A411

2021. november 25., csütörtök 8:40

A411

A4 Valószínűségszámítás — XI. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. november 25.

ZH 1. feladat

1) Ausztráliában az egy háztartásra jutó skorpiótámadások száma átlagosan évente 5. A támadások egymástól függetlenek, és egyszerre csak egy skorpió támad. Mi a valószínűsége, hogy

- a) fél éven belül több mint 3 támadás lesz? (2p)
- b) két egymás utáni támadás között több, mint 3 hónap telik el? (2p)
- c) ha eltelt már egy hónap támadás nélkül, akkor még 2 hónapig nem lesz? (2p)
- d) a 4. támadás az 5. hónap után lesz? (2p)

POISSON FOLYAMAT

$\lambda t = 5 \cdot \frac{1}{2}$

$X \sim \text{Poisson}(5)$

$P(X>3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - \left(\frac{2{,}5^0}{0!} + \frac{2{,}5^1}{1!} + \frac{2{,}5^2}{2!} + \frac{2{,}5^3}{3!}\right)e^{-2{,}5}$

$Y \sim \text{EXP}(5)$ $P(Y > \frac{1}{4}) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{4}}) = e^{-\frac{5}{4}}$

$P(Y > 3 \mid Y > 1) \overset{\text{örökifjúság}}{=} P(Y > 2) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{6}}) = e^{-\frac{5}{6}}$

$Z \sim \text{Erlang}(4, \frac{5}{12})$ $P(Z > 5) = 1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{(5 \cdot \frac{5}{12})^k}{k!} e^{-\frac{25}{12}}\right)$

ZH 2. feladat

2) Az $x^2 + Bx + 1 = 0$ egyenlet megoldásai között milyen valószínűséggel lesz valós, ha B normális eloszlású 7 várható értékkel és 1 szórással?(3p)

$B \sim N(7, 1)$

$B^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \ge 0$

$B^2 \ge 4$

$B \ge 2$ v. $B \le -2$

$P(B \ge 2) = P(\underset{N(0,1)}{Z} \ge \frac{2-7}{1})$
$= 1 - \Phi(-5) = 1 - (1 - \Phi(5)) = \Phi(5) \approx 1$

$P(B \le -2) = P(Z \le \frac{-2-7}{1}) = \Phi(-9) = 0$

$\oplus = \underline{\underline{1}}$

ZH 3. feladat

3) Legyen $X, Y \sim Uni(0, 1)$ (egyenletes eloszlásúak) függetlenek.

d.) EXTRA

ZH 3. feladat

3) Legyen $X, Y \sim Uni(0, 1)$ (egyenletes eloszlásúak) függetlenek.

- a) Mennyi az $f_{X+Y}(s)$ konvolúciós függvény?(6p)
- b) Mennyi $f(x, y), E(X|Y), CORR(X, Y) =?$ (3p)
- c) (extra) Milyen valószínűséggel lesznek $f(w) = -(w - X)^2 - Y$ parabola gyökei nemnegatívak? (Itt w az algebrai változó, X, Y a parabola paraméterei valváltozók.)(+4p)

$0<s<2$

$0<s-x<1$

$s-1<x<s$

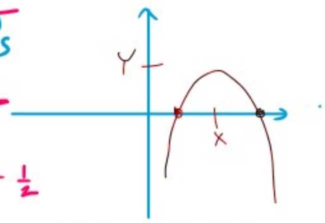
$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(s-x)\, dx \quad \nearrow \int_0^s 1\, dx = s \qquad \searrow \int_{s-1}^{1} 1\, dx = 2-s$$

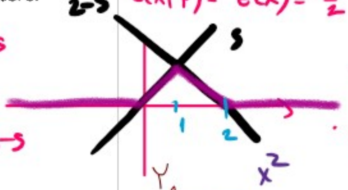
d.)

