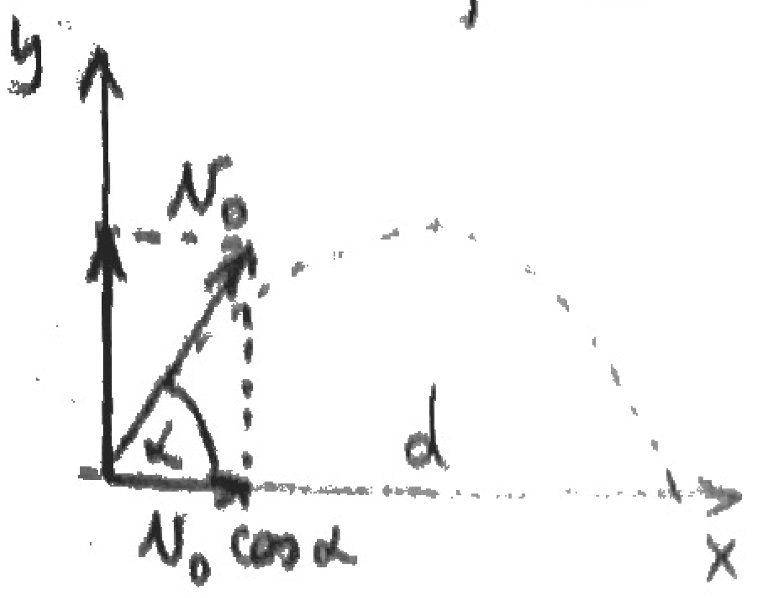
Ismétlés:

Ferde hajítás



$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_0\cos\alpha \\ v_y(t) &= v_0\sin\alpha - gt \\ x(t) &= v_0\cos\alpha\, t \\ y(t) &= v_0\sin\alpha\, t - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned}\right\}$$

Hajítás távolsága:

$$y(t_{rep}) = \left(v_0\sin\alpha - \frac{g}{2}t_{rep}\right)t_{rep} = \phi$$

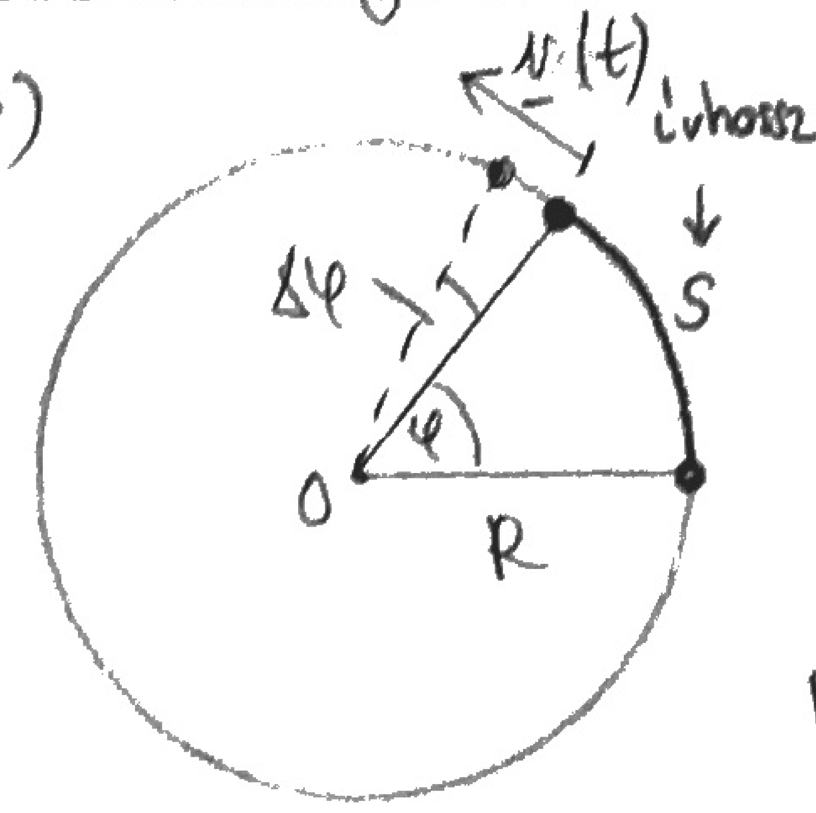
$$t_{rep} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

maximális $\alpha = 45°$-nál.

$$d = x(t_{rep}) = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$

I. Körmozgás kinematikája

1.)



pálya: kör

A pont helyzetének jellemzése:

$$\varphi = \frac{s}{R} \quad \left(\frac{[m]}{[m]} = [rad]\right)$$

Megjegyzés: $1\ rad = \frac{180°}{\pi}$.

