Kalkulus

Sáfár Orsolya

Függvények

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz, esetleg egy részükhöz rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

Egy függvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyre a szabályt megadtuk, jele: ÉT vagy D.

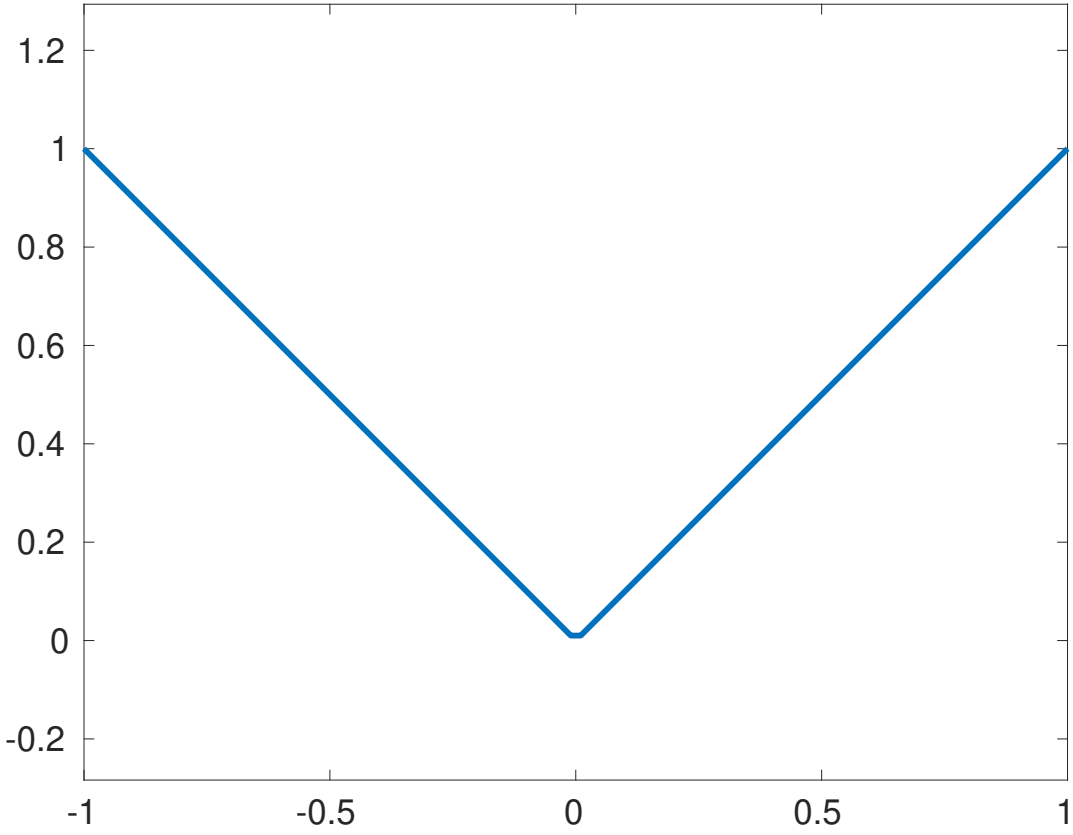
Az értékkészlet azon valós számok halmaza, amelyek előállnak képként, jele: ÉK vagy R.

Ha a függvényt f-nek hívjuk, akkor az eddigieket úgy írhatjuk, hogy $f : D_f \to R_f$.

Példák

Abszolút érték: $f(x) = \begin{cases} \text{x} & \text{ha } x \geq 0 \\ \text{-x} & x < 0 \end{cases}$

Ezen függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, értékkészlete $\mathbb{R}_0^+$.



Tulajdonságok

Monotonitás: Amh az f függvény monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2 \in D_f$-re $f(x_1) \leq f(x_2)$. Szigorú monoton nő, ha $<$-el is igaz.

Paritás: Amh az f függvény páros, ha $f(-x) = f(x)$, amh az f függvény páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$. Ezek csak akkor vizsgálhatóak, ha a D_f szimmetrikus az origóra.

Periodicitás:Amh az f függvény periodikus T periódussal ha $f(x + T) = f(x)$. Itt is illene megkötést tenni D_f-re.

Inverz

Ha $y = f(x)$ akkor a függvény inverze az a függvény amely y-hoz x-et rendeli.

Az f függvény pontosan akkor invertálható, ha R_f-ben minden szám csak egyszer áll elő x f szerinti képeként. Ehhez elégséges hogy f szigorú monoton legyen (de ez nem szükséges).

Emiatt az inverz értelmezési tartománya megegyezik az eredeti függvény értékkészletével, és az inverz értékkészlete megegyezik az eredeti függvény értelmezési tartományával.

Az inverz ábrája az eredeti függvény ábrájának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.