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) = 1\cdot 1 = 1$$

$$CORR(X,Y) = 0$$

$$E(X|Y) = E(X) = \frac{1}{2}$$





$$-w^2 - X^2 + 2Xw + Y = 0$$

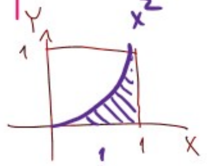
$$w_{1,2} = \frac{-2X \pm \sqrt{4X^2 + 4(Y - X^2)}}{-2}$$

$$\nearrow \frac{-2x + 2\sqrt{Y}}{-2} = X - \sqrt{Y} > 0$$

$$\searrow \frac{-2X - 2\sqrt{Y}}{-2} = -X + \sqrt{Y} > 0$$

$X > \sqrt{Y}$ $\quad -X < \sqrt{Y}$ $\quad X^2 > Y$

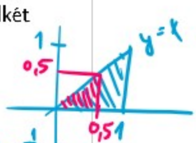
$X > -\sqrt{Y}$



$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

ZH 4. feladat

4) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = c \cdot x^2$ a $0 < x < 1, 0 < y < x$ tartományon. Számold ki a c-t. Mennyi X várható értéke, Y feltételes várható értéke és hogy mindkét változó értéke kisebb mint 0.5?
$(E(X), E(Y|X), P(X < 0.5, Y < 0.5) =?$ (6p)



$$P(X<\tfrac12, Y<\tfrac12) = \int_0^{0,5}\int_0^{x} 4x^2\, dy\, dx = \int_0^{0,5} 4x^3\, dx$$

$$\left[x^4\right]_0^{0,5} = \frac{1}{16}$$

$$f(x,y) = 4x^2$$

$$\int_0^1\int_0^x c\cdot x^2\, dy\, dx = \int_0^1 \left[cx^2 y\right]_0^x dx = \int_0^1 cx^3\, dx = \left[\frac{cx^4}{4}\right]_0^1 = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$$

$$f_1(x) = \int_0^x 4x^2\, dy = \left[4x^2 y\right]_0^x = 4x^3 \qquad f_{2|1}(y|x) = \frac{4x^2}{4x^3} = \frac{1}{x}$$

$$E(X) = \int_0^1 4x^3\cdot x = \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

$$E(Y|X) = \int_0^x \frac{1}{x}\cdot y\, dy = \left[\frac{y^2}{2x}\right]_0^x = \frac{x}{2}$$

ZH 5. feladat

5) Egy légitársaságnál 2-motoros és 4-motoros gépek is vannak. Egy repülő akkor tud felszállni, ha a motorjainak **több, mint fele működik**. A motorok egymástól függetlenül 0.5 − 0.5 valószínűséggel működnek.

- a) A kétféle gép közül melyik a valószínűbb, hogy felszáll?
- b) Ha kiválasztunk egy 2-motoros és egy 4-motoros gépet, és a szerelő emlékezete szerint összesen 3 motor működik (de arra nem emlékszik, melyikek), akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan egy repülő fel tud szállni a kettő közül?

2M $\qquad$ 4 M

$Binom(2, \frac12)$ $\qquad$ $Binom(4, \frac12)$

$$\binom{2}{2}\cdot\left(\frac12\right)^2\cdot\left(\frac12\right)^0 = \frac14 \;<\; \binom{4}{3}\cdot\left(\frac12\right)^3\cdot\frac12 + \binom{4}{4}\cdot\left(\frac12\right)^4 = \frac{5}{16}$$

$$b.)\; P = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{8}{\binom{6}{3}}$$

ZH 5. feladat folyt.

- c) A 2-motoros gépek alkotják a flotta 30%-át a 4-motorosok a maradékot. Ha egy gépről tudjuk, hogy működik, akkor mi a valószínűsége, hogy 2-motoros?
- d)(extra) Legyen p paraméter egy motor működésének valószínűsége. Milyen p-kre lesz valószínűbb, hogy a 4-motoros gép tud felszállni?

c.) Bayes tétel, teljes valség tétele

$P(\text{működik}) = 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}7 \cdot \frac{5}{16}$

$P(2M \mid \text{működik}) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}25}{0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}7 \cdot \frac{5}{16}}$

d.)