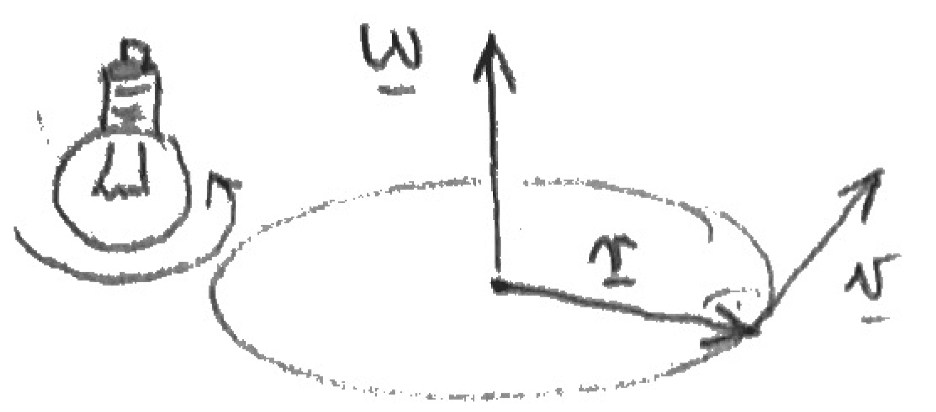
2.) A mozgás gyorsaságának jellemzése:

Szögsebesség: $\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ $\left(\left[\frac{rad}{s} = \frac{1}{s}\right]\right)$

kerületi sebesség:

$$|\underline{v}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\cdot\omega.$$

3.) A szögsebességvektor



$$\underline{v} = \underline{\omega}\times\underline{r}$$

(jobbkézszabály)

4.) Fordulatszám, periódusidő

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi/2\pi}{\Delta t} \leftarrow$$

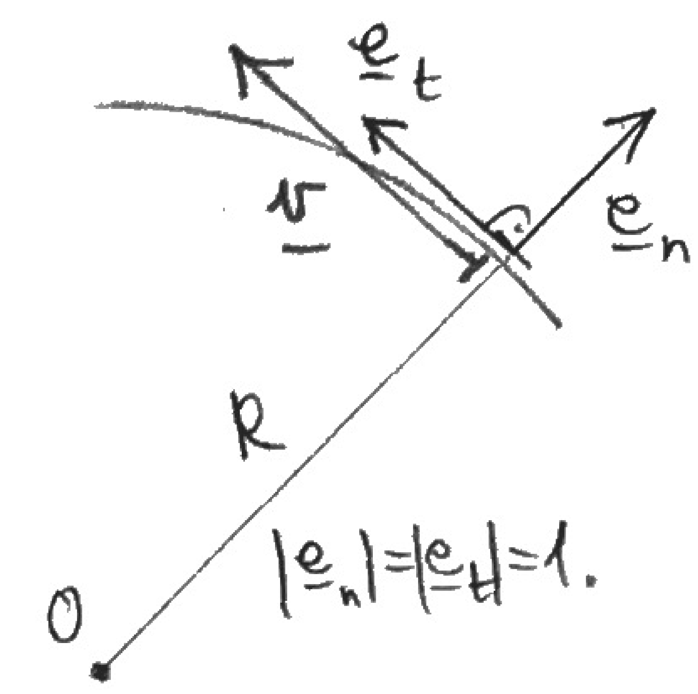
Δt idő alatt az egész fordulat hányadrészét teszi meg a test

Egyenletes (ω = áll.) körmozgásnál:

$$f = \frac{2\pi/2\pi}{T} \leftarrow$$ 2π szögelfordulás ideje, periódusidő.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \quad \left(\left[\frac{1}{s} = Hz\right]\right) \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad ([s])$$

5.) Gyorsulás általános körmozgásnál.



