Villamos MSc MatA vizsgakurzus 3. vizsga javítókulcs 2013.06.13 -1- Mogyi

(1) Legyen Z_k az egyenesági fiú leszármazottak száma a k. generációban. Ekkor Z_k elágazó folyamat, aminek egylépéses utódszám-eloszlása $Bin(3;\frac{1}{2})$, vagyis

k	0	1	2	3
$P(k$ ~~utód~~ fiúgyerek$)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

, ennek generátorfüggvénye $g(z)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}z+\frac{3}{8}z^2+\frac{1}{8}z^3$, és $Z_0\equiv 1$.

a.) $P(Z_2=0)=g_2(0)=g(g(0))=g\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3=\boxed{\frac{729}{4096}}\approx 0.178$

b.) $P(\text{kihalás})$ a $g(z)=z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke:

$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}z+\frac{3}{8}z^2+\frac{1}{8}z^3=z \qquad /\cdot 8\ ;\ -8z$

$z^3+3z^2-5z+1=0 \qquad z=1$ persze megoldás, mint mindig, ezért $(z-1)$-et ki lehet emelni

$(z-1)(z^2+4z-1)=0$

$z=1$ vagy $z=\frac{-4\pm\sqrt{4^2+4}}{2}=\frac{\pm\sqrt{5}-2}{2}$

Vagyis a legkisebb nemnegatív gyök $\boxed{P(\text{kihalás})=\frac{\sqrt{5}-2}{2}\approx 0.118=11.8\%}$

(2) Legyen $n=200$ és $X_1,X_2,\dots,X_n$ az egyes utasok csomagjainak tömege kg-ban, és $S_n=X_1+\dots+X_n$. Minden X_i korlátos: $a_i\le X_i\le b_i$, ahol $a_i=0,\ b_i=20\ (i=1,\dots,150)$

$a_i=20,\ b_i=40\ (i=151,\dots,200)$

és a várható értékek ismertek: $EX_i=8\ (i=1,\dots,150)$, $EX_i=30\ (i=151,\dots,200)$ $\Rightarrow ES_n=150\cdot 8+50\cdot 30=2700$

Feltesszük, hogy az X_i-k függetlenek.

A Hoeffding-egyenlőtlenség szerint

$$P(S_n>3500)\underset{\text{választással}}{\overset{t=800}{=}}P(S_n\ge ES_n+t)\le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right)=$$

$$=\exp\left(-\frac{2t^2}{150\cdot(20-0)^2+50\cdot(40-20)^2}\right)=\exp\left(-\frac{2\cdot 800^2}{200\cdot 20^2}\right)=\exp\left(-\frac{2^7\cdot 10^4}{2^3\cdot 10^4}\right)=e^{-16}$$

vagyis $\boxed{P(S_n>3500)\le e^{-16}\approx 1.125\cdot 10^{-7}}$

③ Az $1 \to 2$ ugrás rátája az egyetlen égő kiégési rátája, vagyis az 1000 várható értékű Exp eloszlás paramétere: $\lambda_{12} = \frac{1}{1000}$.
A $2 \to 1$ ugrás rátája viszont ennek kétszerese, mert két égő bármelyike kiéghet. Így $\lambda_{21} = \frac{2}{1000}$, és az első $2 \to 1$ ugrás időpontja

$$\tau \sim Exp\left(\frac{2}{1000}\right)$$

a.) $$P(\tau > 10) = 1 - P(\tau < 10) = 1 - F_\tau(10) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{2}{1000}\cdot 10}\right] = e^{-0.02} \approx \underline{\underline{0.9802}}$$

$$= \underline{\underline{98.02\,\%}}$$

b.) $$G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1000} & \frac{1}{1000} \\ \frac{2}{1000} & -\frac{2}{1000} \end{pmatrix}$$

c.) $t = 10000$-t hosszú időnek tekintem, ezért az eloszlást $t = 10000$-kor a stacionárius eloszlással közelítem (mert a ML irreducibilis és véges állapotterű). Ehhez a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{1000} & \frac{2}{1000} & 0 \\ \frac{1}{1000} & -\frac{2}{1000} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

vagyis $-\pi_1 + 2\pi_2 = 0$, $\pi_1 = 2\pi_2$

$$(2 \quad 1) \parallel \underline{\underline{\pi = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)}}$$

így $P(X_{10000} = 1 \mid X_0 = 2) \approx \underline{\underline{\pi_1 = \frac{2}{3}}}$

d.) $f(i)$ legyen az 1 órára eső költség Ft-ban, ha ~~4~~ i égő működik, vagyis $f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/1000 \cdot 60 \\ 90/1000 \cdot 60 \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ mert $45 \frac{Ft}{kWh} \cdot 60W = \frac{45 \cdot 60}{1000} \frac{Ft}{h}$.

~~π~~ f időátlaga hosszú távon az ergodtétel szerint $\bar{f} = \sum_{i=1}^{2} \pi_i f(i) = \pi \cdot f = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 45/1000 \cdot 60 \\ 90/1000 \cdot 60 \end{pmatrix} = 3.6$

vagyis az átlagos költség hosszú távon $\underline{3.6 \frac{Ft}{óra}}$

(4) A 6-osig szükséges dobások száma $X \sim Geom(p)$, ahol p az ismeretlen paraméter = a 6-os valsége — Pistike ebből vett $n=10$-elemű mintát. Vagyis $p(k) = P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $(k=1,2,\ldots)$.

A likelyhood-függvény

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1}, \text{ ennek logaritmusa}$$

$$\ell(p) = \ln L(p) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln p + (x_i-1)\ln(1-p)\right] = n\left[\ln p - \ln(1-p)\right] + \ln(1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ennek keressük a maximumát, ehhez

$$0 := \ell'(p) = n\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right] - \frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\cancel{\frac{1}{1-p}}\sum_{i=1}^{n} x_i = n\,\frac{\cancel{1-p+p}}{p\cancel{(1-p)}} \qquad \boxed{p = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

az egyetlen stac. hely, így ez a globális maximum-hely is.

Esetünkben $x_1, \ldots, x_{10} = 3; 4; 3; 15; 7; 1; 5; 4; 2; 6$,

vagyis $\sum_{i=1}^{n} x_i = 50$, és $\boxed{p_{ML} = \frac{10}{50} = 0.2}$

(5) Illeszkedésvizsgálatot végzünk:

kísérlet eredménye	nem 6-os	6-os	össz
találatok száma: ν_i	40	10	50 = n
elméleti val.ség: p_i	5/6	1/6	1
sorszám: i	1	2	r = 2

$\varepsilon = 0.01$-hez keressük a $df = r-1 = 1$ szab. fokú χ^2-eloszlás farok-percentilisét:

$K_\varepsilon = 6.635$

a próba-statisztika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{\left(40-50\cdot\frac{5}{6}\right)^2}{50\cdot\frac{5}{6}} + \frac{\left(10-50\cdot\frac{1}{6}\right)^2}{50\cdot\frac{1}{6}} = \frac{(240-250)^2}{6\cdot 50\cdot 5} + \frac{(60-50)^2}{6\cdot 50} =$$

$$= \frac{10^2}{6\cdot 50\cdot 5} + \frac{10^2}{6\cdot 50}\cdot\frac{5}{5} = \frac{\cancel{6}00}{\cancel{6}\cdot 50\cdot 5} = 0.4$$

Döntés: $\chi^2 = 0.4 < 6.635 = K_\varepsilon \Rightarrow$ a hipotézist $\boxed{\text{ELFOGADJUK}}$