$\binom{2}{2}p^2(1-p)^0 < \binom{4}{3}p^3(1-p) + \binom{4}{4}p^4$

$p^2 < 4p^3 - 4p^4 + p^4$

$p^2(1-4p+3p^2) < 0$

$1-4p+3p^2 = 0$

$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6}$ ↗ 1, ↘ $\frac{1}{3}$

$p \in [1, \frac{1}{3}]$

Momentumgeneráló függvény (folytonos)

$$M_X(s) = E(e^{sx}) = \mathcal{L}\{f\}(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{sx}\,dx$$

A momentumgeneráló függvény

- egy várható érték s függvényében,
- Laplace transzformáltja a sűrűségfüggvény előjelcserélt változatának,
- és a sűrűségfüggvény/súlyfüggvény kölcsönösen meghatározzák egymást.

A momentumgeneráló függvény sorfejtésében a tagok együtthatói tényleg momentumok:

$$e^{sX} = 1 + sX + \frac{(sX)^2}{2!} + \frac{(sX)^3}{3!} + \dots$$

$$E(e^{sX}) = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}^{1} + \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot sx\,dx}^{E(X)} + \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot(sx)^2/2!\,dx}^{E(X^2)/2} +$$

$$+ \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot(sx)^3/3!\,dx}^{E(X^3)/6} \dots =$$

$$= 1 + sE(X) + \frac{s^2E(X^2)}{2!} + \frac{s^3E(X^3)}{3!} + \dots$$

$E(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(1 + sx + \frac{(sx)^2}{2!} + \dots\right)dx$

Momentumgeneráló függvény

$$M_X(s)^{(n)}(0) = E(X^n)$$

$$\frac{d}{ds}M(s) = \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds} e^{sx} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{sx} f(x)\,dx$$

$$\frac{d}{ds}M(s)|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = E(X)$$

$$\frac{d^n}{ds^n}M(s)|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = E(X^n)$$

Momentumgeneráló függvény (diszkrét)

$$M_X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{sk} P(X = k)$$

Példa
$X \sim Poisson(\lambda)$

$$M_X(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{sk} P(X = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{sk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^s} = e^{\lambda(e^s - 1)}$$

Karakterisztikus függvény (folytonos)

$$\Phi_X(\omega) = E(e^{i\omega X}) = \mathcal{F}\{f\}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x}\,dx$$

Ahol i a komplex $i = \sqrt{-1}$, $f(x)$ pedig az X sűrűségfüggvény-e.
A karakterisztikus függvény

- egy várható érték ω függvényében,
- Fourier transzformáltja a sűrűségfüggvény előjelcserélt változatának,
- és a sűrűségfüggvény kölcsönösen meghatározzák egymást:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) e^{-i\omega x}\,d\omega$$

Karakterisztikus függvény (diszkrét)

$$\Phi_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k) \cdot e^{i\omega k}$$

A diszkrét karakterisztikus függvény tehát Fourier transzformáltja a súlyfüggvény előjelcserélt változatának.
Itt is fent áll a a kölcsönös megfeleltetés:

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_X(\omega) e^{-i\omega k} \, d\omega$$

Példák

$$\left[\frac{\lambda}{-(\lambda-i\omega)} e^{-(\lambda-i\omega)x}\right]_0^{\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\lambda}{-(\lambda-i\omega)} e^{-(\lambda-i\omega)x}}_{0} - \frac{\lambda}{-(\lambda-i\omega)}$$

$X \sim Exp(\lambda)$

$$\Phi_X(\omega) = \int_0^{\infty} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f(x)} e^{i\omega x} \, dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda - i\omega)x} \, dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\omega}$$

$X \sim Geom(p)$

$$\Phi_X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{p(1-p)^k}_{P(X=k)} e^{i\omega k} = \underbrace{p \sum_{k=0}^{\infty} (\overbrace{(1-p)e^{i\omega}}^{q})^k}_{\frac{1}{1-q}} =$$

$$= \frac{p}{1 - (1-p)e^{i\omega}}$$

Mi az összefüggés a karakterisztikus és a momentumgeneráló függvény között?

Ha $M_X(s) < \infty$ minden $s \in (-\epsilon, \epsilon)$-ra akkor

$$\Phi_X(\omega) = M_X(i\omega)$$

azaz, ha a valváltozó momentumai léteznek (végesek) akkor megfeleltethető a karakterisztikus függvénynek.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \, dx$$

sokszor ez nem létezik vagy ∞

KARAKTERISZTIKUS MINDIG LÉTEZIK!