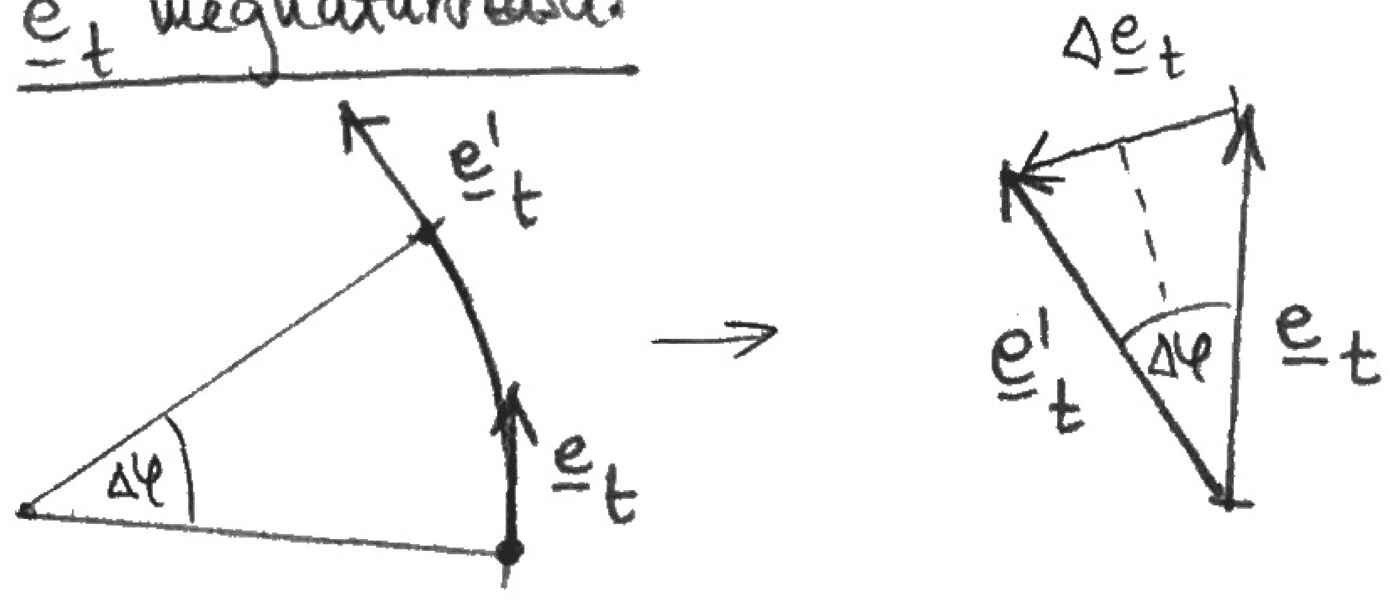
$$\underline{v} = |\underline{v}|\cdot\underline{e}_t = v\cdot\underline{e}_t$$

$$\underline{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\underline{v}}{\Delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \dot{\underline{v}}$$

$$\underline{a} = \dot{v}\cdot\underline{e}_t + v\cdot\dot{\underline{e}}_t$$

jelentése: $\frac{d}{dt}|\underline{v}|$

$\dot{\underline{e}}_t$ meghatározása:



$\Delta\underline{e}_t$ nagysága:

$$|\Delta\underline{e}_t| \simeq 2|\underline{e}_t|\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\cdot 1\cdot\frac{\Delta\varphi}{2},$$

ezért: $$|\dot{\underline{e}}_t| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\underline{e}_t|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$$

$\Delta\underline{e}_t$ iránya: a kör középpontja ($-\underline{e}_n$) felé mutat,

Összefoglalva: $$\dot{\underline{e}}_t = \frac{d\underline{e}_t}{dt} = -\underline{e}_n\,\omega,$$

ezzel a gyorsulás:

$$\underline{a} = \underbrace{\dot{v}\,\underline{e}_t}_{\substack{\text{tangenciális} \\ \text{(érintőirányú)}}} \underbrace{-\,\underline{e}_n\, v\cdot\omega}_{\substack{\text{centripetális} \\ \text{(kör középpontja} \\ \text{felé mutat)}}} = a_t\cdot\underline{e}_t - a_{cp}\cdot\underline{e}_n$$

6.) Egyéb összefüggések.

a.) centripetális gyorsulás:

$$\boxed{a_{cp} = |-\underline{e}_n v\omega| = v\omega = v\cdot\frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}}$$

másképp:

$$\boxed{a_{cp} = v\omega = R\cdot\omega\cdot\omega = R\cdot\omega^2}$$

b.) tangenciális gyorsulás:

$$a_t = \dot{v} = \frac{d}{dt}|\underline{v}| = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\cdot\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\text{szöggyorsulás}} = R\dot{\omega}$$