Emiatt az abszolútérték függvény nem invertálható, hiszen a pozitív értékeket kétszer veszi fel.
Ugyanez a helyzet az x^2-el. Utóbbi esetben mégis értelmeztünk inverzet úgy, hogy leszűkítettük azt a halmazt, ahol invertáltuk a nemnegatív számokra.

Nevezetes függvények - Exponenciális függvény: a^x

Számolási szabályok exponenciális kifejezésekre,

- ha a, b tetszőleges valós számok és α, β tetszőleges természetes számok:
  $$a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$
- illetve ha $a \neq 0$:
  $$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha} \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} \quad a^0 = 1$$

Vigyázat!

$$(a^\alpha)^\beta \neq a^{\alpha^\beta} = a^{(\alpha^\beta)},$$

így például $2^{n^2} \neq 4^n$, hanem $2^{n^2} = (2^n)^n$ és $4^n = 2^{2n}$!

Nevezetes függvények - Exponenciális függvény: a^x

Számolási szabályok exponenciális kifejezésekre (gyökökre) ha $a > 0$:

$$\sqrt[\alpha]{a} = a^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \sqrt[\alpha]{a^\beta} = a^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\beta \qquad \sqrt[\alpha]{a \cdot b} = \sqrt[\alpha]{a} \cdot \sqrt[\alpha]{b}$$

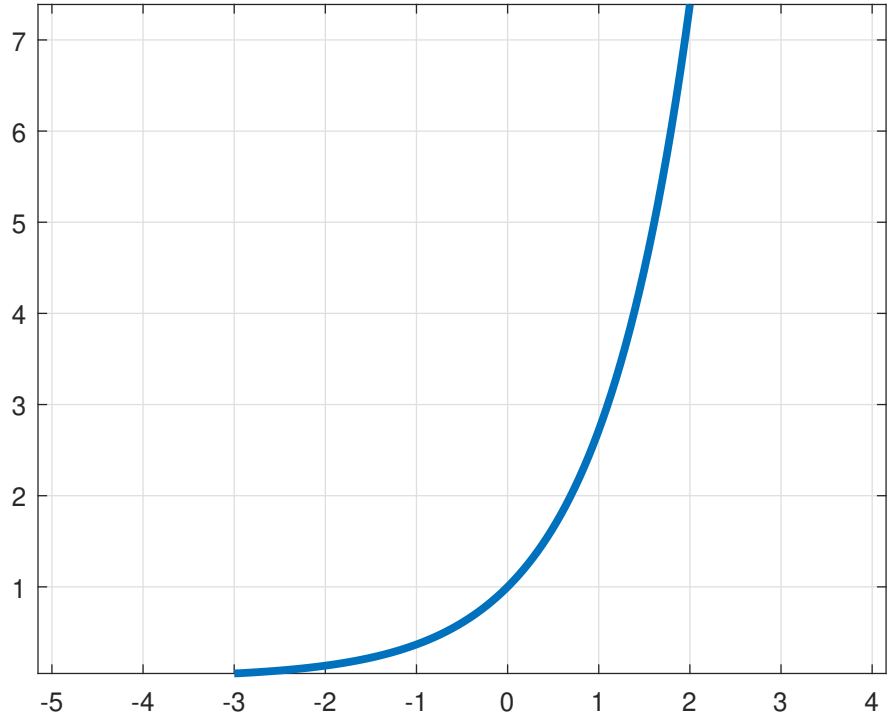
Vigyázat!

$$\sqrt[n^2]{2} \neq \sqrt{\sqrt[n]{2}},$$

hanem $\sqrt[n^2]{2} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{2}}$ és $\sqrt{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[2n]{2}$!

Exponenciális függvények

Az a^x függvény képe, ha $a > 1$:

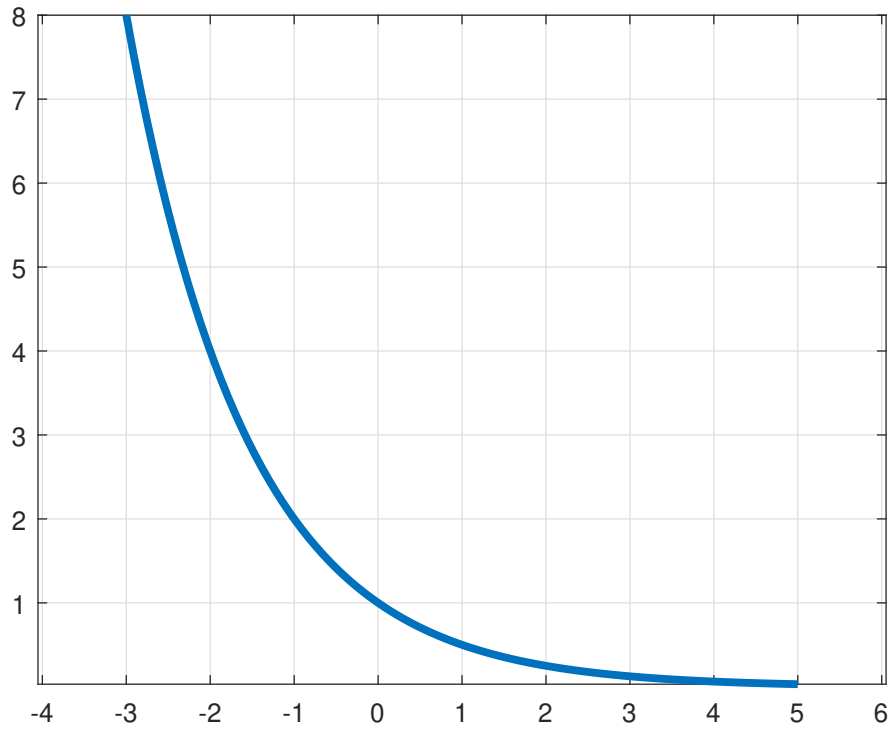


A teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton nő.

Nevezetes függvények - Exponenciális függvények

$0 < a < 1$

Mivel $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, ezért pont az a^x y tengelyre vett tükörképe.



A teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú mon. csökken.

Nevezetes függvények - log

Az exponenciális függvény inverze a logaritmus függvény. Definíció szerint $\log_a b$ az a szám, amelyre a-t emelve b-t kapjuk, azaz

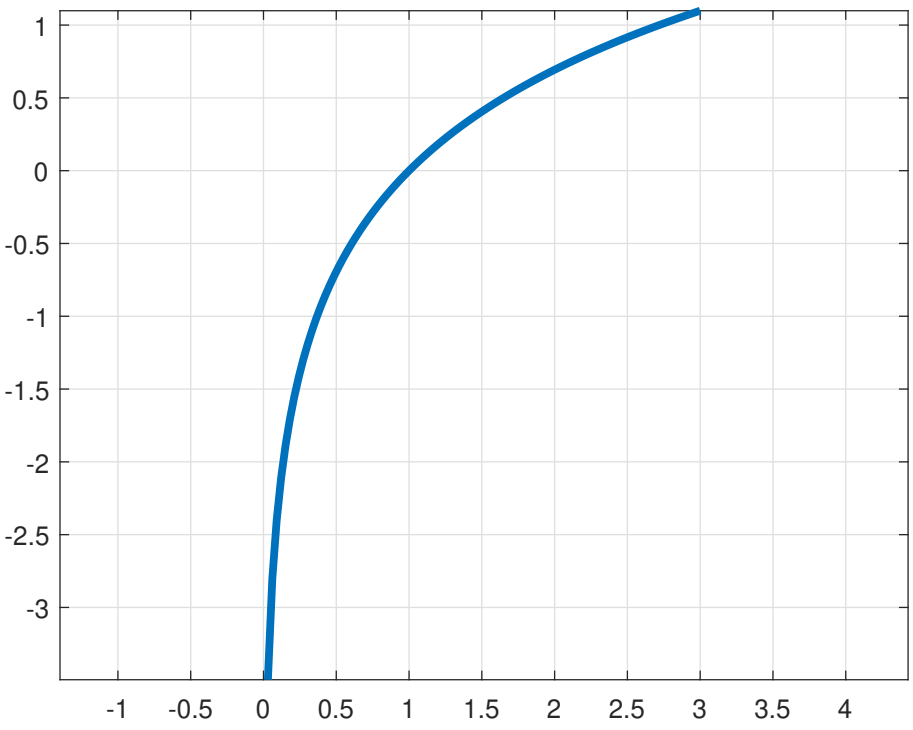
$$a^{\log_a b} = b$$

Ez a definíció köti össze az exponenciális kifejezések számolási szabályait a logaritmusos kifejezésekével. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $b, c, d \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ekkor

$\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$	$\log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$
$\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$	$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