Továbbá

- Ha $Y = aX + b$ akkor $\Phi_Y(\omega) = e^{ib\omega}\Phi_X(a\omega)$ ill. $M_Y(s) = e^{bs}M_X(as)$
- Ha X, Y független valváltozók és $Z = X + Y$ akkor $\Phi_Z(\omega) = \Phi_X(\omega) \cdot \Phi_Y(\omega)$ ill. $M_Z(s) = M_X(s) \cdot M_Y(s)$

Azaz az összegből szorzat lesz, ahogy a Fourier/Laplace transzformációnál illik.

Minek van két külön függvény?

Példák

$X_1, X_2, \dots X_n$ független Bernoulli valváltozók p paraméterrel.
Ekkor $W = X_1 + X_2 + \dots X_n \sim Binom(n, p)$

$$M_{X_i}(s) = (\underbrace{1-p}_{P(X=0)}) \cdot e^{0} + \underbrace{p}_{P(X=1)} e^{1 \cdot s}$$

$$M_W(s) = M_{X_1}(s) \cdot M_{X_2}(s) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(s)$$

$$M_W(s) = ((1-p)e^{0s} + pe^{1s})^n$$

Két különböző paraméterű Poisson összege is Poisson:
$X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$, $Z = X + Y$
$M_X(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$, $M_Y(s) = e^{\mu(e^s-1)}$

$$M_Z(s) = e^{\lambda(e^s-1)} e^{\mu(e^s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^s-1)} \sim Poisson(\lambda+\mu)$$

Normális eloszlás karakterisztikus függvénye

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, dx =$$

$$= \frac{e^{-i\omega\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2} \cos\omega(x-\mu) \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2} \sin\omega(x-\mu) \, dx \right) = e^{i\omega\mu-(\sigma^2\omega^2/2)}$$

Ha X standard normális változó:

$$\Phi_X(\omega) = e^{-\omega^2/2}$$

Azaz a Normális eloszlás karakterisztikus függvénye is Normális.

Két normális konvolúciója

Legyen $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ *és* $Z = X + Y$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1} e^{-(z-x-\mu_2)^2/2\sigma_2}\, dx =$$

X, Y független normálisok

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2}\right)} e^{\frac{\mu_2 - y}{\sigma_2^2} - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) \cdot \left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} / 2\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right)}$$

Ami nem más, mint egy újabb normális eloszlás $\mu_1 + \mu_2$ várható értékkel és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ varianciával.

2D Normális

A 2D Normális sűrűségfüggvénye a következő:

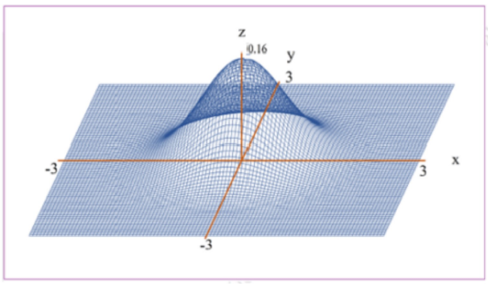
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{(1-r^2)}}$$

ahol $r = CORR(X,Y)$. A 2D Normális eloszlásnál ha $CORR(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ függetlenek.
Ekkor a 2D Normális előáll, mint 2 Normális szorzata:

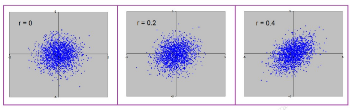
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

!

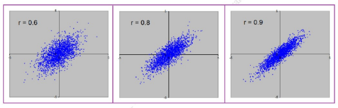
2D Normális



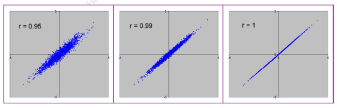
2D Normális korreláció



67. ábra. *Standard normális pontfelhő* 0 , 0.2 , 0.4 *korrelációval*



68. ábra. *Standard normális pontfelhő* 0.6 , 0.8 , 0.9 *korrelációval*



69. ábra. *Standard normális pontfelhő* 0.95 , 0.99 , 1 *korrelációval*

2 korrelált Normális összege

Legyen $X, Y \sim N(0,1)$ *és* $\underbrace{CORR(X,Y)}_{\rho} = -0.5$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[x^2 - 2\rho x(z-x) + (z-x)^2]/2(1-\rho^2)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(3/4)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - xz + z^2)/2(3/4)}\, dx\,.$$

Ekkor

$$f_{X+Y}(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Tehát két nem független Standard Normális összege is Standard Normális eloszlású.

