,041**
9	**1,833**	**2,262**	**2,821**	**3,250**	**4,781**
10	**1,812**	**2,228**	**2,764**	**3,169**	**4,587**
11	**1,796**	**2,201**	**2,718**	**3,106**	**4,437**
12	**1,782**	**2,179**	**2,681**	**3,055**	**4,318**
13	**1,771**	**2,160**	**2,650**	**3,012**	**4,221**
14	**1,761**	**2,145**	**2,624**	**2,977**	**4,140**
15	**1,753**	**2,131**	**2,602**	**2,947**	**4,073**
16	**1,746**	**2,120**	**2,583**	**2,921**	**4,015**
17	**1,740**	**2,110**	**2,567**	**2,898**	**3,965**
18	**1,734**	**2,101**	**2,552**	**2,878**	**3,922**
19	**1,729**	**2,093**	**2,539**	**2,861**	**3,883**
20	**1,725**	**2,086**	**2,528**	**2,845**	**3,850**
21	**1,721**	**2,080**	**2,518**	**2,831**	**3,819**
22	**1,717**	**2,074**	**2,508**	**2,819**	**3,792**
23	**1,714**	**2,069**	**2,500**	**2,807**	**3,768**
24	**1,711**	**2,064**	**2,492**	**2,797**	**3,745**
25	**1,708**	**2,060**	**2,485**	**2,787**	**3,725**
26	**1,706**	**2,056**	**2,479**	**2,779**	**3,707**
27	**1,703**	**2,052**	**2,473**	**2,771**	**3,690**
28	**1,701**	**2,048**	**2,467**	**2,763**	**3,674**
29	**1,699**	**2,045**	**2,462**	**2,756**	**3,659**
30	**1,697**	**2,042**	**2,457**	**2,750**	**3,646**
40	**1,684**	**2,021**	**2,423**	**2,704**	**3,551**
50	**1,676**	**2,009**	**2,403**	**2,678**	**3,496**
60	**1,671**	**2,000**	**2,390**	**2,660**	**3,460**
80	**1,664**	**1,990**	**2,374**	**2,639**	**3,416**
100	**1,660**	**1,984**	**2,364**	**2,626**	**3,390**
500	**1,648**	**1,965**	**2,334**	**2,586**	**3,310**

A sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998