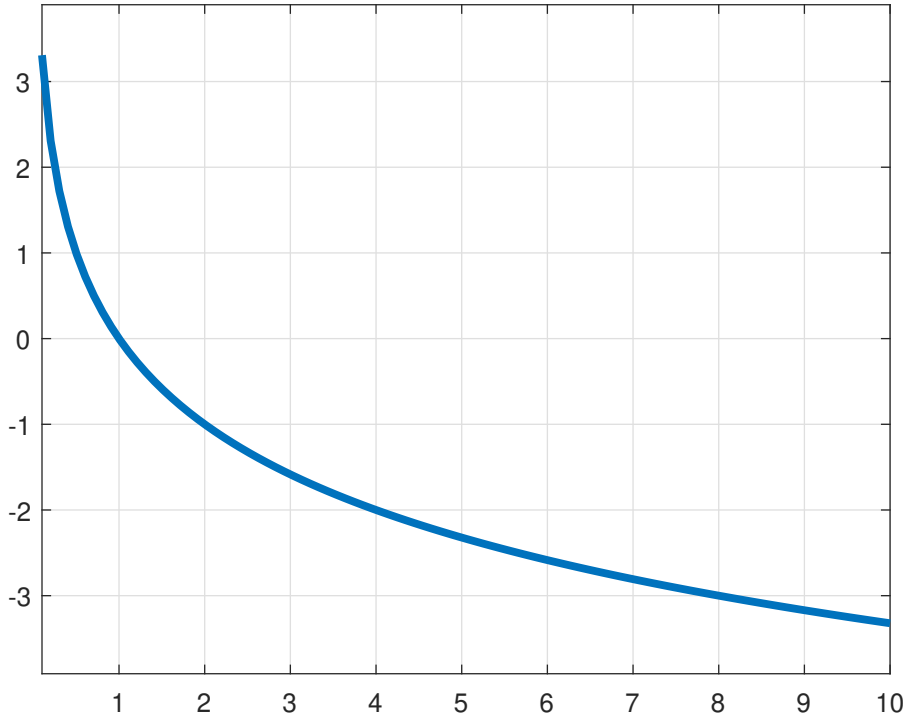
Nevezetes függvények - $\log_a x$, $a > 1$

Mivel a^x a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton nő, így az inverze $\mathbb{R}^+$-n értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}$ és szigorú monoton nő.



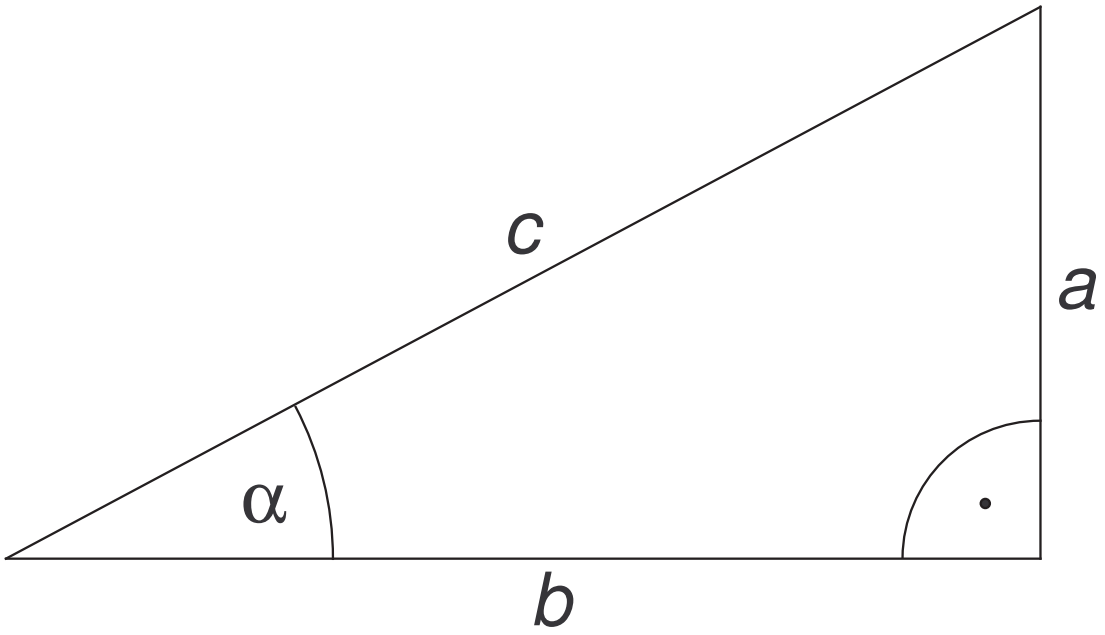
Nevezetes függvények - $\log_a x$, $0 < a < 1$

Mivel a^x a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton csökken, így az inverze $\mathbb{R}^+$-n értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}$ és szigorú monoton csökken.



Trigonometrikus függvények - sin, cos

Definíció hegyesszögekre: legyenek egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b, átfogójának hossza c. Az a oldallal szembeni szöge α.