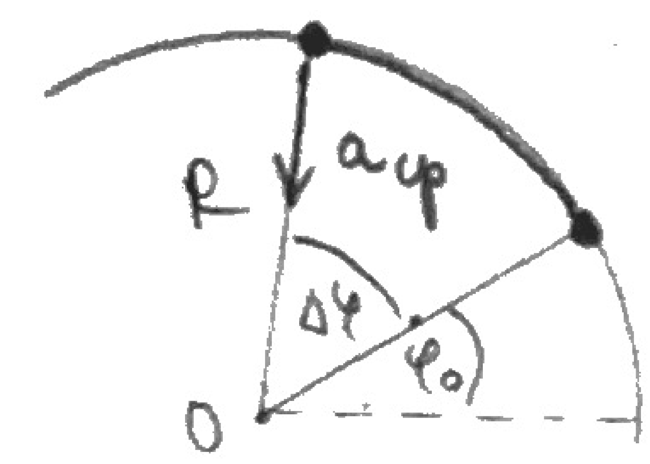
Szöggyorsulás:

$$\beta = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad \left(\left[\frac{1}{s^2}\right]\right)$$

$$a_t = R\cdot\beta, \quad \underline{a}_t = \underline{\beta}\times\underline{r}$$

7.) Speciális körmozgások

a.) Egyenletes körmozgás (ω = állandó)



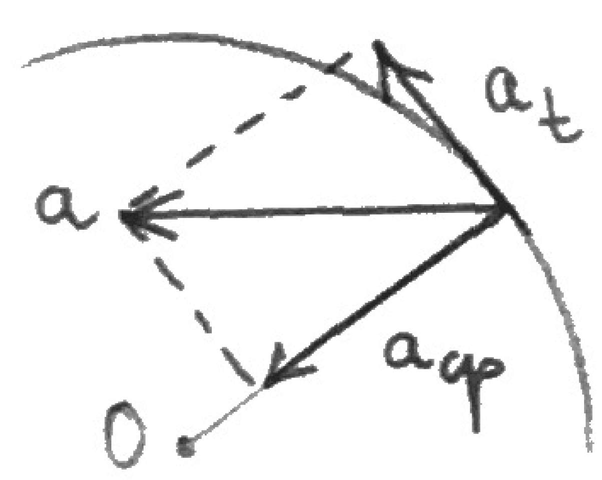
$$\Delta\varphi = \int \omega(t)\,dt = \omega \cdot t$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$v(t) = |\underline{v}(t)| = R\omega = \text{áll.}$$

$$|\underline{a}| = a_{cp} = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}.$$

b.) Egyenletesen gyorsuló körmozgás (β = állandó)



$$\omega(t) = \int \beta\,dt = \omega_0 + \beta \cdot t$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

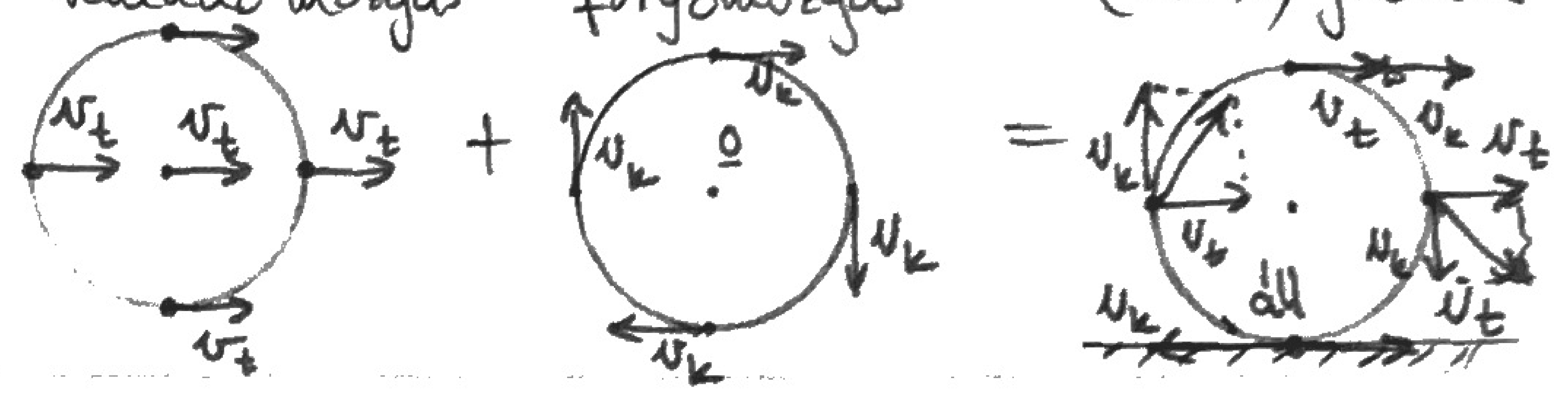
8. Megjegyzések

a.) A levezetésből látszik, hogy tetszőleges görbevonalú mozgásnál a gyorsulás felbontható centripetális és tangenciális komponensre:

$$a_t = \dot{v} = \frac{d}{dt}|\underline{v}|$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r_g} \leftarrow \text{görbületi sugár}$$

b.) Tiszta gördülés: $\boxed{v_t = R\omega}$



II. Dinamika

Arisztotelész (i.e. IV. század):

A testek mozgásának fenntartásához külső hatásra (erőre) van szükség.

Példa: nehéz láda a talajon húzva

Newton (1642-1727) (Galilei és Kepler nyomán):
Arisztotelész tévedett, a mozgásállapot megváltoztatásához szükséges külső hatás.

Példa: Légpárnás, vízszintes sínen elindított kiskocsi egyenletesen mozog.

1.) Az erő fogalma, mérése:

Egymással kapcsolatba kerülő testek kölcsönhatásba lépnek (kölcsönösen hatnak egymásra), ennek leírására az erőt használjuk.

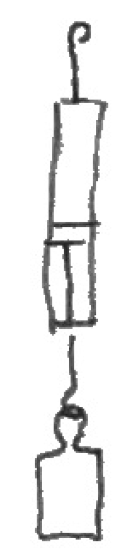
a.) Erő mérése: → mozgásállapot-változtató hatás
→ alakváltoztató hatás

Mi a másodikat használjuk: rugós erőmérő.

b.) Jele, mértékegysége:

$$\underline{F}\ , \quad \left[N = kg\frac{m}{s^2}\right]$$

↑ vektormennyiség



Kalibrálás:
1 kg tömegű testet az erőmérőre akasztva 9,81 N erőt mérünk.

2.) Newton II. törvénye

A tapasztalat szerint egy test gyorsulása arányos a rá ható erővel, iránya azonos azzal:

$$\underline{a} \sim \underline{F},$$

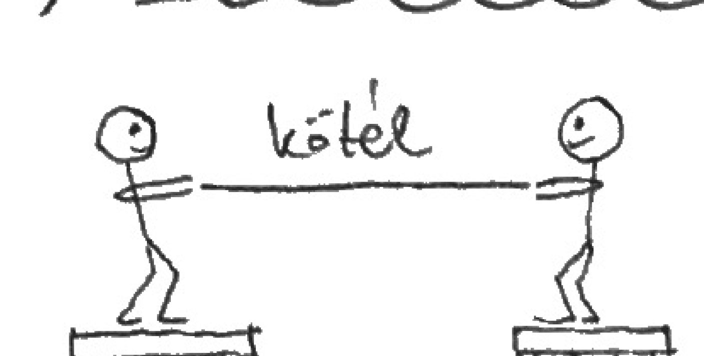
így a kettő hányadosa a testre jellemző állandó: a test tehetetlen tömege:

$$\text{definíció:} \quad m = \frac{|\underline{F}|}{|\underline{a}|}$$

Átrendezve kapjuk Newton II. törvényét:

$$\boxed{\underline{F} = m \cdot \underline{a}}$$

3.) Newton III. törvénye (hatás-ellenhatás)



Kísérlet: Két kiskocsin álló diák tart egy kötelet. Ha az egyik húzza a kötél végét, a másik is elmozdul.

Az erő mindig kölcsönhatás!
Ha egy A test hat egy B testre, akkor a B test is hat az A-ra. A két erő azonos nagyságú, párhuzamos, és ellentétes irányú:

$$\boxed{\underline{F}_{AB} = -\underline{F}_{BA}}$$

Ez Newton III. törvénye.