Zaj karakterizáció

Vernon D. Landon **villamosmérnök** a 40-es években kommunikációs áramkörökben előforduló zajt tanulmányozta. A megfigyelések alapján úgy tűnt, az $x(t)$ zajfeszültség általános jellemzői egyformák (még ha teljesen különböző forrásból erednek is: természetes, asztrofizikai, vákuumcsövek, kondenzátorok, ellenállások, etc.).
Korábban, amikor mérnökök próbálták karakterizálni zajfeszültséget, különböző források alapján tették azt. Landon rájött, hogy a zaj sokkal univerzálisabb ennél: elég a szórás (σ) a zaj karakterizációjához.

Landon-derivált

Tegyük fel, hogy $p(x, \sigma^2)$ a zajfeszültség sűrűségfüggvénye. Legyen továbbá Δx pici, σ-hoz képest, Δx sűrűségfüggvénye $q(\Delta x)$ független $p(x, \sigma^2)$-től.
$x' = x + \Delta x$. Ekkor x' sűrűségfüggvénye konvolúcióból adódik:

konvolúció

$$f(x') = \int p(x' - \Delta x) q(\Delta x) d(\Delta x)$$

Ha ezt sorba fejtjük: (Δx) szerint

$$f(x) = p(x, \sigma^2) - \frac{\partial p(x, \sigma^2)}{\partial x} \overbrace{\int \Delta x q(\Delta x) d(\Delta x)}^{E(\Delta x)} +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x, \sigma^2)}{\partial x^2} \overbrace{\int (\Delta x)^2 q(\Delta x) d(\Delta x)}^{E(x^2)} + \ldots$$

Landon-derivált

Feltehetjük, hogy $E(\Delta x) = 0$ és $E((\Delta x)^k) = o(E((\Delta x)^2))$ azaz a magasabb momentumok elhanyagolhatóak.

$$f(x) = p(x, \sigma^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x, \sigma^2)}{\partial x^2} \int (\Delta x)^2 q(\Delta x) d(\Delta x) + o(E((\Delta x)^2))$$

Közben a variancia megemelkedett: $\sigma^2 + D^2(\Delta x)$, így

$$f(x) = p(x, \sigma^2 + D^2(\Delta x))$$

$$f(x) = p(x, \sigma^2) + D^2(\Delta x) \frac{\partial^2 p(x, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} + o(E((\Delta x)^2))$$

Landon-derivált

Ez a következő egyenletet adja nekünk:

$$\frac{p(x, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x, \sigma^2)}{\partial x^2}$$

Ami nem más, mint a diffúziós egyenlet, amit a $\sigma^2 = 0$ kezdeti feltételre megoldva:

$$p(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Azaz a Standard Normális sűrűségfüggvénye.

Miért a Normális?

- CHT: tetszőleges valváltozók (azonos eloszlással és véges várható értékkel, szórással) összege Normálishoz gravitál,
- Normális Fourier transzformáltja Normális (a karakterisztikus függvénye Normális),
- Két Normális szorzata Normális,
- Két Normális konvolúciója Normális,
- A konvolúciónak, mint operátornak fixpontja a Normális,
- Landon-derivált,
- A Normális maximalizálja az entrópiát,
- A Normális minimalizálja a Fisher információt.

köv. órán

Irodalomjegyzék

- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering
- Sheldon M. Ross —Introduction To Probability and Statistics for Engineers and Scientists
- Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis —Introduction to Probability
- Kiseon Kim, Georgy Shwvlyakov —Why Gaussianity?
- E. T. Jaynes —Probability Theory - The Logic of Science

Köszönöm a figyelmet!