Definíció szerint:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Trigonometrikus függvények - sin, cos

Ebből következően néhány nevezetes érték:

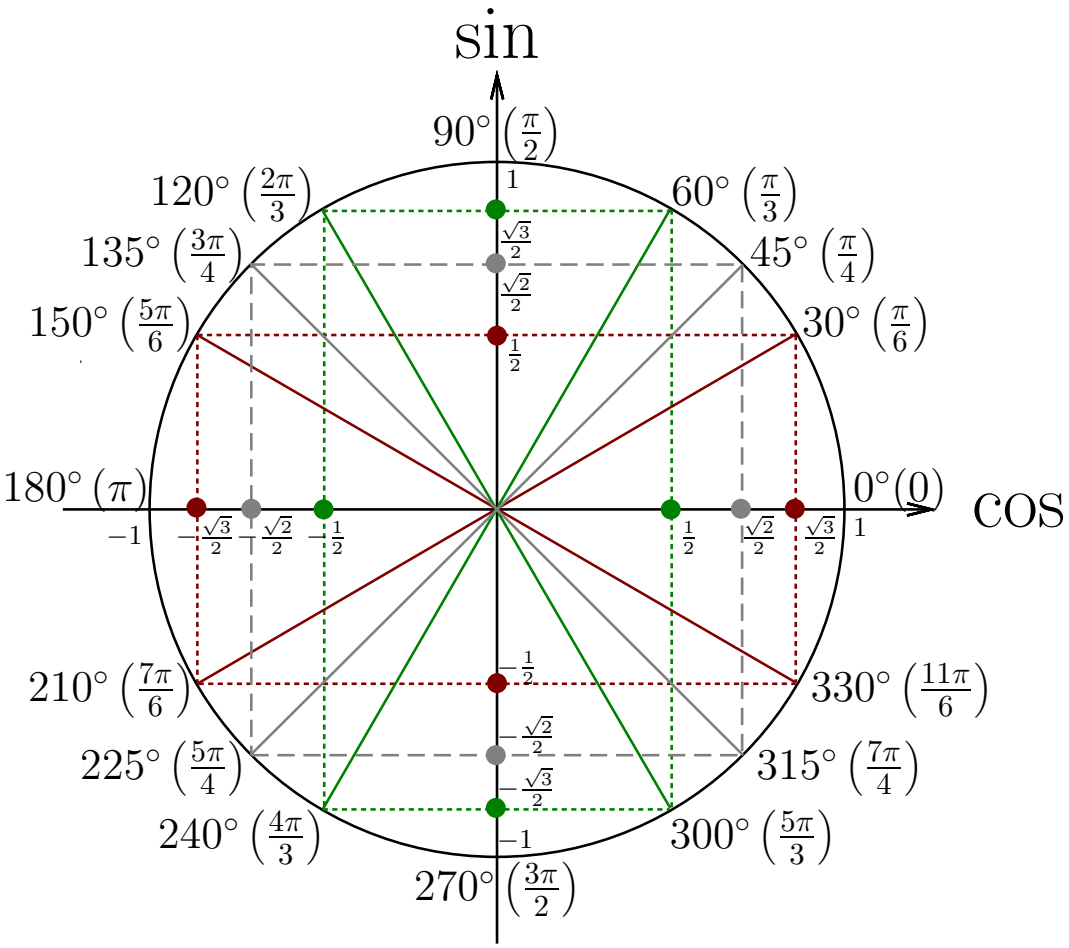
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Trigonometrikus függvények - sin, cos

Kiterjesztés az összes szögre (az ábráért köszönet Nagy Ilonának)



Trigonometrikus függvények - sin, cos

Kiterjesztés alapján az többi nevezetes érték:

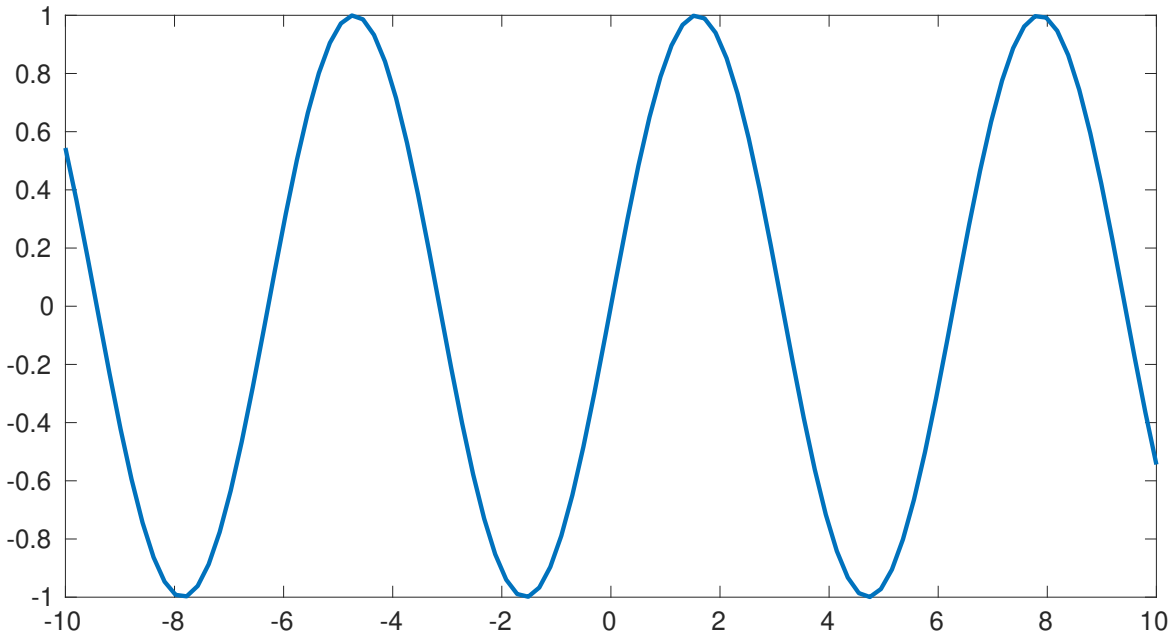
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