4.) Newton IV. törvénye (erőhatások függetlensége)

Eddig csak olyan esetet vizsgáltunk, amikor a testre egyetlen erő hatott. Több erő esetén a test úgy mozog, mintha az egyes erők külön-külön gyorsítanák a testet, és ezek a gyorsulásvektorok összeadódnak:

$$\underline{a} = \sum_i \underline{a}_i = \sum_i \frac{\underline{F}_i}{m} = \frac{1}{m} \cdot \sum_i \underline{F}_i$$

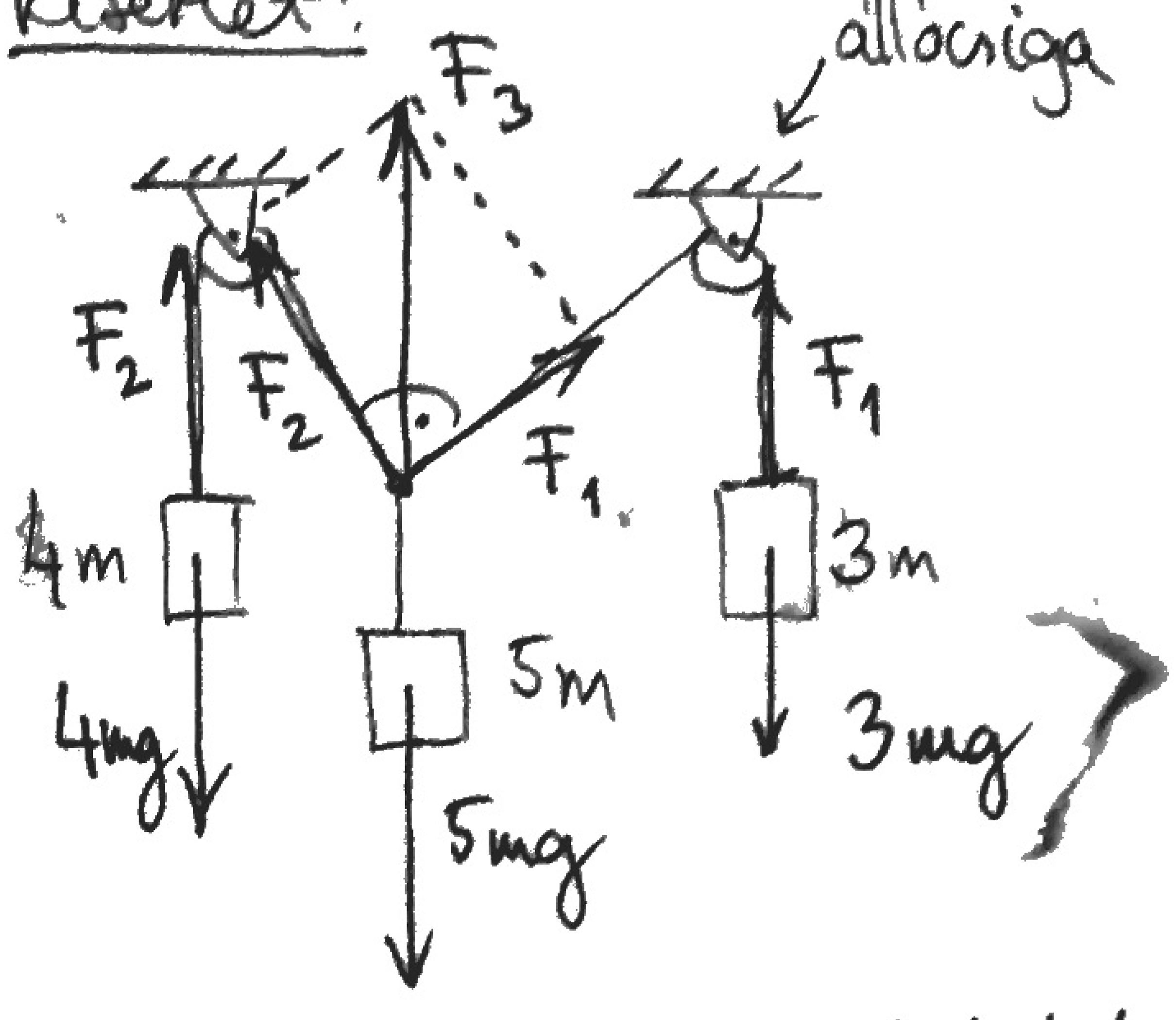
Ez Newton IV. törvénye.

Átrendezve:

$$\boxed{\sum_i \underline{F}_i = m\underline{a}}$$

← ez a dinamika alapegyenlete

Kísérlet:



$F_1 = 3mg$

$F_2 = 4mg$

$F_3 = 5mg$ → a kötelek derékszöget zárnak be.