$$\sin(k\pi) = 0$$

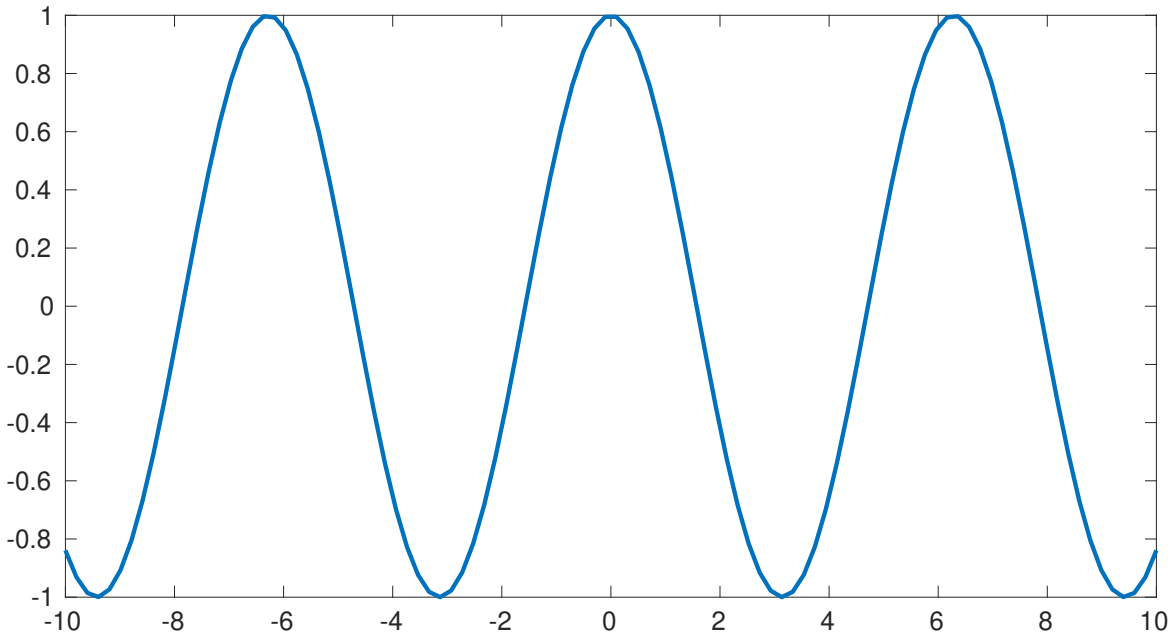
$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

Trigonometrikus függvények - sin



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1, 1]$.
Nem monoton, 2π periodikus, páratlan, azaz $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
Egyéb szimmetriái: $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$ és $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

Trigonometrikus függvények - cos



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1, 1]$.
Nem monoton, 2π periodikus, páros, azaz $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
Egyéb szimmetriái: $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$ és $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

Trigonometrikus függvények - tan

A $\tan\alpha$ definíciója hegyesszögekre $\frac{a}{b}$, kiterjeszthető az összes szögre is a kör segítségével. Alternatív definíció: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Ebből következően a nevezetes értékek:

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

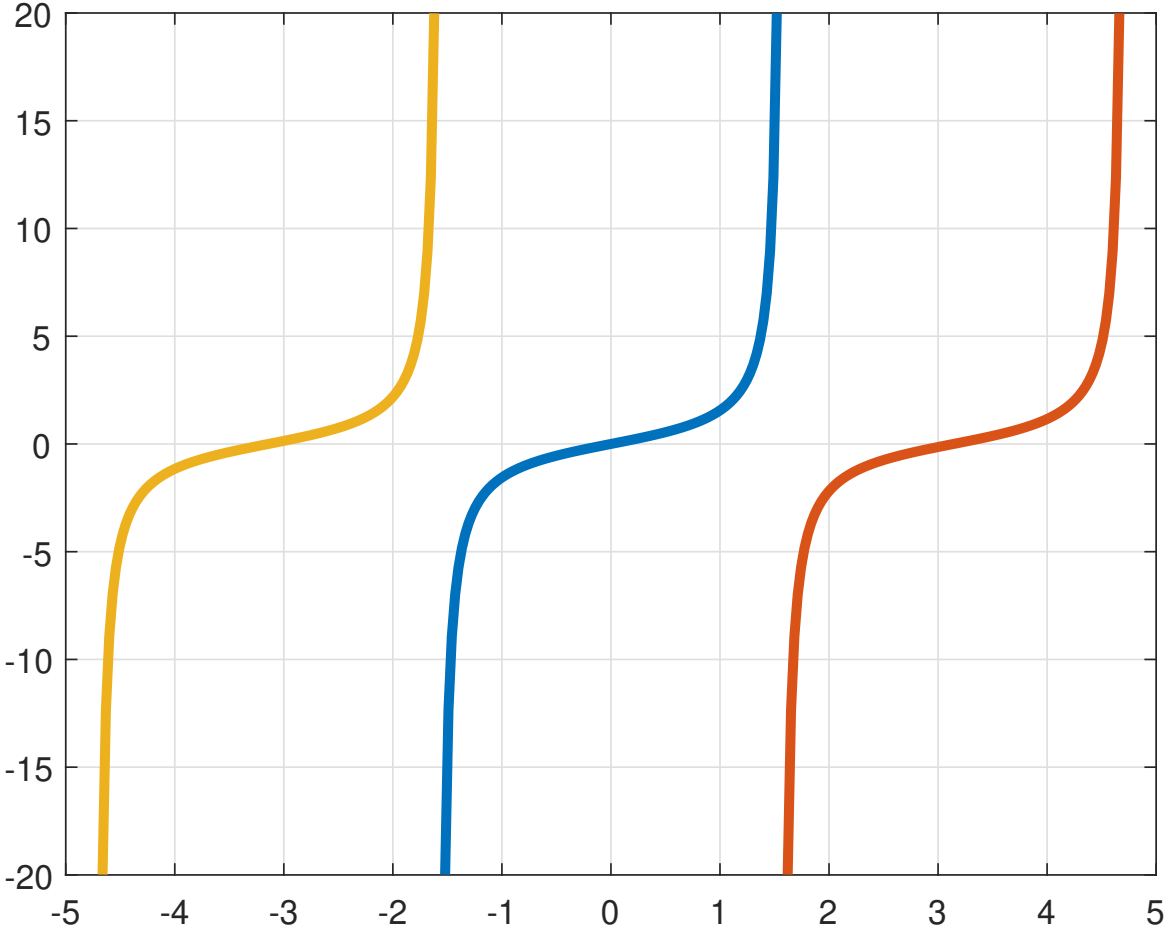
$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan(k\pi) = 0$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \text{nem értelmezett}$$

Trigonometrikus függvények - tan



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, értékkészlete a $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

Összefüggések a szögfüggvények között

Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ekkor $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, és a kétszeres szögekre: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ és $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Felhasználva a koszinusz kétszeres szögekre vonatkozó összefüggést kapjuk a linearizáló azonosságokat:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad \text{és} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

Végül két szög összegére az addíciós tételek:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

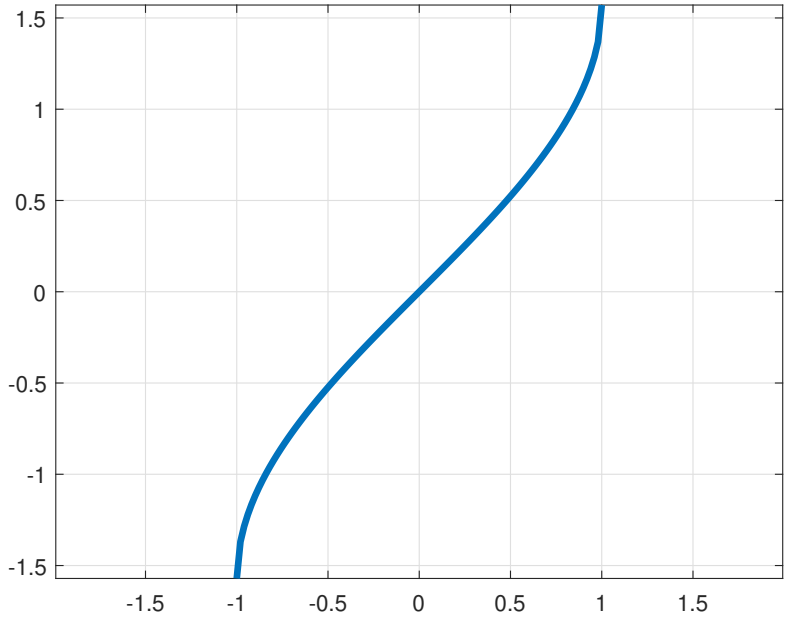
és

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Nevezetes függvények: arcsin

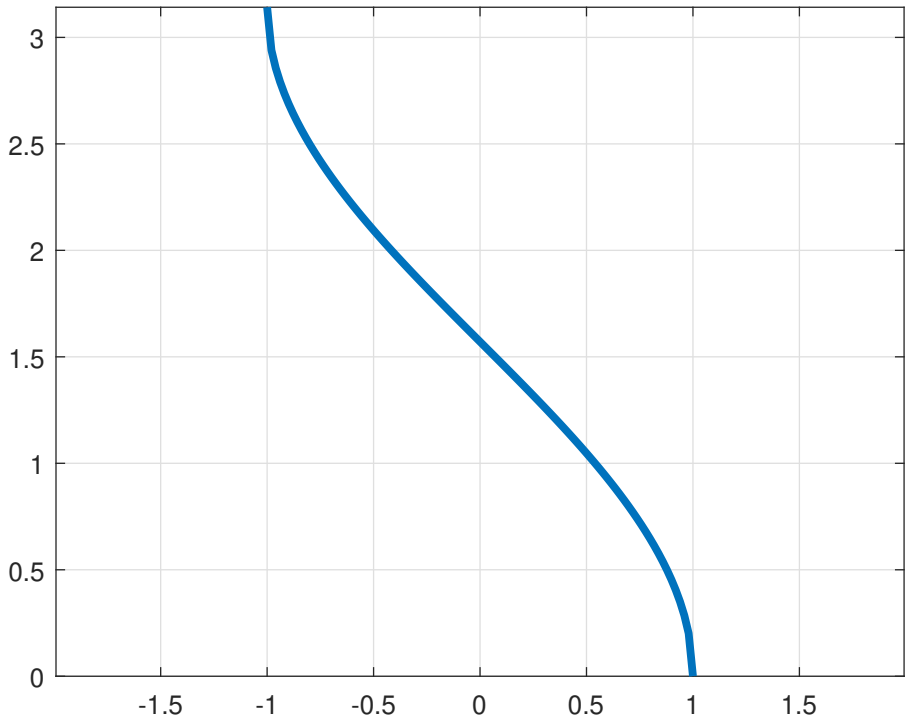
Trigonometrikus függvények inverzét csak egy olyan intervallumon tudjuk venni, ahol az adott függvény monoton. A sin esetében a $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-n.



Értelmezési tartománya a $[-1, 1]$, értékkészlete a $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, szigorú monoton nő, páratlan.

Nevezetes függvények: arccos

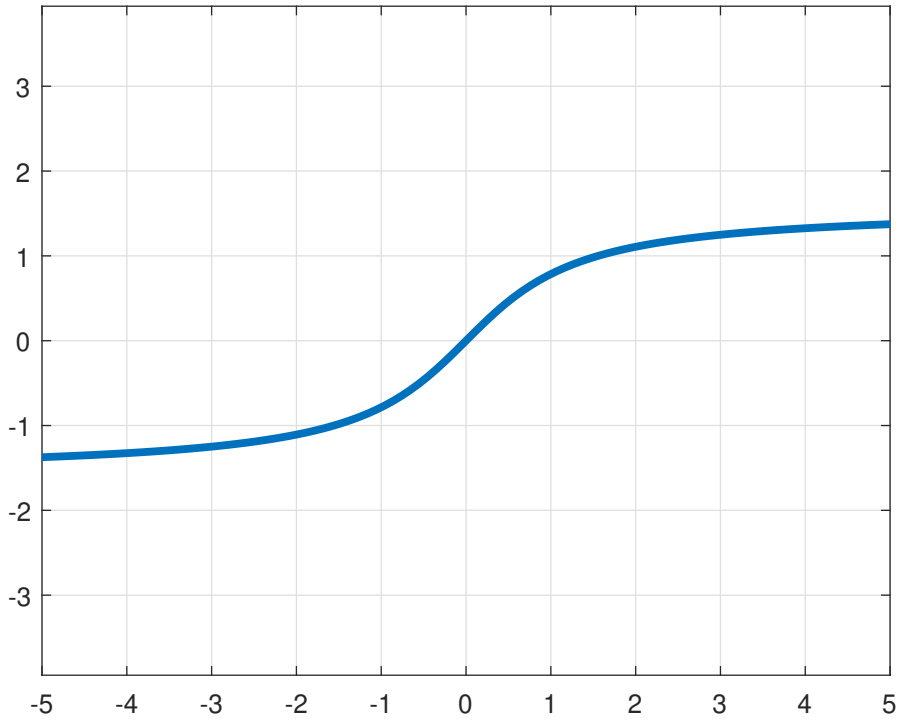
A cos esetében a $[0, \pi]$-n.



Értelmezési tartománya a $[-1, 1]$, értékkészlete a $[0, \pi]$, szigorú monoton csökken. (nem páros!)

Nevezetes függvények: arctan

A tan esetében a $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-n.



Értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$, értékkészlete $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, szigorú monoton nő, páratlan.